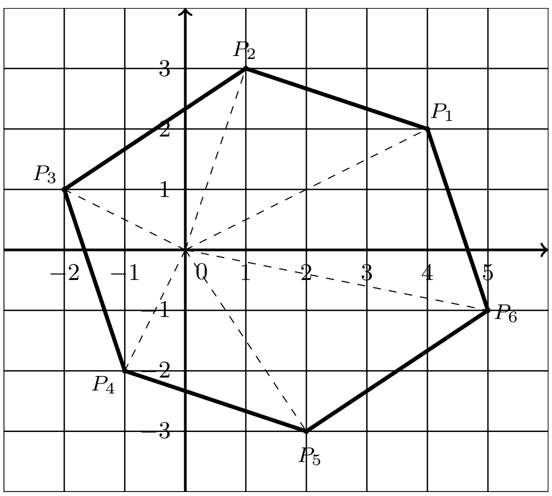
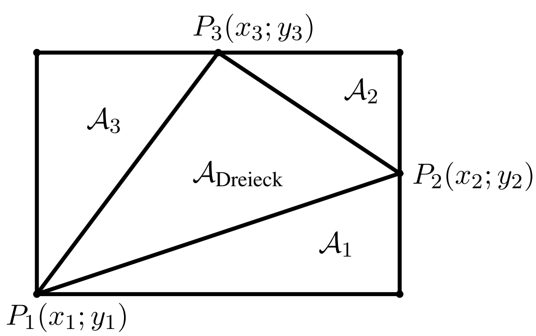
Gaußsche Schuhbandformel

Die Gaußsche Schuhbandformel dient zur Berechnung des Flächeninhaltes von (ebenen) Vielecken. Am Beispiel des nachstehenden Sechsecks wird die Handhabung (auch die mit Excel) verdeutlicht.
Die Eckpunkte $P_1, \ldots, P_6$ sowie $P_7 = P_1$ des Sechsecks werden gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen. Sodann werden zunächst die Koordinaten von P_1 entsprechend in die Zellen B4 und C4 eingetragen. Die Berechnung erfolgt dann gemäß (B4 ∗ C5 – B5 ∗ C4)/2 jeweils in der Zelle D4. Entsprechend verfährt man mit den Koordinaten der übrigen Eckpunkte des Sechsecks. Zum Abschluss müssen nochmals die Koordinaten von P_1 eingetragen werden.
Die Summe der Zellen D4 bis D9 ist die Fläche des Sechsecks in Flächeneinheiten; sie steht in Zelle D1:

$$\mathcal{A}_{\text{Sechseck}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6}(x_i \cdot y_{i+1} - y_i \cdot x_{i+1}) = \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{7}(x_{i-1} - x_{i+1}) \cdot y_i.$$



	A	B	C	D
1			Σ	28
2				
3	i	x_i	y_i	$(x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1})/2$
4	1	4	2	5
5	2	1	3	3,5
6	3	−2	1	2,5
7	4	−1	−2	3,5
8	5	2	−3	6,5
9	6	5	−1	7
10	7	4	2	

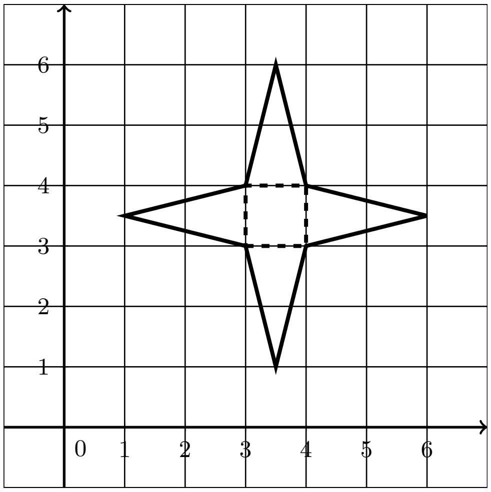


Zur Begründung der Schuhbandformel betrachte man das Sechseck (obere Figur). Durch Verschiebung und entsprechende Änderung der Eckpunktkoordinaten kann stets erreicht werden, dass der Koordinatenursprung innerhalb des Sechsecks (bzw. n-Ecks) liegt. Dieses kann in 6 (bzw. n) Teildreiecke zerlegt werden. Der Flächeninhalt jedes dieser Teildreiecke kann mittels seiner Eckpunktkoordinaten berechnet werden, wie anhand nebenstehender Figur gezeigt wird.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{\text{Dreieck}} &= \mathcal{A}_{\text{Rechteck}} - \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_3 \\
&= (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) - \frac{1}{2}(x_2 - x_3)(y_3 - y_2) - \frac{1}{2}(x_3 - x_1)(y_3 - y_1) \\
&= \frac{1}{2}x_1y_2 - \frac{1}{2}x_1y_3 - \frac{1}{2}x_2y_1 + \frac{1}{2}x_2y_3 + \frac{1}{2}x_3y_1 - \frac{1}{2}x_3y_2 \\
&= \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1) + \frac{1}{2}(x_2y_3 - x_3y_2) + \frac{1}{2}(x_3y_1 - x_1y_3)
\end{aligned}$$

Falls $x_1 = y_1 = 0$, so vereinfacht sich die Darstellung zu $\mathcal{A}_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2}(x_2y_3 - x_3y_2)$.

Anmerkung: Die Schuhbandformel dient auch für konkave Vielecke zur Flächeninhaltsberechnung, wie folgendes Beispiel zeigt.



	A	B	C	D
1			Σ	5
2				
3	i	x_i	y_i	$(x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1})/2$
4	1	6	3,5	5
5	2	4	4	5
6	3	3,5	6	-2
7	4	3	4	3,25
8	5	1	3,5	$-3,75$
9	6	3	3	$-3,75$
10	7	3,5	1	3,25
11	8	4	3	-2
12	9	6	3,5	

Die Eckpunktkoordinaten wurden direkt aus der linken Figur abgelesen und in die Tabelle (rechts) übernommen.
Der Eintrag im Feld D1 ist der Flächeninhalt der Sternfigur.
Bei elementarer Rechnung ergibt sich sofort $\mathcal{A}_{\text{Stern}} = (1 \cdot 1) + 4 \cdot (\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2) = 5$, also der gleiche Wert.

Auch für den Fall, dass ein Vieleck zu einer Strecke entartet, liefert die Schuhbandformel den korrekten Flächeninhalt 0. Die Endpunkte der Strecke seien $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ mit $P_1 \neq P_2$; dann gilt

$$\frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1) + \frac{1}{2}(x_2 y_1 - x_1 y_2) = 0.$$