Lösung einiger Exponentialgleichungen

Aufgabe 1: Man löse die Gleichung $3^x - (\sqrt{3})^{x+4} + 20 = 0$ und berechne die Summe der Lösungen.

Lösung 1
Da $3 = \sqrt{3}^{\,2}$ ist, kann man beide Potenzen auf gleiche Basis bringen.

$$\begin{aligned}
3^x - (\sqrt{3})^{x+4} + 20 &= 0 \\
\big((\sqrt{3})^x\big)^2 - 9 \cdot (\sqrt{3})^x + 20 &= 0 \\
\big((\sqrt{3})^x - 4\big)\big((\sqrt{3})^x - 5\big) &= 0 \quad \text{(nach dem Satz des VIETA)} \\
\log_3((\sqrt{3})^x) = \log_3(4) \;&\vee\; \log_3((\sqrt{3})^x) = \log_3(5) \\
x \cdot \log_3(\sqrt{3}) = \log_3(4) \;&\vee\; x \cdot \log_3(\sqrt{3}) = \log_3(5) \quad \Big|\ \log_3(\sqrt{3}) = \frac{1}{2} \\
x = 2 \cdot \log_3(4) \;&\vee\; x = 2 \cdot \log_3(5)
\end{aligned}$$

Die nummerische Auswertung ergibt $x = 2 \cdot \frac{\ln(4)}{\ln(3)} \approx 2,5237$ oder $x = 2 \cdot \frac{\ln(5)}{\ln(3)} \approx 2,9299$.

Die Summe der Lösungen ist $2 \cdot \log_3(4) + 2 \cdot \log_3(5) = 2 \cdot \big(\log_3(4) + \log_3(5)\big) = 2 \cdot \log_3(20) \approx 5,4537$.

Aufgabe 2: Man löse die Gleichung $3 \cdot 4^{x-3} + 5 \cdot 7^{x-3} = 2^{2x-4}$.

Lösung 2
Hier gibt es verschiedene Möglichkeiten, die Gleichung zu lösen.

Erste Möglichkeit:

$$\begin{aligned}
3 \cdot 4^{x-3} + 5 \cdot 7^{x-3} &= 2^{2x-4} \qquad \Big|\ : 4^{x-3} \\
3 + \frac{5 \cdot 7^{x-3}}{4^{x-3}} &= \frac{(2^2)^{x-2}}{4^{x-3}} \\
3 + 5 \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^{x-3} &= \frac{4^{x-2}}{4^{x-3}} \\
3 + 5 \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^{x-3} &= 4^{x-2-(x-3)} \\
3 + 5 \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^{x-3} &= 4 \\
\left(\frac{7}{4}\right)^{x-3} &= \frac{1}{5} \\
(x-3) \ln\left(\frac{7}{4}\right) &= \ln\left(\frac{1}{5}\right) \\
x - 3 &= \frac{\ln(\frac{1}{5})}{\ln(\frac{7}{4})} \\
x &= \frac{\ln(\frac{1}{5})}{\ln(\frac{7}{4})} + 3
\end{aligned}$$

Zweite Möglichkeit:

$$\begin{aligned}
3 \cdot 4^{x-3} + 5 \cdot 7^{x-3} &= 2^{2x-4} \\
3 \cdot 4^{x-3} + 5 \cdot 7^{x-3} &= 4^{x-2} \\
3 \cdot 4^{x-3} + 5 \cdot 7^{x-3} &= 4 \cdot 4^{x-3} \\
5 \cdot 7^{x-3} &= 4^{x-3} \\
\frac{5 \cdot 7^x}{7^3} &= \frac{4^x}{4^3} \\
5 \cdot 4^3 \cdot 7^x &= 7^3 \cdot 4^x \\
\ln(5 \cdot 4^3) + x \cdot \ln(7) &= \ln(7^3) + x \cdot \ln(4) \\
x \cdot \big(\ln(7) - \ln(4)\big) &= \ln(7^3) - \ln(5 \cdot 4^3) \\
x &= \frac{\ln(343) - \ln(320)}{\ln(7) - \ln(4)} \\
x &= \frac{\ln(\frac{343}{320})}{\ln(\frac{7}{4})}
\end{aligned}$$

Nach beiden Möglichkeiten ergibt die nummerische Auswertung $x \approx 0,12403$.

Als kleines Nebenergebnis hat man hiermit auch noch gezeigt, dass $3 + \frac{\ln(\frac{1}{5})}{\ln(\frac{7}{4})} = \frac{\ln(343)-\ln(320)}{\ln(7)-\ln(4)}$ ist.

