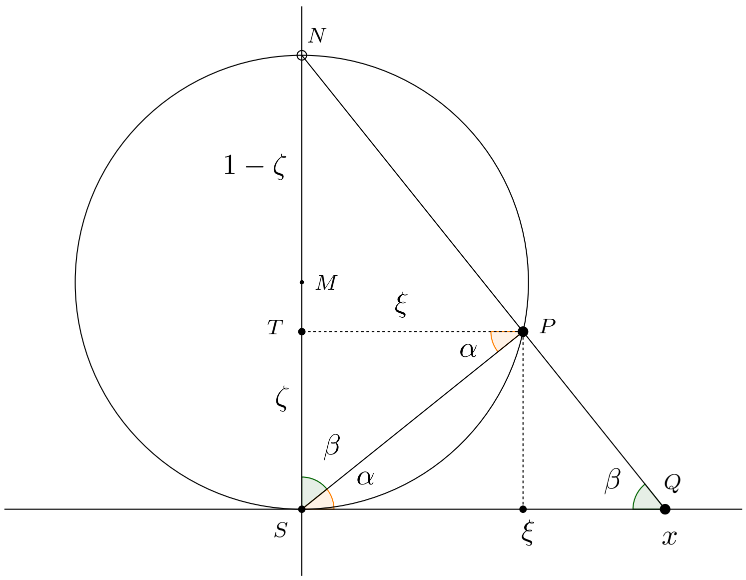
Bijektion zwischen Zahlenkreis und Zahlengerade



Der Kreis in nebenstehender Figur habe den Radius $\frac{1}{2}$ und im ξ-ζ-Koordinatensystem den Mittelpunkt $M = (0; \frac{1}{2})$, außerdem sei er im Punkt N *punktiert*, d. h. N ist kein Punkt der Kreislinie; betrachtet wird also die Punktmenge $\{(\xi;\zeta) \,|\, (\xi;\zeta) \neq (0;1) \wedge \xi^2 + (\zeta - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}\}$. Von N geht ein Projektionsstrahl aus, der den Kreis im Punkt $P = (\xi;\zeta)$ schneidet und die ξ-Achse, die zugleich als x-Achse dienen soll, im Punkt $Q = (x)$ trifft. Durch eine solche Projektion wird eine Beziehung zwischen den Punkten des (punktierten) Zahlenkreises und der Zahlengeraden hergestellt. Gesucht sind Abbildungsgleichungen, durch die diese Beziehung beschrieben wird.

Der Punkt P liegt auf dem THALES-Kreis über der Strecke SN, so dass die Strecke SP senkrecht auf der Strecke QN steht. Es ist $PT \parallel QS$ und $|SN| = 1$, $|ST| = \zeta$, $|NT| = 1 - \zeta$, $|PT| = \xi$, $|QS| = x$ und $|\angle QSP| = |\angle TPS| = \alpha$ und $|\angle PQS| = |\angle PST| = \beta$.

Die Dreiecke $\triangle TPN$ und $\triangle SQN$ sind ähnlich, so dass $\dfrac{\xi}{1-\zeta} = \dfrac{x}{1}$, d. h. $\xi = x(1-\zeta)$.

Auch die Dreiecke $\triangle SPT$ und $\triangle SQN$ sind ähnlich, so dass $\dfrac{\zeta}{\xi} = \dfrac{x}{1}$, d. h. $\zeta = x \cdot \xi$.

Hieraus folgt $\xi = x(1 - x \cdot \xi) = x - x^2 \cdot \xi$, und Auflösung nach ξ liefert $\xi = \dfrac{x}{1+x^2}$ und weiter $\zeta = \dfrac{x^2}{1+x^2}$.

Mittels dieser letzten beiden so genannten *Transformationsgleichungen* wird der Punkt $Q = (x)$ auf den Punkt $P = (\xi;\zeta)$ abgebildet.

Umgekehrt wird durch die weitere Transformationsgleichung $x = \dfrac{\xi}{1-\zeta}$ mit $\zeta \neq 1$ der Punkt P auf den Punkt Q abgebildet. Diese Abbildungen liefern eine *Bijektion* (= umkehrbar eindeutige Abbildung) zwischen punktiertem Zahlenkreis und Zahlengerade:

$P \longrightarrow Q$	$Q \longrightarrow P$
$(\xi;\zeta) \mapsto \dfrac{\xi}{1-\zeta}$ mit $\zeta \neq 1$	$x \mapsto \left(\dfrac{x}{1+x^2}; \dfrac{x^2}{1+x^2}\right)$

Sobald der Projektionsstrahl parallel zur x-Achse verläuft, trifft er diese Achse nicht mehr. Daher kann der Punkt N nicht auf einen Punkt der Zahlengeraden abgebildet werden. Das ist der Grund dafür, dass der Zahlenkreis punktiert sein muss, um zwischen ihm und der Zahlengeraden eine Bijektion herstellen zu können.

