Geometrische Lehrsätze

Μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω μοῦ τὴν στέγην.
(PLATON, 427 - 347 v. Chr.)

Bezeichnungen

(AB)	Gerade durch die Punkte A und B
$[AB$	Halbgerade oder Strahl mit dem Anfangspunkt A und durch B gehend (also $[AB \neq [BA$)
AB	Strecke mit den Endpunkten A und B ($AB = BA$)
$\|AB\|$ oder $\overline{AB}$	Länge der Strecke AB
$\angle BAC$	durch Drehung (im positiven Sinn) von $[AB$ auf $[AC$ um den Scheitelpunkt A überstrichener Winkel (also $\angle BAC \neq \angle CAB$)
$w(BAC)$ oder $\|\angle BAC\|$	Weite (oder Größe) des Winkels $\angle BAC$; dann $w(CAB) = 360\,° - w(BAC)$
$\overset{\frown}{AB}$	Kreisbogen, der relativ zum Zentrum von A nach B im positiven Sinn durchlaufen wird (also $\overset{\frown}{AB} \neq \overset{\frown}{BA}$)
$\triangle ABC$	Dreieck mit den Eckpunkten A, B und C ($\triangle ABC = \triangle BCA = \triangle CAB$)

Kreislehre

Definition
Unter dem *Kreis* $k(M;r)$ versteht man die Menge aller Punkte, die von einem fest gewählten Punkt, dem so genannten *Mittelpunkt M*, den gleichen Abstand haben. Die Verbindungsstrecke irgendeines Punktes P des Kreises mit dem Mittelpunkt M heißt *Halbmesser*, und die allen Halbmessern desselben Kreises gemeinsame Länge heißt *Radius*. Jede durch den Mittelpunkt des Kreises verlaufende *Sehne* (Verbindungsstrecke zweier verschiedener Kreispunkte) heißt *Durchmesser* des Kreises.
(Üblicherweise wird „Radius“ auch als Wort für „Halbmesser“ benutzt; dann muss aus dem Zusammenhang erschlossen werden, ob eine Strecke oder deren Länge gemeint ist.)

Kreis und Gerade
Eine Gerade t durch einen Punkte $B \in k(M;r)$ heißt genau dann *Tangente* („Berührgerade“), wenn $t \perp MB$ ist, d. h. wenn die Gerade und der zugehörige *Berührhalbmesser* orthogonal („senkrecht“) sind. B heißt dann der *Berührpunkt* von Kreis und Tangente.
Eine Gerade, die einen Kreis in zwei verschiedenen Punkten schneidet, heißt *Sekante* des Kreises. Verläuft die Gerade außerdem durch den Mittelpunkt des Kreises, so heißt sie *Zentrale* des Kreises.
Eine außerhalb eines Kreises gelegene Gerade, die den Kreis weder schneidet noch berührt, heißt *Passante* des Kreises.

Satz 1
Ein Kreis und eine Gerade haben höchstens zwei Punkte gemeinsam.

Satz 2
Die Zentrale halbiert den Winkel zwischen den beiden Tangenten, die von einem außerhalb gelegenen Punkt S an den Kreis gelegt werden können.
Für die von diesem Punkt S an den Kreis gelegten Tangenten sind die Tangentenabschnitte zwischen dem jeweiligen Berührpunkt und dem Tangentenschnittpunkt S gleich lang.
Die Sehne zwischen den Berührpunkten zweier von S an den Kreis gelegten Tangenten, die *Berührungssehne*, wird von der auf dieser Sehne senkrecht stehenden Zentrale halbiert.

Kongruenzsätze

Der mathematische Fachausdruck für „deckungsgleich“ heißt *kongruent*.

Erster Kongruenzsatz SSS
Wenn in zwei Dreiecken entsprechende Seiten gleich lang sind, dann sind die Dreiecke kongruent.

Zweiter Kongruenzsatz SWS
Wenn zwei Dreiecke in der Länge zweier Seiten und in der Weite desjenigen Winkels übereinstimmen, der von den beiden

Seiten eingeschlossen wird, so sind die Dreiecke kongruent.

Dritter Kongruenzsatz WSW **bzw.** SWW
Wenn zwei Dreiecke in der Länge einer Seite und in der Weite zweier gleichliegender Winkel übereinstimmen, so sind die Dreiecke kongruent.

Vierter Kongruenzsatz SSW_g
Wenn zwei Dreiecke in der Länge zweier ihrer Seiten übereinstimmen und in der Weite desjenigen Winkels, der der längeren Seite gegenüberliegt, so sind die Dreiecke kongruent.

Das Seitenmittendreieck

Definition
Verbindet man in einem Dreieck jeweils die Mittelpunkte zweier Seiten miteinander, so erhält man das *Seitenmittendreieck*.