Aufgabe 3
Man löse die Gleichung $8^{2x-1} + 8^{2x+1} = 3^{3x-2} + 3^{3x+2}$.

Lösung 3

$$\begin{aligned}
8^{2x-1} + 8^{2x+1} &= 3^{3x-2} + 3^{3x+2} \\
8^{2x} \cdot 8^{-1} + 8^{2x} \cdot 8^{1} &= 3^{3x} \cdot 3^{-2} + 3^{3x} \cdot 3^{2} \\
8^{2x} \cdot (\frac{1}{8} + 8) &= 3^{3x} \cdot (\frac{1}{9} + 9) \\
\frac{8^{2x}}{3^{3x}} &= \frac{\frac{1}{9} + 9}{\frac{1}{8} + 8} \\
\left(\frac{64}{27}\right)^{x} &= \frac{82 \cdot 8}{65 \cdot 9} \qquad \text{(alternativ: } \left(\frac{4}{3}\right)^{3x} = \frac{82 \cdot 8}{65 \cdot 9} \text{)} \\
x \cdot \ln\left(\frac{64}{27}\right) &= \ln\left(\frac{656}{585}\right) \\
x &= \frac{\ln\left(\frac{656}{585}\right)}{\ln\left(\frac{64}{27}\right)} \\
x &\approx 0{,}1327
\end{aligned}$$

Aufgabe 4
Man löse die Gleichung $4^{x-1} - 9^{x} = 3^{2x-1} - 2^{2x+1}$.

Lösung 4

$$\begin{aligned}
4^{x-1} - 9^{x} &= 3^{2x-1} - 2^{2x+1} \\
4^{x-1} + 2^{2x+1} &= 3^{2x-1} + 9^{x} \\
2^{2x-2} + 2^{2x+1} &= 3^{2x-1} + 3^{2x} \\
2^{2x} \cdot (\frac{1}{4} + 2) &= 3^{2x} \cdot (\frac{1}{3} + 1) \\
\left(\frac{4}{9}\right)^{x} &= \frac{16}{27} \\
x \cdot \ln\left(\frac{4}{9}\right) &= \ln\left(\frac{16}{27}\right) \\
x &= \frac{\ln(\frac{16}{27})}{\ln(\frac{4}{9})} \\
x &\approx 0{,}6452
\end{aligned}$$

Aufgabe 5
Welche $x \in \mathbb{R}^{+}$ erfüllen die Gleichung $\frac{2^{(9^x)}}{8^{(3^x)}} = \frac{1}{4}$?

Lösung 5

$$\begin{aligned} \frac{2^{(9^x)}}{8^{(3^x)}} &= \frac{1}{4} \\ \frac{2^{(3^{2x})}}{2^{(3\cdot 3^x)}} &= 2^{-2} \\ 2^{3^{2x}-3\cdot 3^x} &= 2^{-2} \\ 3^{2x} - 3\cdot 3^x &= -2 \\ (3^x)^2 - 3\cdot 3^x + 2 &= 0 \end{aligned}$$

Die Substitution $z = 3^x$ liefert

$$\begin{aligned} z^2 - 3z + 2 &= 0 \\ (z-1)(z-2) &= 0 \\ z &= 1 \vee z = 2 \end{aligned}$$

Resubstitution ergibt

$$\begin{aligned} 3^x &= 1 \vee 3^x = 2 \\ x &= 0 \vee x = \log_3(2). \end{aligned}$$

Wegen $x \in \mathbb{R}^+$ kommt nur $x = \log_3(2)$ als Lösung in Betracht. Es ist $x = \frac{\ln(2)}{\ln(3)} \approx 0,6309$.

Aufgabe 6
Man löse die Gleichung $(3+2\sqrt{2})^x + (3-2\sqrt{2})^x = 34$.

Lösung 6
Man kann umformen: $3 \pm 2\sqrt{2} = 1^2 \pm 2\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = (1 \pm \sqrt{2})^2 = (1 \mp \sqrt{2})^{-2}$. Damit lässt sich die gegebene Gleichung umschreiben in

$$(1+\sqrt{2})^{2x} + (1+\sqrt{2})^{-2x} = 34.$$

Die Substitution $a = 1 + \sqrt{2}$ liefert

$$\begin{aligned} a^{2x} + a^{-2x} &= 34 \\ a^{4x} + 1 &= 34 \cdot a^{2x} \\ (a^{2x})^2 - 34 \cdot a^{2x} + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Erneute Substitution $y = a^{2x}$ ergibt

$$\begin{aligned} y^2 - 34y + 1 &= 0 \\ y = 17 + 12\sqrt{2} \quad &\vee \quad y = 17 - 12\sqrt{2} \end{aligned}$$