Nun fasse man den punktierten Kreis in obiger Figur als im Punkt $N = (0;0;1)$ punktierte Kugel mit dem Radius $\frac{1}{2}$ und dem Mittelpunkt $M = (0;0;\frac{1}{2})$ im ξ-η-ζ-System auf, also als die Punktmenge

$$\{(\xi;\eta,\zeta) \,|\, (\xi;\eta,\zeta) \neq (0;0;1) \;\wedge\; \xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\}.$$

Zu der x-Achse (= ξ-Achse) nehme man eine dazu senkrechte, durch den Punkt S verlaufende y-Achse (= η-Achse) so hinzu, dass die entstehende x-y-Ebene zur Tangentialebene der Kugel mit S als gemeinsamem Berührpunkt wird. Ein von N ausgehender Projektionsstrahl schneidet die Kugel im Punkt $P = (\xi;\eta;\zeta)$ und trifft die x-y-Ebene im Punkt $Q = (x;y)$. Die Distanz zwischen Q und S beträgt nun nicht mehr x sondern $s = \sqrt{x^2+y^2}$

(Satz des PYTHAGORAS); außerdem ist allgemein nicht mehr $|PT| = \xi$ sondern $|PT| = h$ $(= \sqrt{\xi^2 + \eta^2})$.

Aus den obigen Transformationsgleichungen erhält man

$$\frac{\zeta}{h} = \frac{s}{1}, \qquad \text{d. h. } \zeta = hs;$$
$$\frac{h}{s} = \frac{1-\zeta}{1}, \quad \text{d. h. } h = s(1-\zeta), \text{ wobei } \zeta \neq 1,$$

und wie zuvor folgt $\zeta = s^2(1-\zeta) = s^2 - s^2 \cdot \zeta$; Auflösung nach ζ liefert $\zeta = \dfrac{s^2}{1+s^2} = \dfrac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}$.
Hieraus ergibt sich weiter $\dfrac{\xi}{x} = \dfrac{h}{s}$, d. h. $\xi = \dfrac{h}{s} \cdot x$ und nach Einsetzung von $1-\zeta$ für $\frac{h}{s}$ dann

$$\xi = \left(1 - \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\right)x = \frac{x}{1+x^2+y^2}.$$

Da auch $\dfrac{\eta}{y} = \dfrac{h}{s}$, so $\eta = \dfrac{y}{1+x^2+y^2}$. Aus obigen Gleichungen erhält man auch die Gleichungen für die Umkehrabbildung: $y = \dfrac{\eta}{1-\zeta}$, $x = \dfrac{\xi}{1-\zeta}$ jeweils mit $\zeta \neq 1$.

$P \longrightarrow Q$	$Q \longrightarrow P$
$(\xi;\eta;\zeta) \mapsto \left(\dfrac{\xi}{1-\zeta}; \dfrac{\eta}{1-\zeta}\right)$ mit $\zeta \neq 1$	$(x;y) \mapsto \left(\dfrac{x}{1+x^2+y^2}; \dfrac{y}{1+x^2+y^2}; \dfrac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\right)$

Erklärt man schließlich die y-Achse zur imaginären iy-Achse und macht dadurch die Zahlenebene zur GAUSSschen Zahlenebene, so sieht man, dass jetzt $Q = (z) = (x;y)$, $z = x + \mathrm{i}y = \Re(z) + \mathrm{i} \cdot \Im(z)$ und $|z|^2 = x^2 + y^2$ ist und hat damit eine Bijektion zwischen der GAUSS-Ebene und der (in N punktierten) RIEMANNschen Zahlensphäre gefunden:

$P \longrightarrow Q$	$Q \longrightarrow P$
$(\xi;\eta;\zeta) \mapsto \left(\dfrac{\xi}{1-\zeta}; \dfrac{\eta}{1-\zeta}\right)$ mit $\zeta \neq 1$	$z \mapsto \left(\dfrac{\Re(z)}{1+\lvert z\rvert^2}; \dfrac{\Im(z)}{1+\lvert z\rvert^2}; \dfrac{\lvert z\rvert^2}{1+\lvert z\rvert^2}\right)$

Beispiel
a) Gegeben sei auf der Zahlensphäre der Punkt $P = \left(\frac{2}{9}; \frac{-1}{18}; \frac{17}{18}\right)$ (man prüfe nach, dass P ein Punkt der Zahlensphäre ist). Dann ist

$$x = \frac{\xi}{1-\zeta} = \frac{\frac{2}{9}}{1-\frac{17}{18}} = 4 \quad \text{und} \quad y = \frac{\eta}{1-\zeta} = \frac{-\frac{1}{18}}{1-\frac{17}{18}} = -1,$$

so dass

$$\left(\frac{2}{9}; \frac{-1}{18}; \frac{17}{18}\right) \longrightarrow (4;-1),$$

und das bedeutet die Abbildung von P auf den Punkt Q bzw. auf die komplexe Zahl $z = 4 - \mathrm{i}$.

b) Gegeben sei in der komplexen Zahlenebene der Punkt $Q = (z) = (x;y)$ mit $z = 2 + 3\mathrm{i}$; dann ist $|z|^2 = 13$ und

$$\xi = \frac{\Re(z)}{1+|z|^2} = \frac{2}{14} \quad \text{und} \quad \eta = \frac{\Im(z)}{1+|z|^2} = \frac{3}{14} \quad \text{und} \quad \zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2} = \frac{13}{14},$$

so dass

$$2 + 3\mathrm{i} \longrightarrow \left(\frac{2}{14}; \frac{3}{14}; \frac{13}{14}\right).$$

Dass der Punkt $P = \left(\frac{2}{14}; \frac{3}{14}; \frac{13}{14}\right)$ tatsächlich auf der Zahlensphäre liegt, prüft man durch Einsetzung der Koordinaten in die Kugelgleichung nach:

$$\left(\frac{2}{14}\right)^2 + \left(\frac{3}{14}\right)^2 + \left(\frac{13}{14} - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4+9+36}{14^2} = \frac{49}{196} = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$