

Umgang mit komplexen Zahlen

Komplexe Zahlen lassen sich in verschiedener Weise darstellen:

1. *Summendarstellung* oder *algebraische Form*: $z = a + bi = \Re(z) + \Im(z) \cdot i$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $i^2 = -1$; man nennt $\Re(z)$ den *Realteil* von z und $\Im(z)$ den *Imaginärteil* von z .

2. *Trigonometrische* oder *Polarform*: $z = r(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$ mit $r = |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$;

dabei $\bar{z} = a - bi$ („konjugiert-komplexe“ Zahl z) und $a = r \cdot \cos(\varphi)$, $b = r \cdot \sin(\varphi)$ und

$\varphi = \arctan(\frac{b}{a} + k \cdot \pi)$, wobei $-\frac{\pi}{2} < \arctan(\frac{b}{a}) < \frac{\pi}{2}$ und $k \in \mathbb{Z}$; $\varphi_0 = \arctan(\frac{b}{a})$ ($a \neq 0$) heißt *Hauptwert*

von φ .

3. *Betrag-Winkel-Darstellung* oder *Exponentialform*: $z = r \cdot e^{i\varphi}$.

Zwei Beispiele sollen zeigen, wie man jeweils eine dieser Darstellungen in eine der anderen beiden umformt.

1.) Gegeben sei $z = 2 + 2\sqrt{3} \cdot i$. Es ist $r = |z| = \sqrt{(2 + 2\sqrt{3} \cdot i)(2 - 2\sqrt{3} \cdot i)} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = 4$ und

$\varphi = \arctan(\frac{2\sqrt{3}}{2}) = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} \cdot i$ (entspricht im Gradmaß 60°), so dass

$$z = 2 + 2\sqrt{3} \cdot i = 4 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot i \right).$$

Man rechnet nach: $(\cos(\frac{\pi}{3}))^2 + (\sin(\frac{\pi}{3}))^2 = (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2}\sqrt{3})^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$.

Nach der EULER-Gleichung $r \cdot e^{i\varphi} = r(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$ hat man sofort auch

$$z = 2 + 2\sqrt{3} \cdot i = 4 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

2.) Gegeben sei $z = 3 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$. Dann ist

$$z = 3 \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot i \right) = 3 \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot i \right) = \frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{3}{2}\sqrt{2} \cdot i = \frac{3}{2}\sqrt{2} \cdot (1 + i)$$

und man prüft sofort nach, dass

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{2} + \frac{9}{2}} = \sqrt{9} = 3.$$

Hinsichtlich der Addition, Subtraktion, Multiplikation und (unter Einschränkung) Division gelten für komplexe Zahlen die gleichen Rechengesetze wie für reelle Zahlen. Das Potenzieren mit ganzzahligen Exponenten n geschieht nach der Formel von DE MOIVRE (Spezialfall der EULER-Gleichung):

$$z^n = r^n \cdot (e^{i\varphi})^n = r^n \cdot e^{i \cdot n\varphi} = r^n (\cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi)).$$

Für das Radizieren sind gewisse Einschränkungen zu treffen. Im Reellen wird definiert:

\sqrt{a} ist diejenige nicht-negative reelle Zahl b , für die gilt: $b^2 = a$.

Im Bereich der komplexen Zahlen wird definiert:

$$\sqrt{z} \text{ ist diejenige komplexe Zahl } w, \text{ für die gilt: } w^2 = z \wedge \Re(w) \geq 0 \wedge (\Re(w) = 0 \Rightarrow \Im(w) \geq 0).$$

Beispiele:

1.) $\sqrt{5 - 12i} = 3 - 2i$; denn $(3 - 2i)^2 = 5 - 12i$ und $\Re(3 - 2i) = 3 > 0$.

2.) $\sqrt{-9} = 3i$; denn $(3i)^2 = -9$ und $\Im(3i) = 3 \geq 0$.

Dagegen ist $\sqrt{-9} = -3i$ falsch, obwohl auch $(-3i)^2 = -9$; aber jetzt ist $i(-3i) = -3 < 0$.
(Man beachte: Hier wurde -9 als komplexe Zahl $-9 + 0 \cdot i$ aufgefasst; im Reellen ist $\sqrt{-9}$ nicht definiert!)

Im Komplexen hat man so zu rechnen: $\sqrt{-9} = \sqrt{9i^2} = \sqrt{9}\sqrt{i^2} = 3i$. Die Gleichung $z^2 + 9 = 0$ hat zwar die Lösungsmenge $\{3i; -3i\}$, aber wie soeben gezeigt, kommt für $\sqrt{-9}$ nur $3i$ in Betracht.

Man fragt sich natürlich, wie man die (Quadrat-)Wurzel aus einer komplexen Zahl bzw. die Lösungsmenge einer Gleichung $z^2 = a + bi$ finden kann.

