

Sätze über Dreiecke und Vierecke im Kreis

Satz über das Sehnenviereck

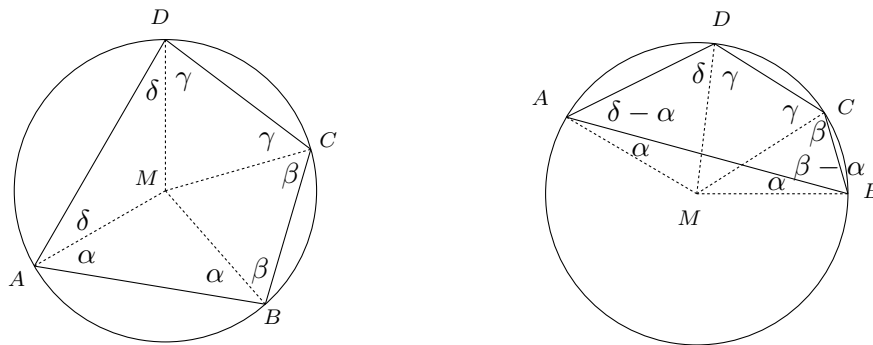
Sei $ABCD$ ein Viereck, bei dem alle vier Eckpunkte auf demselben Kreis liegen; ein solches Viereck heißt *Sehnenviereck*. In einem solchen Viereck ergänzen sich die Weiten gegenüberliegender Winkel zu 180° .

Beweis

a) Fall 1: Sei M der Mittelpunkt des Umkreises des Sehnenvierecks $ABCD$; er liege im Inneren des Vierecks. Dann sind die Dreiecke ABM , BCM , CDM und DAM gleichschenkelig, ihre Basiswinkel also gleichweit. Mit den Bezeichnungen der linken der beiden Figuren gilt nach dem Innenwinkelsatz:

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 360^\circ, \quad \text{d. h.} \quad (\alpha + \beta) + (\gamma + \delta) = 180^\circ \quad \text{und} \quad (\alpha + \delta) + (\beta + \gamma) = 180^\circ,$$

so dass die Weiten der jeweils gegenüber liegenden Winkel sich zu 180° ergänzen.



Fall 2: Liegt M nicht im Inneren des Sehnenvierecks, so ergibt sich wieder nach dem Innenwinkelsatz (vgl. die rechte der beiden Figuren):

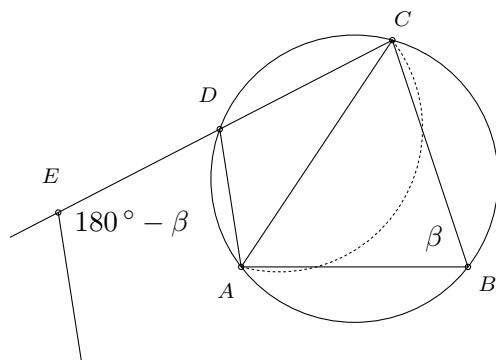
$$(\delta - \alpha) + (\beta - \alpha) + \beta + 2\gamma + \delta = 360^\circ, \quad \text{d. h.} \quad (\delta - \alpha) + \beta + \gamma = 180^\circ \quad \text{und} \quad (\beta - \alpha) + \gamma + \delta = 180^\circ,$$

so dass auch in diesem Fall die Weiten der jeweils gegenüber liegenden Winkel sich zu 180° ergänzen.

Umkehrung des Satzes über das Sehnenviereck

Ergänzen sich in einem konvexen Viereck die Weiten gegenüber liegender Winkel zu 180° , so ist das Viereck ein Sehnenviereck.