Satz 1
Wenn man in einem Dreieck die Mittelpunkte zweier Seiten miteinander verbindet, so ist die Verbindungsstrecke parallel zur dritten Seite des Dreiecks und halb so lang wie diese.

Satz 2
Das Seitenmittendreieck zerlegt ein Dreieck in vier kongruente Teildreiecke. Sein Flächeninhalt beträgt ein Viertel des Flächeninhaltes des ursprünglichen Dreiecks.

Besondere Punkte und Linien im Dreieck

Definition
In einem rechtwinkligen Dreieck heißt die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite *Hypotenuse*, und die auf den Schenkeln des rechten Winkels gelegenen Dreieckseiten heißen *Katheten*.
Zusatz: Die Hypotenuse ist die längste Seite in einem rechtwinkligen Dreieck.

Die Mittelsenkrechten und der Umkreismittelpunkt U
Die drei *Mittelsenkrechten* eines Dreiecks schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt U, der von den Ecken gleich weit entfernt und deshalb der Mittelpunkt des *Umkreises* des Dreiecks ist.
Bei spitzwinkligen Dreiecken liegt U innerhalb, bei stumpfwinkligen Dreiecken außerhalb des Dreiecks; bei rechtwinkligen Dreiecken ist U der Mittelpunkt der längsten Seite (Hypotenuse).

Die Winkelhalbierenden und der Inkreismittelpunkt I
Die drei *Winkelhalbierenden* eines Dreiecks schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt I, der von jeder der drei Seiten des Dreiecks den gleichen Abstand hat und deshalb der Mittelpunkt des *Inkreises* des Dreiecks ist.
Der Inkreis berührt die drei Seiten des Dreiecks.
Jede der Winkelhalbierenden eines Dreiecks teilt die ihr gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten.

Die Seitenhalbierende und der Schwerpunkt
Verbindet man die drei Seitenmitten eines Dreiecks jeweils mit den gegenüberliegenden Eckpunkten, so erhält man die drei *Seitenhalbierenden* (auch *Schwerelinien* genannt); diese schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt S.
Unterstützt man ein Dreieck genau im Punkt S, so führt das Dreieck unter dem alleinigen Einfluss der Schwerkraft weder eine Dreh- noch eine Fortbewegung aus, d. h. das Dreieck ist „im Gleichgewicht“; deshalb heißt S der *Schwerpunkt* des Dreiecks.
Der Schwerpunkt S teilt jede der drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks im Verhältnis $2:1$.

Die Höhen und der Höhenschnittpunkt
Zeichnet man in einem Dreieck die Senkrechten zu den drei Seiten (oder evtl. deren Verlängerungen) durch den jeweils gegenüberliegenden Eckpunkt, so nennt man die Strecke auf der Senkrechten zwischen dem Eckpunkt und der gegenüberliegenden Geraden *Höhe* des Dreiecks. (Auch die Länge dieser Strecke wird Höhe genannt.) Die drei Höhen schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt, dem *Höhenschnittpunkt* des Dreiecks.
In stumpfwinkligen Dreiecken liegen zwei der drei Höhen außerhalb des Dreiecks; in rechtwinkligen Dreiecken fallen zwei

der drei Höhen mit zwei Seiten (Katheten) zusammen.

Viereckslehre

Definition
Die Verbindungsstrecke zweier gegenüberliegender Eckpunkte eines Vierecks wird *Diagonale* genannt.
Verläuft eine der beiden Diagonalen außerhalb des Vierecks, so heißt das Viereck *konkav*; liegen beide Diagonalen innerhalb des Vierecks, so heißt das Viereck *konvex*.

Konstruktion von Vierecken
Ein Viereck kann durch 5 Stücke (Seiten, Winkel, Diagonalen) festgelegt werden, so dass die restlichen Stücke dadurch bereits eindeutig mitbestimmt sind.

Punktsymmetrische Vierecke
Wenn sich in einem Viereck die Diagonalen halbieren, so sind die Gegenseiten jeweils parallel und gleich lang.

Da Vierecke mit jeweils parallelen Gegenseiten *Parallelogramme* heißen, kann man den vorstehenden Satz auch so formulieren: Alle punktsymmetrischen Vierecke sind Parallelogramme.

Sonderfälle: *Rechteck:* gleichwinkliges Viereck
Raute: gleichseitiges Viereck
Quadrat: gleichseitiges, gleichwinkliges Viereck

Vierecke mit parallelen Gegenseiten
Jedes Parallelogramm ist punktsymmetrisch zum Schnittpunkt der Diagonalen; insbesondere halbieren sich die Diagonalen gegenseitig.

