Tilgung einer Hypothek

Zinszahl (Zinsfuß):	p
Zinssatz (bei jährlicher Verzinsung):	$\frac{p}{100}$
Aufzinsungsfaktor:	$q = 1 + \frac{p}{100}$
Anfangsschuld zu Beginn des ersten Jahres:	k_0
Verbleibende Endschuld nach n-tem Jahr:	k_n
Annuität (Jahresrate):	A

Die Annuität A setzt sich zusammen aus den Zins- und den Tilgungsbeträgen; sie muss so hoch gewählt sein, dass $A = k_0 q - k_1 > 0$ ist, also $k_0 q > k_1$ gilt. Dann ergibt sich folgender Tilgungsplan:

Jahr	Schuld am Jahresanfang	Annuität	Zinsbetrag	Tilgungsbetrag	Schuld am Jahresende
1	k_0	A	$k_0 \cdot \frac{p}{100}$	$A - k_0 \cdot \frac{p}{100}$	k_1
2	k_1	A	$k_1 \cdot \frac{p}{100}$	$A - k_1 \cdot \frac{p}{100}$	k_2
3	k_2	A	$k_2 \cdot \frac{p}{100}$	$A - k_2 \cdot \frac{p}{100}$	k_3
...	...	...	...	...	...
n	k_{n-1}	A	$k_{n-1} \cdot \frac{p}{100}$	$A - k_{n-1} \cdot \frac{p}{100}$	k_n
...	...	...	...	...	...

Der vorstehenden Tabelle entnimmt man, wie die am Ende des n-ten Jahres verbleibende Schuld zu berechnen ist:

$$\begin{aligned} k_1 &= k_0 - (A - k_0 \cdot \frac{p}{100}) = k_0(1 + \frac{p}{100}) - A = k_0 q - A \\ k_2 &= k_1 q - A = (k_0 q - A)q - A = k_0 q^2 - A(q+1) = k_0 q^2 - A \cdot \frac{q^2 - 1}{q - 1} \\ k_3 &= k_2 q - A = k_0 q^3 - A(q+1)q = k_0 q^3 - A(q^2 + q + 1) = k_0 q^3 - A \cdot \frac{q^3 - 1}{q - 1} \\ \ldots &= \ldots \end{aligned}$$

und so fortfahrend allgemein

$$\boxed{k_n = k_0 \cdot q^n - A \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

und hieraus gewinnt man durch Umformen

$$k_0 - k_n = k_0 - k_0 q^n + A \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = \cdots = (q^n - 1) \cdot \left(\frac{A}{q - 1} - k_0 \right) = \sum_{i=1}^{n} (k_{i-1} - k_i),$$

$$k_{n+1} = k_n - (A - k_0(q - 1))\, q^n.$$

Um herauszufinden, über wie viele Jahre sich die Tilgung erstreckt, löst man die Darstellung für k_n zuerst nach n auf:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{(q-1)k_n - A}{(q-1)k_o - A} \right)}{\ln(q)}$$

und setzt jetzt $k_n = k_{n_e} = 0$ (die Schuld ist ja nach n_e Jahren getilgt):

$$n_e = \frac{\ln\left(\frac{A}{A - (q-1)k_0} \right)}{\ln(q)}.$$

Die Annuität bleibt während der n Jahre konstant: $A = (k_0 q^n - k_n) \cdot \frac{q-1}{q^n - 1}$, für $n = 1$ also $A = k_0 q - k_1$ (s.o.). Am Ende der Laufzeit haben sich die Annuitäten insgesamt zu $n_e \cdot A$ aufsummiert, d. h. die Bank hat nicht nur das geliehene Kapital (die Hypothek) k_0 zurück erhalten sondern darüber hinaus auch noch den Betrag $n_e \cdot A - k_0$. Das bedeutet einen Anteil von $\frac{n_e A - k_0}{k_0}$ als „Leihgebühr“ – ein stattlicher Gewinn!