Beweis



Um ein Viereck zu erhalten, das die Voraussetzung des Satzes erfüllt, gehe man von einem beliebigen Dreieck ABC aus. Sei $\beta = w(CBA)$. Von C aus zeichne man einen Strahl, der nicht durch das Dreieck ABC verläuft, und wähle auf ihm einen Punkt $E (\neq C)$ (vgl. Fig.). An diesen Strahl in E trage man einen Winkel mit der Weite $180^\circ - \beta$ an. Zum freien Schenkel dieses Winkels zeichne man die Parallele durch A ; sie schneidet den Strahl im Punkt D , so dass auch $w(ADC) = 180^\circ - \beta$. Damit ist $ABCD$ ein Viereck, in dem sich die Weiten gegenüber liegender Winkel zu 180° ergänzen. Zu zeigen ist jetzt, dass $ABCD$ ein Sehnenviereck ist.

Das Dreieck ABC besitzt einen eindeutig bestimmten Umkreis. Von allen Punkten, die auf dem Kreisbogen \widehat{AC} liegen, erscheinen die Punkte A und C unter einem Winkel mit der Weite β ; von allen Punkten auf dem Kreisbogen \widehat{CA} erscheinen A und C unter einem Winkel der Weite $180^\circ - \beta$; das gilt aber auch für das Spiegelbild

dieses Kreisbogens bzgl. der Achse AC (in Fig. gestrichelt). Auf einem dieser beiden Bögen muss jetzt der Punkt D liegen. Läge er auf dem Spiegelbildbogen, wäre die Voraussetzung nicht erfüllt: $ABCD$ wäre ein konkaves Viereck (der Winkel $\angle ADC$ wäre größer als 180°).

Daher muss der Punkt D auf dem Kreisbogen \widehat{CA} liegen, und somit ist $ABCD$ tatsächlich ein Sehnenviereck.

Peripheriewinkelsatz (Umfangswinkelsatz)

In einem Kreis sind alle Peripheriewinkel (in derselben Halbebene) über demselben Bogen gleich weit, und zwar halb so weit wie der Zentriwinkel (Mittelpunktswinkel) über demselben Bogen.

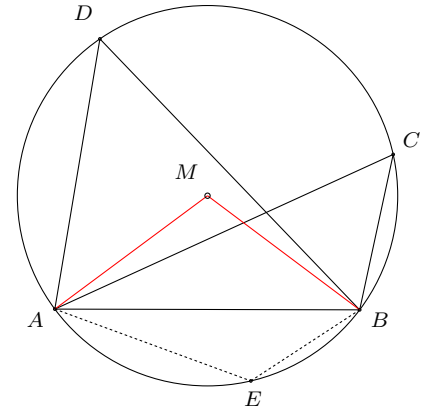
Beweis

1. E sei ein fest gewählter Punkt auf dem zu \widehat{BA} komplementären Kreisbogen \widehat{AB} . Die Sehnenvierecke $AEBC$ und $AEBD$ haben dann den Winkel $\angle BEA$ gemeinsam. Nach dem Satz über das Sehnenviereck gilt

$$w(ACB) = w(ADB) = 180^\circ - w(BEA).$$

Da C und D beliebig gewählte Punkte auf dem Kreisbogen \widehat{BA} sind, so sind alle Peripheriewinkel über diesem Kreisbogen als gleich weit nachgewiesen.

2. Wählt man den Punkt C speziell so, dass $M \in AC$, so ist $\triangle BCM$ ein gleichschenkliges Dreieck mit Basiswinkeln gleicher Weite $\beta = w(CBM) = w(MCB)$. Der Winkel $\angle AMB$ ist Außenwinkel von $\triangle BCM$; er habe die Weite α . Somit gilt $\alpha = 2\beta$ oder $\beta = \frac{1}{2}\alpha$, und das gilt nach 1. auch für jede beliebige andere Lage von C auf dem Kreisbogen \widehat{BA} .



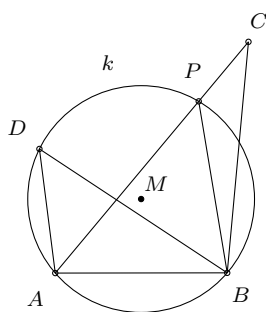
Bemerkung

Aus dem Peripheriewinkelsatz kann der Satz über das Sehnenviereck gefolgert werden und umgekehrt aus ihm wieder der Peripheriewinkelsatz, so dass diese beiden Sätze äquivalent sind. Außerdem enthält dieser Satz als Spezialfall den Satz des THALES; denn falls $M \in AB$, so ist der Mittelpunktswinkel 180° weit und somit jeder Peripheriewinkel über dem Halbkreisbogen \widehat{BA} ein rechter Winkel.

Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes

Werden über einer Strecke AB die Punkte C und D so gewählt, dass sie in derselben Halbebene über AB liegen und $w(ACB) = w(ADB)$ gilt, so liegen die Punkte A, B, C und D auf einem gemeinsamen Kreis.

Beweis



Man bilde den Kreis k um die Punkte A, B und D . Angenommen, der Punkt C liegt nicht auf k . Dann gibt es einen Punkt P , der sowohl auf der Geraden (AC) als auch auf k liegt, d. h. $P \in k \cap (AC)$. Dann gilt nach dem Peripheriewinkelsatz, dass $w(APB) = w(ADB)$, und nach Voraussetzung, dass $w(ACB) = w(ADB)$, folglich auch $w(APB) = w(ACB)$. Damit sind die Dreiecke $\triangle ABP$ und $\triangle ABC$ kongruent, da sie in einer Seite und zwei Winkeln übereinstimmen; sie sind sogar identisch, da sie zwei gemeinsame Punkte haben. Also stimmen C und P überein und liegen auf demselben Kreis k im Widerspruch zur Annahme, dass C nicht auf k liegt.

Sehntangentenwinkel-Satz

Der Sehntangentenwinkel ist ebenso weit wie die zugehörigen Peripheriewinkel auf der anderen Seite der zu-

gehörigen Sehne. Nach dem Peripheriewinkelsatz gilt auch: Der Sehnentangentenwinkel ist halb so weit wie der Mittelpunktswinkel, zu dem er gehört.

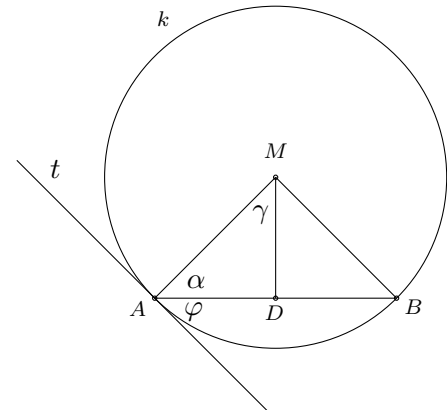
Beweis

Nach dem Peripheriewinkelsatz ist ein Peripheriewinkel halb so weit wie der zugehörige Mittelpunktswinkel. Es genügt also zu zeigen, dass $\varphi = \gamma$ gilt.

Sei zunächst $\gamma < 90^\circ$. Fällt man das Lot von M auf AB mit dem Lotfußpunkt D , so gilt im Dreieck $\triangle ADM$

$$\alpha + 90^\circ + \gamma = 180^\circ, \quad \text{d. h.} \quad \gamma = 90^\circ - \alpha.$$

Da die Tangente t an den Kreis k im Punkt A und der zugehörige Berührungshalbmesser AM zueinander senkrecht sind, somit also $\varphi = 90^\circ - \alpha$ gilt, so folgt $\varphi = \gamma$.



Sei nun $\gamma > 90^\circ$. Über jeder Sehne gibt es zwei Peripheriewinkel, die sich zu 180° ergänzen. Wie soeben gezeigt, gehört zu einem spitzen Peripheriewinkel ein spitzer Sehnentangentenwinkel, der sich seinerseits mit einem stumpfen Sehnentangentenwinkel (als Nebenwinkel) zu 180° ergänzt, der die Weite

$$180^\circ - \varphi = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ + \alpha = 90^\circ + (90^\circ - \gamma) = 180^\circ - \gamma$$

hat, so dass auch jetzt wieder $\varphi = \gamma$ folgt.

Falls $\gamma = 90^\circ$, so steht die Tangente t senkrecht auf dem Durchmesser AB , so dass $\varphi = 90^\circ = \gamma$ ist.