Kreis und Viereck

Definition
Liegen die Seiten eines Vierecks auf einem Kreis (Umkreis), so ist jede Seite eine Sehne; solche Vierecke heißen deshalb *Sehnenvierecke*.

Satz über das Sehnenviereck
In jedem Sehnenviereck ergeben die Weiten gegenüberliegender Winkel zusammen $180\,^\circ$. (Sehnenvierecke sind stets konvex.)

Umkehrung des Satzes über das Sehnenviereck
Ergänzen sich in einem konvexen Viereck die Weiten gegenüber liegender Winkel zu $180\,^\circ$, so ist das Viereck ein Sehnenviereck.

Definition
Besitzt ein Viereck einen Inkreis, so sind die Seiten des Vierecks Tangenten an diesen Kreis; deshalb heißt ein solches Viereck auch *Tangentenviereck*.

Satz von Henri Pitot
In einem Tangentenviereck sind die beiden Summen der Längen gegenüberliegender Seiten gleich groß: $|AB| + |CD| = |BC| + |AD|$.
Es gilt auch die Umkehrung dieses Satzes.

Satz über Sehnen-Tangenten-Vierecke
Ein Tangentenviereck besitzt einen Inkreis genau dann, wenn sich die Verbindungsstrecken von einander gegenüberliegenden Tangenten-Berührpunkten senkrecht schneiden.

Winkelsätze am Kreis

Definition
a) Verbindet man die Endpunkte einer Sehne mit dem Mittelpunkt M eines Kreises, so heißt der Winkel bei M *Mittelpunktswinkel* (oder *Zentriwinkel*).
b) Der spitze Winkel, der von einer Sehne eines Kreises und der Tangente in einem Endpunkt der Sehne gebildet wird, heißt *Sehnentangentenwinkel*:

Satz 1
Der Sehnentangentenwinkel ist halb so weit wie der zur Sehne gehörende Mittelpunktswinkel.

Satz 2
In jedem Tangentenviereck ist die Gesamtlänge zweier Gegenseiten gleich der Gesamtlänge der beiden anderen Seiten.

Definition
Verbindet man die Endpunkte einer Kreissehne mit einem beliebigen Punkt P der Kreislinie, so heißt der Winkel bei P *Umfangswinkel* (oder *Peripheriewinkel*).

Satz 3 (Peripheriewinkelsatz oder Umfangswinkelsatz)
In einem Kreis sind alle Peripheriewinkel (in derselben Halbebene) über demselben Bogen gleich weit, und zwar halb so weit wie der Zentriwinkel (Mittelpunktswinkel) über demselben Bogen.

Satz 3a (Satz des THALES)
Jeder Umfangswinkel über dem Durchmesser eines Kreises ist ein rechter Winkel.

Satz 3b (Umkehrung des Satzes des THALES)
Der Mittelpunkt des Umkreises eines rechtwinkligen Dreiecks ist der Mittelpunkt der Hypotenuse; anders formuliert: Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist ein Durchmesser des Umkreises.

Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes
Werden über einer Strecke AB die Punkte C und D so gewählt, dass sie in derselben Halbebene über AB liegen und $w(ACB) = w(ADB)$ gilt, so liegen die Punkte A, B, C und D auf einem gemeinsamen Kreis.

Satz 4
Jeder Umfangswinkel auf einem Kreisbogen ist halb so weit wie der zum Restbogen gehörende Mittelpunktswinkel.

Satz 5
Umfangswinkel auf verschiedenen Seiten einer Sehne eines Kreises ergänzen sich zu $180\,^\circ$, d. h. zu einem *gestreckten* Winkel.

Sätze über Sehnen, Sekanten und Tangenten

Sehnensatz
Schneiden sich in einem Kreis zwei Sehnen, so ist das Produkt der Längen der Abschnitte der einen Sehne gleich dem Produkt der Längen der Abschnitte der anderen Sehne.

Umkehrung des Sehnensatzes
Wenn für die Diagonalen AC und BD eines konvexen Vierecks $ABCD$ mit dem Diagonalenschnittpunkt S die Gleichung $|AS| \cdot |CS| = |BS| \cdot |DS|$ gilt, so besitzt das Viereck einen Umkreis, d. h. es ist ein Sehnenviereck.

Sekantensatz
Schneiden sich zwei Sekanten eines Kreises in einem Punkt S außerhalb des Kreises, so ist das Produkt der jeweils von S bis zum Schnittpunkt von Kreis und Sekante ausgehenden Abschnittlängen auf beiden Sekanten gleich groß.