Wegen $17 \pm 12\sqrt{2} = 3^2 \pm 2\cdot 3\cdot 2\sqrt{2} + (2\sqrt{2})^2 = (3 \pm 2\sqrt{2})^2$ und den Resubstitutionen $a^{2x} = y$ und $1 + \sqrt{2} = a$ erhält man

$$\begin{aligned} (1+\sqrt{2})^{2x} = (3+2\sqrt{2})^2 \quad &\vee \quad (1+\sqrt{2})^{2x} = (3-2\sqrt{2})^2 \\ (1+\sqrt{2})^{x} = (1+\sqrt{2})^2 \quad &\vee \quad (1+\sqrt{2})^{x} = (1+\sqrt{2})^{-2} \\ x = 2 \quad &\vee \quad x = -2 \end{aligned}$$

Lösungsmenge ist $\mathcal{L} = \{2; -2\}$.

Anmerkung: Falls man 2 oder -2 schon durch Raten gefunden hätte, wäre man gezwungen nachzuweisen, dass diese beiden Zahlen die *einzigen* Lösungselemente der gegebenen Gleichung sind.

Aufgabe 7
Man löse die Exponentialgleichung $2^x + x = 5$.

Lösung 7 mittels der LAMBERTschen W-Funktion.

Vorbemerkung: Die LAMBERTsche W-Funktion ist Umkehrfunktion von $f = (x \mapsto x \cdot \mathrm{e}^x)$. Da die Funktion f auf dem Intervall $]-\infty, 0]$ nicht injektiv ist, besitzt die Lambertsche W-Funktion auf dem Intervall $[-\frac{1}{\mathrm{e}}; 0[$ zwei Funktionsäste $\mathrm{W}_0(x)$ und $\mathrm{W}_{-1}(x)$. Mit $\mathrm{W}(x)$ wird aber in der Regel der obere der Äste bezeichnet.
Da allgemein $\overset{-1}{f}(f(x)) = x$ sowie auch $f\big(\overset{-1}{f}(x)\big) = x$ gilt, so gilt für die W-Funktion

$$\boxed{\mathrm{W}(f(x)) = \mathrm{W}(x \cdot \mathrm{e}^x) = x.}$$

Man versucht nun, die gegebene Gleichung nach x aufzulösen und mit der W-Funktion in Verbindung zu bringen; das geschieht schrittweise:

$$\begin{aligned}
2^x &= 5 - x \\
\frac{2^x}{2^x} &= \frac{5-x}{2^x} \\
1 &= (5-x)2^{-x} \\
(-x+5) \cdot 2^{-x} \cdot 2^5 &= 2^5 \\
(-x+5) \cdot 2^{-x+5} &= 32 \\
(-x+5)\big(\mathrm{e}^{\ln(2)}\big)^{-x+5} &= 32 && \text{denn } 2 = \mathrm{e}^{\ln(2)} \\
(-x+5) \cdot \mathrm{e}^{\ln(2)(-x+5)} &= 32 \\
(-x+5) \cdot \ln(2) \cdot \mathrm{e}^{(-x+5)\ln(2)} &= 32 \cdot \ln(2) \\
\mathrm{W}\big((-x+5) \cdot \ln(2) \cdot \mathrm{e}^{(-x+5)\ln(2)}\big) &= \mathrm{W}\big(32 \cdot \ln(2)\big) \\
(-x+5)\ln(2) &= \mathrm{W}\big(32 \cdot \ln(2)\big) && \text{nach Definition von W; s.o.} \\
x &= 5 - \frac{\mathrm{W}\big(32 \cdot \ln(2)\big)}{\ln(2)}
\end{aligned}$$

Der Term auf der rechten Seite der letzten Gleichung kann nur numerisch approximativ berechnet werden, z.B. bei Wolfram|Alpha; dort findet man $x \approx 5 - \frac{\text{ProduktLog}(22.18071)}{0{,}693147} \approx 5 - \frac{2{,}2765582}{0{,}693147} \approx 5 - 3,284379 = 1,71562$.

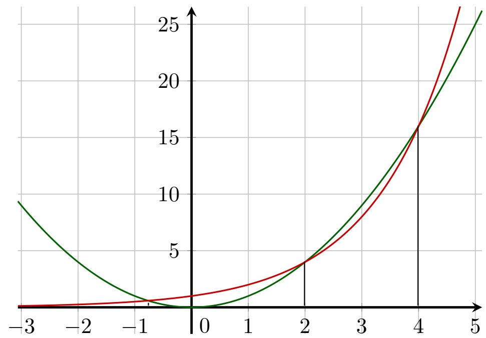
Aufgabe 8
Man löse die Exponentialgleichung $3^x + 3x = 3$.

