Aufgaben zu Arithmetik und elementarer Zahlentheorie

Ulrich Warnecke, Juni 2011 und spätere Ergänzungen bis Februar 2016

Die wahren Dichter

Nos mathematici sumus isti veri poetae,
sed quod fingimus nos et probare decet.
Wir Mathematiker sind die wahren Dichter,
nur müssen wir, was wir erschaffen, auch beweisen.

LEOPOLD KRONECKER (1823 -1891)

Teilbarkeitskriterien

1) Für Teilbarkeit durch kleinere Teiler gibt es einige **einfache Teilbarkeitsregeln** (mit *Zahlen* sind im Folgenden nur *ganze* Zahlen gemeint, die im Dezimalsystem notiert sind):

- Eine Zahl ist durch 2 teilbar, wenn sie gerade ist, also ihre letzte Ziffer eine 2, 4, 6, 8 oder 0 ist.
- Eine Zahl ist durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme (besser: ihre Ziffernsumme) , also die Summe ihrer Ziffern durch 3 teilbar ist (Bew. s. u. 2b)).
- Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn die aus ihren letzten zwei Stellen bestehende Zahl durch 4 teilbar ist.
- Eine Zahl ist durch 5 teilbar, wenn ihre letzte Stelle eine 5 oder eine 0 ist.
- Eine Zahl ist durch 6 teilbar, wenn sie durch 2 und durch 3 teilbar ist, also wenn sie gerade und ihre Quersumme durch 3 teilbar ist (s.o.).
- Eine Zahl ist durch 8 teilbar, wenn die aus ihren letzten drei Stellen bestehende Zahl durch 8 teilbar ist.
- Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn ihre *Quersumme* (d. h. Ziffernsumme) durch 9 teilbar ist (Bew. s. u. 2b)).
- Eine Zahl ist durch 10 teilbar, wenn ihre letzte Stelle eine 0 ist.
- Eine Zahl ist durch 12 teilbar, wenn sie durch 3 und durch 4 teilbar ist.
- Eine Zahl ist durch 15 teilbar, wenn sie durch 3 und durch 5 teilbar ist.
- Eine Zahl ist durch 18 teilbar, wenn sie durch 2 und durch 9 teilbar ist.
- Eine Zahl ist durch 20 teilbar, wenn ihre letzte Stelle eine 0 und ihre vorletzte Stelle gerade ist.

2) Weiter gibt es auch Teilbarkeitsregeln für die Teilbarkeit durch z. B. 7, 11 oder 13; aber diese lassen sich dann nicht mehr so einfach formulieren.

2a) Kriterium für Teilbarkeit durch 7 (vgl. unten 2d))

Sei $z = \sum\limits_{i=0}^{n} 10^i a_i$ mit $a_i \in \{0; 1; 2; \ldots ; 9\}$ eine Dezimaldarstellung von z. Streicht man von z die Einerziffer a_0 und subtrahiert $2 \cdot a_0$ von der verbliebenen „Rumpfzahl", so gilt: $7 \,\big|\, z$ genau dann, wenn 7 die nun verbleibende Zahl teilt.

Beweis
Nach Voraussetzung geht z über in die neue Zahl $\dfrac{z-a_0}{10} - 2 \cdot a_0 = \dfrac{z-21a_0}{10}$.

Die Ausgangszahl und die neue Zahl haben bzgl. 7 (und 3) dieselben Teilbarkeitseigenschaften, da von z ein Vielfaches von $21\ (= 3 \cdot 7)$ subtrahiert wird und die Differenz durch $10\ (= 2 \cdot 5)$ dividiert wird.
Der Algorithmus stoppt, sobald im nächstfolgenden Schritt eine negative Zahl erreicht wird.

Beispiel
a) Ist 7 Teiler von 123456 ?
Streichen der Einerziffer 6 liefert die neue Zahl 12345.
Von dieser wird $12\ (= 2 \cdot 6)$ subtrahiert; das ergibt die Zahl 12333.
Wiederholung der durchgeführten Schritte liefert die Zahlen 1227, 122 und dann die Zahl 108.
Da 7 kein Teiler von 108 ist, so auch kein Teiler von 123456.

b) Ist 7 ein Teiler von 92 232 ? Hier ergeben sich der Reihe nach die Zahlen 9223; 9219; 921; 903; 90 und 84.
Da 84 durch 7 teilbar ist, so auch 92 232.

2b) Kriterien für Teilbarkeit durch 9 bzw. durch 11

Definition
Unter der *Quersumme* $Q(z)$ einer Zahl z versteht man die Summe der Ziffern von z (daher besser: *Ziffernsumme*).
Unter der *alternierenden Quersume* $Q'(z)$ einer Zahl z versteht man die Summe der – beginnend mit der Einerziffer – abwechselnd mit einem positiven bzw. negativen Vorzeichen versehenen Ziffern von z.

Beispiel
Die Quersumme von 2538571 ist $2 + 5 + 3 + 8 + 5 + 7 + 1 = 31$, die alternierende Quersumme von 2538571 ist $1 - 7 + 5 - 8 + 3 - 5 + 2 = -9$.

Teilbarkeitskriterium
I) Eine Zahl ist durch 9 (damit auch durch 3) teilbar genau dann, wenn ihre Quersumme durch 9 (bzw. 3) teilbar ist.
II) Eine Zahl ist durch 11 teilbar genau dann, wenn ihre alternierende Quersumme durch 11 teilbat ist.

