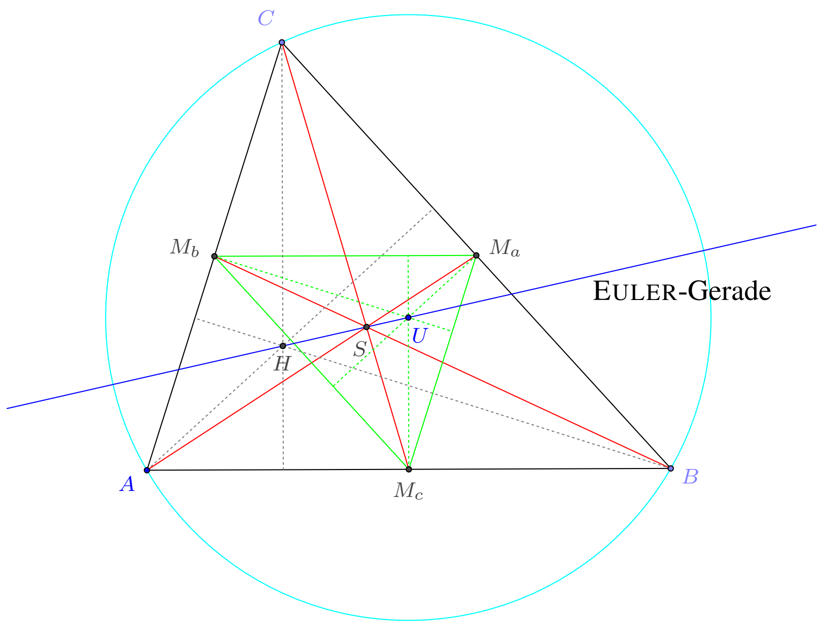
Die EULER-Gerade

Satz von EULER
In jedem Dreieck (vgl. Figur) liegen der Schnittpunkt H der Höhen, der Schnittpunkt S der Seitenhalbierenden (Schwerpunkt) und der Schnittpunkt U der Mittelsenkrechten (Umkreismittelpunkt) auf einer gemeinsamen Geraden, der **EULER-Geraden**. Dabei gilt $|HS| = 2 \cdot |SU|$.



Beweis
Durch zentrische Streckung $\mathcal{Z}_{S;-\frac{1}{2}}$ mit dem Zentrum S und dem Streckfaktor $-\frac{1}{2}$ geht das Dreieck $\triangle ABC$ in das Seitenmittendreieck $\triangle M_a M_b M_c$ über:

$$\mathcal{Z}_{S;-\frac{1}{2}}(A) = M_a, \quad \mathcal{Z}_{S;-\frac{1}{2}}(B) = M_b, \quad \mathcal{Z}_{S;-\frac{1}{2}}(C) = M_c, \quad \text{also} \quad \mathcal{Z}_{S;-\frac{1}{2}}(\triangle ABC) = \triangle M_a M_b M_c.$$

Die Streckungsstrahlen sind die Seitenhalbierenden AM_a, BM_b und CM_c, die sich im Verhältnis $1:2$ schneiden, exakt formuliert:

$$|M_aS| : |AS| = |M_bS| : |BS| = |M_cS| : |CS| = 1 : 2.$$

Die Mittelsenkrechten in $\triangle ABC$ sind die Höhen in $\triangle M_a M_b M_c$. Weil nun $\mathcal{Z}_{S;-\frac{1}{2}}(H) = U$, so müssen sich auch die Höhen in $\triangle ABC$ im Punkt H schneiden, da H und U einander entsprechende Punkte der Streckung sind. Daher müssen H und U zusammen mit dem Streckungszentrum auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Außerdem ist damit $|HS| = 2 \cdot |SU|$ gezeigt.

Bemerkung
Falls das Dreieck $\triangle ABC$ gleichseitig ist, fallen die Punkte H, S und U zusammen, liegen zwar auch dann auf einer gemeinsamen Geraden, die allerdings jetzt nicht mehr eindeutig bestimmt ist; dann aber kann man nicht mehr von *der* EULER-Gerade sprechen.