Lösung 8
Analoges Vorgehen wie in Aufgabe 7 liefert $x = 1 - \frac{\mathrm{W}(\ln(3))}{\ln(3)}$ und als numerische Näherung $x \approx 0,452191$.

Aufgabe 9
Man löse die Exponentialgleichung $2^x = x^2$.

Lösung 9
Die nachstehende Graphik zeigt, dass die Graphen der Funktionen $x \mapsto 2^x$ (rot) und $x \mapsto x^2$ (schwarz) drei

gemeinsame Schnittpunkte aufweisen; daher muss die gegebene Gleichung eine drei-elementige Lösungsmenge besitzen.



Zwei Lösungselemente – nämlich 2 und 4 – erkennt man wohl sofort: $2^2 = 2^2$ und $2^4 = 4^2$. Wie kann man das dritte Lösungselement finden?

Zunächst hat man $2^x = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad |x| = 2^{\frac{x}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad x = 2^{\frac{x}{2}} \ \vee \ x = -2^{\frac{x}{2}}$. Daher wird jetzt eine Fallunterscheidung gemacht.

1. Fall: Sei $x > 0$. Wegen $2^0 = 1 \neq 0 = 0^2$ scheidet der Fall $x = 0$ aus.

$$\begin{aligned}
x^2 &= 2^x \\
2\ln(x) &= x\ln(2) \\
\frac{1}{x}\ln(x) &= \frac{1}{2}\ln(2) \\
\ln(x)\cdot \mathrm{e}^{\ln(\frac{1}{x})} &= \frac{1}{2}\ln(2) \\
-\ln(x)\cdot \mathrm{e}^{\ln(\frac{1}{x})} &= -\frac{1}{2}\ln(2) \\
\ln(\frac{1}{x})\cdot \mathrm{e}^{\ln(\frac{1}{x})} &= -\frac{1}{2}\ln(2) \\
\mathrm{W}\big(\ln(\frac{1}{x})\cdot \mathrm{e}^{\ln(\frac{1}{x})}\big) &= \mathrm{W}\big(\underbrace{-\frac{1}{2}\ln(2)}_{\in[-\frac{1}{\mathrm{e}};0[}\big) \\
\ln(\frac{1}{x}) &= \mathrm{W}\big(-\frac{1}{2}\ln(2)\big) \qquad \text{nach Definition von W} \\
\frac{1}{x} &= \mathrm{e}^{\mathrm{W}\left(-\frac{1}{2}\ln(2)\right)}
\end{aligned}$$

Es gilt auch $\ln(\frac{1}{4}) = \ln\big((\frac{1}{2})^2\big) = 2\ln(\frac{1}{2})$, also $\frac{1}{2}\ln(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}\ln(\frac{1}{4})$.

Da der Graph der W-Funktion im Bereich $[-\frac{1}{\mathrm{e}};0[$ aus zwei Ästen besteht, erhält man zwei Lösungen:

$$x = \mathrm{e}^{-\mathrm{W}_0\left(-\frac{1}{2}\ln(2)\right)} \quad \vee \quad x = \mathrm{e}^{-\mathrm{W}_{-1}\left(-\frac{1}{2}\ln(2)\right)}.$$

Wolfram|Alpha liefert $\mathrm{W}_0(-\frac{1}{2}\ln(2)) = \mathrm{ProductLog}(0, -0.346574) \approx -0,693150$, so dass $x \approx \mathrm{e}^{0,693150} \approx 2$

bzw. $\mathrm{W}_{-1}(-\frac{1}{2}\ln(2)) = \mathrm{ProductLog}(-1, -0.346574) \approx -1,38629$, so dass $x \approx \mathrm{e}^{1,38629} \approx 4$, Lösungen, die

schon eingangs bemerkt wurden.