Sehnensatz

Schneiden sich im Inneren eines Kreises zwei Sehnen, so ist das Produkt der Längen beider Abschnitte der einen Sehne gleich dem Produkt der Längen beider Abschnitte der anderen Sehne.

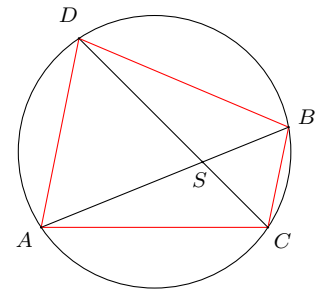
Beweis

Die Dreiecke $\triangle ASD$ und $\triangle BSC$ sind ähnlich (vgl. Fig.); denn

- 1.) $w(DSA) = w(CSB)$ (Scheitelwinkel);
- 2.) $w(ADS) = w(SBC)$ (Umfangswinkel über dem Bogen \widehat{AC});
- 3.) $w(SAD) = w(BCS)$ (Umfangswinkel über dem Bogen \widehat{BD}).

Daher gilt $|AS| : |DS| = |CS| : |BS|$, und das bedeutet

$$|AS| \cdot |BS| = |CS| \cdot |DS|.$$



Bemerkung

Der Sehnensatz lässt sich auch als eine *Verallgemeinerung des Höhensatzes des EUKLID* auffassen. Wählt man die beiden Sehnen nämlich so, dass eine von ihnen dem Durchmesser entspricht und die andere auf ihr senkrecht steht, so bilden deren Endpunkte mit den Endpunkten des Durchmessers nach dem *Satz des THALES* ein rechtwinkliges Dreieck, und die Aussage des Sehnensatzes entspricht der des Höhensatzes des EUKLID.

Umkehrung des Sehnensatzes

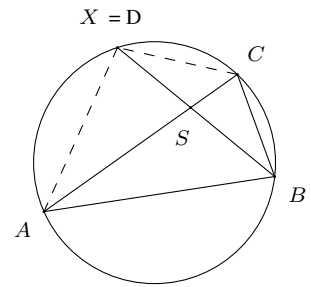
Wenn für die Diagonalen AC und BD eines konvexen Vierecks $ABCD$ mit dem Diagonalschnittpunkt S die Gleichung $|AS| \cdot |CS| = |BS| \cdot |DS|$ gilt, so besitzt das Viereck einen Umkreis, d. h. es ist ein Sehnenviereck.

Beweis

Zunächst konstruiere man den (eindeutig bestimmten) Umkreis k des Dreiecks ABC . Die Gerade (BS) schneidet k in B und im Punkt X . Im Viereck $ABCX$ mit den Diagonalen AC und BX gilt dann nach dem Sehnensatz:

$$|AS| \cdot |CS| = |BS| \cdot |XS|.$$

Da nach Voraussetzung $|AS| \cdot |CS| = |BS| \cdot |DS|$ gelten soll, so folgt sofort $X = D$.

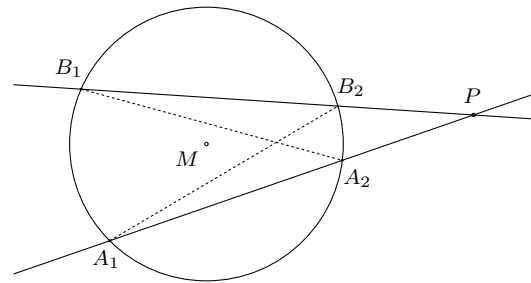
**Sekantensatz**

Schneiden sich zwei Sekanten eines Kreises in einem Punkt P außerhalb des Kreises, so ist das Produkt der jeweils von P bis zum Schnittpunkt von Kreis und Sekante ausgehenden Abschnittslängen auf beiden Sekanten gleich groß.