Die beiden Lösungen der Gleichung $z^2 = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$) lassen sich mit *reellen* (!) Quadratwurzeln so schreiben ($z = u + iv$; s. o.):

$$\begin{aligned} z_k &= (-1)^k \left(\sqrt{\frac{1}{2} (\sqrt{a^2 + b^2} + a)} + i \cdot \text{sign}(b) \cdot \sqrt{\frac{1}{2} (\sqrt{a^2 + b^2} - a)} \right), \quad (k = 0; 1) \\ &= (-1)^k \left(\sqrt{\frac{1}{2} (|z_k| + \Re(z_k))} + i \cdot \text{sign}(\Im(z_k)) \cdot \sqrt{\frac{1}{2} (|z_k| - \Re(z_k))} \right) \end{aligned}$$

hierbei ist die sign-Funktion – abweichend von der sonst üblichen Definition! – so definiert (s. u. Beispiel 3):

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} +1, & \text{falls } x \geq 0 \\ -1, & \text{falls } x < 0 \end{cases} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Nur dasjenige der beiden Lösungselemente z_k liefert die Wurzel $\sqrt{a + bi}$, das die oben genannten Bedingungen $z_k^2 = a + bi \wedge \Re(z_k) \geq 0 \wedge (\Re(z_k) = 0 \Rightarrow \Im(z_k) \geq 0)$ erfüllt.

Beispiel

Gesucht sei $\sqrt{-3 + i}$. – Hier ist $a = -3$, $b = 1$, und die Gleichung $z^2 = -3 + i$ hat die Lösungen

$$z_1 = -\sqrt{\frac{1}{2} (\sqrt{10} - 3)} - i \cdot \sqrt{\frac{1}{2} (\sqrt{10} + 3)}, \quad z_2 = \sqrt{\frac{1}{2} (\sqrt{10} - 3)} + i \cdot \sqrt{\frac{1}{2} (\sqrt{10} + 3)},$$

und da nur z_2 die Bedingung $\Re(z_2) \geq 0$ erfüllt, so gilt $\sqrt{-3 + i} = \sqrt{\frac{1}{2} (\sqrt{10} - 3)} + i \cdot \sqrt{\frac{1}{2} (\sqrt{10} + 3)}$.

Die Umformung

$$i = \frac{1}{2} \cdot 2i = \frac{1}{2}(1 + 2i - 1) = \frac{1}{2}(1 + 2i + i^2) = \frac{1}{2}(1 + i)^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot (1 + i) \right)^2$$

liefert

$$\sqrt{i} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot (1 + i) \quad \text{oder} \quad \sqrt{i} = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot (1 + i),$$

wobei der zweite Fall wegen $\Re(\sqrt{i}) < 0$ entfällt.

Einsetzung von $\varphi = \frac{\pi}{2}$ bzw. $\varphi = \frac{\pi}{4}$ in die Gleichung $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$ liefert weitere „schöne“ Darstellungen:

$$i = 0 + i \cdot 1 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{i \cdot \frac{\pi}{2}} \quad \text{und} \quad \sqrt{i} = i^{\frac{1}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{i \cdot \frac{\pi}{4}}.$$

Durch Potenzieren mit i erhält man noch

$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}} \quad \text{oder so:} \quad i^i = \sqrt{\frac{1}{e^{\pi}}}.$$

Bemerkung zu holomorphen Funktionen

Für eine in einem Gebiet D holomorphe Funktion f , d. h. für eine in jedem Punkt von D komplex-differenzierbare Funktion f gilt die Gleichung

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

wobei die reellen Funktionen u und v den CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

genügen. Mittels dieser Gleichungen kann man eine der Funktionen bis auf eine Integrationskonstante finden, wenn die andere bekannt ist.

Sei z. B. $u(x, y)$ gegeben; dann erhält man

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{\partial u}{\partial x} dy.$$

Beispiel

Die holomorphe Funktion f werde unter folgenden Bedingungen bestimmt:

$$u(x, y) = x^2 - y^2 + xy, \quad f(0) = 0.$$

Es ist $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y - x$ und $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y$. Durch Integration der CAUCHY-RIEMANNschen Gleichungen erhält man hier

$$v = \int \frac{\partial v}{\partial x} dx = - \int \frac{\partial u}{\partial y} dx = \int (2y - x) dx = 2xy - \frac{1}{2}x^2 + \Psi(y)$$

$$v = \int \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int \frac{\partial u}{\partial x} dy = \int (2x + y) dy = 2xy + \frac{1}{2}y^2 + \Phi(x)$$

mit $\Phi(x) = 2xy - \frac{1}{2}x^2 + C$ und $\Psi(y) = \frac{1}{2}y^2 + C$, wobei C eine beliebige reelle Konstante ist. Setzt man $C = 0$, so ist

$$v(x, y) = \Phi(x) + \Psi(y) = 2xy + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 = 2xy - \frac{1}{2}(x^2 - y^2).$$

Man erhält so (mit $z = x + iy$)

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x, y) + iv(x, y) = (x^2 - y^2 + xy) + i(2xy - \frac{1}{2}(x^2 - y^2)) \\ &= x^2 - y^2 + xy + 2ixy - \frac{1}{2}ix^2 + \frac{1}{2}iy^2 \\ &= (x^2 + 2ixy - y^2) + xy - \frac{1}{2}ix^2 + \frac{1}{2}iy^2 \\ &= (x + iy)^2 - \frac{1}{2}i \cdot 2ixy - \frac{1}{2}ix^2 + \frac{1}{2}iy^2 \\ &= (x + iy)^2 - \frac{1}{2}i(x^2 + 2ixy - y^2) \\ &= (x + iy)^2 - \frac{1}{2}i(x + iy)^2 \\ &= z^2 - \frac{1}{2}iz^2 \\ &= \frac{1}{2}(2 - i)z^2, \end{aligned}$$

und f erfüllt auch die Bedingung $f(0) = 0$.