Erläuterung zur Tilgung eines Darlehens

Angenommen, du möchtest ein Darlehen von 300 000 € zu einem Zinssatz von 4% aufnehmen.
a) Wie hoch ist die Restschuld nach Ablauf von 10 Jahren bei einer monatlichen Tilgungsrate von 1200 € ?
b) Wie lange dauert es, bis das Darlehen getilgt ist?

Zur Beantwortung der Fragen geht man systematisch vor. (Geldbeträge sind in € gedacht.)

Zinszahl (Zinsfuß):	$p = 4$
Zinssatz (bei jährlicher Verzinsung):	$\frac{p}{100} = \frac{4}{100} = 4\%$
Aufzinsungsfaktor:	$q = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{4}{100} = 1,04$
Anfangsschuld zu Beginn des ersten Jahres:	$k_0 = 300\,000$ (€)
Annuität (Jahresrate = 12 Monatsraten):	$A = 12 \cdot 1200$ (€) $= 14\,440$ (€)

a) Die verbleibende Restschuld nach Ablauf von ($n =$) 10 Jahren kann jetzt mittels der Formel

$$k_n = k_0 \cdot q^n - A \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

berechnet werden, indem man die Variablen durch die gegebenen Werte ersetzt und dann den Taschenrechner zur Hand nimmt:

$$\begin{aligned} k_{10} &= 300\,000 \cdot 1,04^{10} - 14\,440 \cdot \frac{1,04^{10} - 1}{1,04 - 1} \\ &\approx 300\,000 \cdot 1,4802 - 14\,440 \cdot \frac{1,4802 - 1}{1,04 - 1} \\ &\approx 444\,073,29 - 14\,400 \cdot \frac{0,4802}{0,04} \\ &\approx 444\,073,29 - 172\,887,94 = 271\,185,35 \end{aligned}$$

Nach Ablauf von 10 Jahren sind also immer noch stolze $271\,185,35$ € zu tilgen! Das liegt daran, dass die Bank nach Ablauf des ersten Jahres sich zuerst den Zinsanteil des Darlehens erstatten lässt:

$$300\,000\,€ \cdot 0,04 = 12\,000\,€,$$

sodass von der Annuität $14\,440$ € nur noch 2440 € zur Tilgung des Darlehens am Ende des ersten Jahres übrig bleiben; zu tilgen bleibt also

$$k_1 = k_0 q - A = 300\,000\,€ \cdot 1,04 - 14\,440\,€ = 312\,000\,€ - 14\,440\,€ = 297\,560\,€.$$

Das gleiche Spiel wiederholt sich jetzt mit dem noch zu tilgenden Darlehnsbetrag $k_1 = 297\,560$ €.

Hieraus kannst du erkennen, dass die Annuität mindestens so hoch gewählt werden muss, dass nach Ablauf des ersten Jahres $k_1 < k_0 q$ ist. (Für die vorgegebene Annuität $A = 14\,440$ € ist das der Fall.)

b) Die Antwort auf diese Frage liefert die Formel (€ kann herausgekürzt werden):

$$n_e = \frac{\ln\left(\frac{A}{A-(q-1)k_0}\right)}{\ln(q)} = \frac{\ln\left(\frac{14\,440}{14\,440 - 0,04 \cdot 300\,000}\right)}{\ln(1,04)} = \frac{1,7780}{0,0392} \approx 45,33,$$

d.h. erst nach über 45 Jahren wäre nach dem vorgelegten Beispiel das Darlehen getilgt. Die Bank hat dann nicht nur die geliehenen $300\,000$ € zurück erhalten sondern zusätzlich noch $n_e A - k_0 = 354\,613,33$ €. Da kann man nur ein langes Leben wünschen mit monatlich stets verfügbaren 1200 € „Kohle“ und hoffen, dass die Bank die Zinsen nicht erhöht!