Beweis

Bezeichnungen sind der Figur zu entnehmen. Verbindet man A_1 mit B_2 und A_2 mit B_1 , so entstehen zwei ähnliche Dreiecke $\triangle A_1PB_2$ und $\triangle PB_1A_2$; denn

- 1.) $\angle B_1PA_1$ ist gemeinsamer Winkel;
- 2.) $\angle PA_1B_2$ und $\angle A_2B_1P$ sind als Peripheriewinkel über demselben Bogen B_2A_2 gleich weit;
- 3.) infolgedessen sind auch die Winkel $\angle PA_2B_1$ und $\angle A_1B_2P$ gleich weit.



Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ergibt sich $|PA_1| : |PB_2| = |PB_1| : |PA_2|$ oder als Produktgleichung $|PA_1| \cdot |PA_2| = |PB_1| \cdot |PB_2|$.

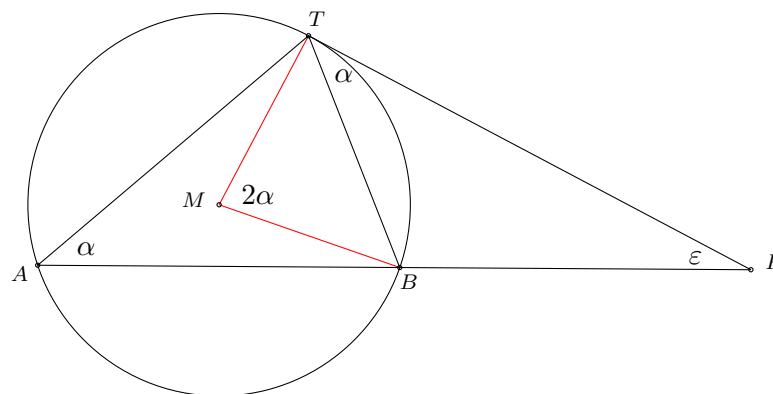
Bemerkung

Wird im vorangehenden Beweis eine der beiden Sekanten zur Tangente, so erhält man sofort den Sehnens-Tangentensatz, der sich aber auch direkt beweisen lässt.

Sekanten-Tangenten-Satz

Wenn sich eine Sekante und eine Tangente eines Kreises außerhalb des Kreises in einem Punkt P schneiden, so ist das Produkt beider von P ausgehender Sekantenabschnittslängen gleich dem Quadrat der Länge des Tangentenabschnitts (zwischen P und dem Berührungspunkt T von Tangente und Kreis):

$$|PA| \cdot |PB| = |PT|^2,$$

Beweis

Verbindet man T mit A und B , so gilt nach dem Sehnen tangentialenwinkelsatz (s. o.): $w(BAT) = w(BTP) = \alpha$ (vgl. Fig.). Da außerdem $w(TPB) = w(TPA) = \varepsilon$ und wegen der gleichen Winkelweitensumme in Dreiecken dann auch noch $w(ATP) = w(PBT)$, so sind die Dreiecke $\triangle APT$ und $\triangle PTB$ ähnlich. Daher stimmen in den Dreiecken $\triangle APT$ und $\triangle PTB$ die Verhältnisse der Längen entsprechender Strecken überein, so dass

$$\frac{|PA|}{|PT|} = \frac{|PT|}{|PB|} \quad \Leftrightarrow \quad |PA| \cdot |PB| = |PT|^2,$$

und das war zu beweisen.

Potenzsatz

Wird von einem Punkt P außerhalb eines Kreises $k(M; r)$ mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r eine Sekante zum Kreis gezeichnet, die den Kreis in den Punkten A und B schneidet, so gilt: $|PA| \cdot |PB| = |MP|^2 - r^2$. ($|MP|^2 - r^2$ heißt *Potenz von P bzgl. k* .)

Beweis

Man betrachte die Figur zum Beweis des vorangehenden Sekanten-Tangenten-Satzes und denke sich M mit P verbunden. T sei der Berührungspunkt der von P aus an den Kreis konstruierten Tangente. Das Dreieck $\triangle MPT$ ist rechtwinklig, so dass mit $|MT| = r$ nach dem Satz des PYTHAGORAS gilt: $|PT|^2 = |MP|^2 - r^2$. Nach dem Sekanten-Tangenten-Satz folgt sofort die Behauptung.