Um das dritte Lösungselement zu finden, betrachten wir jetzt den

2. Fall: Sei $x < 0$. Dann gilt $|x| = -x$.

$$\begin{aligned} 2\ln(-x) &= x\ln(2) \\ \frac{1}{x}\ln(-x) &= \frac{1}{2}\ln(2) \\ -\frac{1}{x}\ln(-x) &= -\frac{1}{2}\ln(2) \end{aligned}$$

Nun ist $-\frac{1}{x} = \mathrm{e}^{\ln(-\frac{1}{x})} = \mathrm{e}^{\ln(-x^{-1})} = \mathrm{e}^{-\ln(-x)}$, damit weiter

$$\begin{aligned} \ln(-x)\mathrm{e}^{-\ln(-x)} &= -\frac{1}{2}\ln(2) \\ -\ln(-x)\mathrm{e}^{-\ln(-x)} &= \frac{1}{2}\ln(2) \\ \mathrm{W}\big(-\ln(-x)\mathrm{e}^{-\ln(-x)}\big) &= \mathrm{W}\big(\frac{1}{2}\ln(2)\big) \\ -\ln(-x) &= \mathrm{W}\big(\frac{1}{2}\ln(2)\big) \qquad \text{nach Definition von W} \\ \ln(-x) &= -\mathrm{W}\big(\frac{1}{2}\ln(2)\big) \\ -x &= \mathrm{e}^{-\mathrm{W}\left(\frac{1}{2}\ln(2)\right)} \\ x &= -\mathrm{e}^{-\mathrm{W}\left(\frac{1}{2}\ln(2)\right)} \end{aligned}$$

und Wolfram$\big|$Alpha liefert $x \approx -0,766666$.

Probe zeigt: $2^{-0,766666} \approx 0,587774 \approx 0,587777 \approx (-0,766666)^2$.

Aufgabe 10
Man löse die Exponentialgleichung $x^3 = 3^x$.

Lösung 10
Die Graphen von $x \mapsto x^3$ und $x \mapsto 3^x$ haben genau zwei gemeinsame Schnittpunkte; die gegebene Gleichung muss also zwei verschiedene Lösungen besitzen.
Eine Lösung fällt sofort ins Auge, nämlich $x = 3$; denn $3^3 = 27 = 3^3$.
Gesucht ist die zweite Lösung. Wegen $0^3 = 0 \neq 1 = 3^0$ kommt $x = 0$ nicht in Betracht. Umformungen liefern

$$\begin{aligned} x^3 &= 3^x \\ (x^3)^{\frac{1}{3}} &= (3^x)^{\frac{1}{3}} \\ x &= 3^{\frac{x}{3}} \\ x^{\frac{1}{x}} &= (3^{\frac{x}{3}})^{\frac{1}{x}} \\ \frac{1}{x}\cdot\ln(x) &= \frac{1}{3}\cdot\ln(3) \end{aligned}$$

Mit der Substitution $u = \ln(x)$ ergibt sich $x = \mathrm{e}^u$ und damit weiter

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathrm{e}^u}\cdot u &= \frac{1}{3}\cdot\ln(3) \\ \mathrm{e}^{-u}\cdot u &= \frac{1}{3}\cdot\ln(3) \\ -u\cdot\mathrm{e}^{-u} &= -\frac{1}{3}\cdot\ln(3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{W}(-u \cdot \mathrm{e}^{-u}) &= \mathrm{W}(-\frac{1}{3} \cdot \ln(3)) \\ u &= -\mathrm{W}(-\frac{1}{3} \cdot \ln(3)) \end{aligned}$$

Nach Resubstitution $\ln(x) = u$ geht es nun weiter mit

$$\begin{aligned} \ln(x) &= -\mathrm{W}(-\frac{1}{3} \cdot \ln(3)) \\ x &= \mathrm{e}^{-\mathrm{W}(-\frac{1}{3} \cdot \ln(3))} \end{aligned}$$

Numerisch approximativ findet man (z. B. bei Wolfram|Alpha) zwei Lösungen, da $-\frac{1}{3} \cdot \ln(3) \in [-\frac{1}{\mathrm{e}}; 0[$ und der Graph von W in diesem Bereich aus zwei Ästen besteht:

$$\begin{aligned} \mathrm{W}_0(-\frac{1}{3} \cdot \ln(3)) &= \text{ProductLog}(0, -\frac{1}{3} \cdot \ln(3)) \approx \text{ProductLog}(0, -0.366204) \approx -0,907470 \\ \mathrm{W}_{-1}(-\frac{1}{3} \cdot \ln(3)) &= \text{ProductLog}(-1, -\frac{1}{3} \cdot \ln(3)) \approx \text{ProductLog}(-1, -0.366204) \approx -1,098615 \end{aligned}$$

und damit schließlich $x \approx \mathrm{e}^{0,907470} \approx 2,47805268$ bzw. $x \approx \mathrm{e}^{1,098615} \approx 3$, wobei letztere Lösung schon eingangs erkannt war.

Probe für den erstgenannten x-Wert zeigt: $2,47805268^3 \approx 15,21708981 \approx 15,21708982 \approx 3^{2,47805268}$.