Umkehrung des Sekantensatzes
Liegen die Punkte A_1 und A_2 auf einem Strahl s_1 und die Punkte B_1 und B_2 auf einem Strahl s_2, wobei s_1 und s_2 nicht in

einer gemeinsamen Geraden liegen aber sich in einem Punkt S schneiden, so folgt aus $|SA_1| \cdot |SA_2| = |SB_1| \cdot |SB_2|$, dass A_1, A_2, B_1, B_2 auf einem gemeinsamen Kreis liegen. ($A_1A_2B_2B_1$ ist also dann ein Sehnenviereck.)

Sekanten-Tangenten-Satz
Wenn sich eine Sekante und eine Tangente eines Kreises außerhalb des Kreises in einem Punkt S schneiden, so ist das Produkt beider von S ausgehender Sekantenabschnittlängen gleich dem Quadrat der Länge des Tangentenabschnitts (zwischen S und dem Berührpunkt von Tangente und Kreis).

Potenzsatz
Wird von einem Punkt S außerhalb eines Kreises $k(M;r)$ mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r eine Sekante zum Kreis gezeichnet, die den Kreis der Reihe nach in den Punkten A und B schneidet, so gilt: $|SA| \cdot |SB| = |MS|^2 - r^2$.
($|MS|^2 - r^2$ heißt *Potenz von S bzgl. k*)

Flächenberechnung

Axiom 1
Zueinander kongruente geschlossene Figuren haben denselben Flächeninhalt.

Axiom 2
Zerlegt man eine Figur in mehrere Teilfiguren, so ist die Summe der Flächeninhalte der Teilfiguren gleich dem Flächeninhalt der Gesamtfigur.

Axiom 3
Setzt man mehrere Figuren so zu einer Gesamtfigur zusammen, dass sie sich nicht überdecken, so ist der Flächeninhalt der Gesamtfigur gleich der Summe der Flächeninhalte der einzelnen Figuren.

Definition
Wird eine Figur in eine andere Figur überführt, die den gleichen Flächeninhalt hat, so sagt man: die Figur wird *verwandelt*.

Flächen- und Rauminhalte

Flächeninhalt des Rechtecks
Haben die Seitenlängen eines Rechtecks, gemessen in derselben Längeneinheit, die Maßzahlen a und b, so hat der Flächeninhalt bezüglich der entsprechenden Flächeneinheit die Maßzahl $\mathcal{A} = a \cdot b$.

Flächeninhalt des Parallelogramms
Misst man beim Parallelogramm die Länge a (oder b) einer Seite und der zugehörigen Höhe h_a (bzw. h_b) in derselben Längeneinheit, so gilt für den Flächeninhalt $\mathcal{A} = a \cdot h_a$ (bzw. $\mathcal{A} = b \cdot h_b$).

Flächeninhalt des Dreiecks
Misst man bei einem Dreieck die Länge a (oder b oder c) einer Seite und der zugehörigen Höhe h_a (bzw. h_b bzw. h_c) in derselben Längeneinheit, so gilt für den Flächeninhalt $\mathcal{A} = \frac{1}{2}a \cdot h_a$ (bzw. $\mathcal{A} = \frac{1}{2}b \cdot h_b$ bzw. $\mathcal{A} = \frac{1}{2}c \cdot h_c$).

Satz
Parallelogramme bzw. Dreiecke, die in einer Seite und der dazu gehörigen Höhe übereinstimmen, sind flächengleich.

Flächeninhalt des Trapezes
Misst man bei einem Trapez die Längen a und c der beiden parallelen Seiten und die zugehörige Höhe h in derselben Längeneinheit, so gilt für den Flächeninhalt $\mathcal{A} = \frac{1}{2}(a + c) \cdot h$.
Verbindet man die Mittelpunkte der Schenkel des Trapezes, so ist die Länge m dieser *Mittellinie* gegeben durch $m = \frac{1}{2}(a+c)$, so dass für den Flächeninhalt des Trapezes auch gilt $\mathcal{A} = m \cdot h$.

Flächeninhalt des symmetrischen Drachens
Misst man bei einem symmetrischen Drachen die Längen e und f der Diagonalen in derselben Längeneinheit, so gilt für den Flächeninhalt $\mathcal{A} = \frac{1}{2}e \cdot f$.

Rauminhalt des Prismas
Misst man bei einem Prisma den Flächeninhalt G der Grundfläche und die Höhe h in entsprechenden Einheiten, so gilt für den Rauminhalt (das Volumen) $\mathcal{V} = G \cdot h$.

Quader sind besondere Prismen, und *Würfel* sind besondere Quader. Aus der vorstehenden Aussage ergibt sich deshalb sofort:
Misst man die Kantenlängen a, b, c eines Quaders in derselben Längeneinheit, so gilt für den Rauminhalt (das Volumen) $\mathcal{V} = a \cdot b \cdot c$.
Misst man die Kantenlänge a eines Würfels, so gilt für den Rauminhalt $\mathcal{V} = a^2$.