Beweis
Es ist $9 = 10 - 1$ und $11 = 10 + 1$.
I) Sei $z = \sum_{i=0}^{n} 10^i a_i = a_0 + 10a_1 + 10^2 a_2 + \ldots + 10^n a_n$; dann ist $Q(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i$ und

$$\begin{aligned} z - Q(z) &= \sum_{i=0}^{n} 10^i a_i - \sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} (10^i - 1) a_i \\ &= (10-1)a_1 + (10^2-1)a_2 + \ldots + (10^n - 1)a_n \end{aligned}$$

Da $10^i \equiv 1 \bmod 9$ für alle $i \in \{1; 2; \ldots; n\}$, folgt hieraus: $(10-1) \mid z \;\Leftrightarrow\; (10-1) \mid Q(z)$.

II) Sei z wie zuvor dargestellt; dann ist $Q'(z) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i = a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + (-1)^n a_n$, und

$$Q'(z) = \begin{cases} (a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_n) - (a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{n-1}), & \text{falls } n \text{ gerade ist,} \\ (a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{n-1}) - (a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_n), & \text{falls } n \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Dann ist für gerades n

$$z-Q'(z)=(10^2-1)a_2+(10^4-1)a_4+\ldots+(10^n-1)a_n-\big((10+1)a_1+(10^3+1)a_3+\ldots+(10^{n-1}+1)a_{n-1}\big)$$

und für ungerades n

$$z-Q'(z)=(10^2-1)a_2+(10^4-1)a_4+\ldots+(10^{n-1}-1)a_{n-1}-\big((10+1)a_1+(10^3+1)a_3+\ldots+(10^n+1)a_n\big)\,.$$

Aus den Kongruenzen $10^0 \equiv 1 \bmod 11$ und $10^1 \equiv -1 \bmod 11$ folgen die Kongruenzen

$$10^i \equiv -1 \bmod 11 \text{ für } i \in \{1;3;5;\ldots\} \quad \text{und} \quad 10^i \equiv 1 \bmod 11 \text{ für } i \in \{2;4;6;\ldots\},$$

so dass jetzt folgt: $(10+1)\,\big|\,z \;\Leftrightarrow\; (10+1)\,\big|\,Q(z)$.

2c) Zweites Kriterium für Teilbarkeit durch 11

Definition
Teilt man eine im Dezimalsystem vorgelegte natürliche Zahl von der hintersten Stelle beginnend in Zweierblöcke ein, so nennt man die Summe aus den Zahlen, die jeder Zweierblock liefert, die *Paarquersumme* der vorgelegten Zahl.

Beispiel
Gegeben sei 2571385647; Einteilung in Zweierblöcke: $25\big|71\big|38\big|56\big|47$; Paarquersumme: $25+71+38+56+47=237$.

Teilbarkeitskriterium
Eine natürliche, im Dezimalsystem dargestellte Zahl ist durch 11 teilbar genau dann, wenn ihre Paarquersumme durch 11 teilbar ist.

Beweis
Die Zahl kann im Dezimalsystem geschrieben werden in der Form

$$z=\sum_{i=0}^{n} 10^{2i} a_i \quad \text{mit } \; a_i \in \{00;01;02;\ldots;99\} \text{ für } \; 1 \le i \le n \text{ und } \; n \in \mathbb{N}.$$

Die Paarquersumme ist dann $P=\sum\limits_{i=0}^{n} a_i$. Bildet man nun die Differenz $z-P$ und benutzt die Faktorisierung $10^{2i}-1=(10+1)\cdot\sum\limits_{k=0}^{2i-1}(-1)^{k+1}\cdot 10^k$, so erhält man

$$z-P=\sum_{i=0}^{n} 10^{2i}\cdot a_i-\sum_{i=0}^{n} a_i=\sum_{i=1}^{n}(10^{2i}-1)\cdot a_i=11\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=0}^{2i-1}(-1)^{k+1}\cdot 10^k\right)\cdot a_i.$$

(Statt der benutzten Faktorisierung kann man benutzen, dass $10^{2i} \equiv 1 \mod 11$ für $i \in \{0;1;2;\ldots;n\}$ und damit $\sum_{i=1}^{n}(10^{2i}-1)\cdot a_i \equiv 0 \mod 11$.)

Hieraus folgt die Teilbarkeit von P durch 11, falls z durch 11 teilbar ist, und umgekehrt die Teilbarkeit von z durch 11, falls P durch 11 teilbar ist, q. e. d.

Hinweis
Wendet man das oben zitierte Teilbarkeitskriterium eventuell mehrfach auf die durch die Paarquersumme geliefer-

te Zahl als jeweils neu vorgelegte Zahl an, so bleibt am Ende eine Zahl, der man sofort ansehen kann, ob sie durch 11 teilbar ist oder nicht.
Außerdem entnimmt man dem obigen Beweis, dass eine vorgelegte Zahl und ihre Paarquersumme stets kongruent modulo 11 sind, d. h. bei Teilung durch 11 hinterlassen sowohl die Zahl als auch ihre Paarquersumme den gleichen Rest.

2d) Gemeinsames Teilbarkeitskriterium für 7, 11 und 13

Satz (vgl. oben 2a))
Schneidet man von einer mindestens vierstelligen natürlichen Zahl a im Dezimalsystem die letzten drei Ziffern ab und bildet die Differenz b dieser dreistelligen Zahl d mit der „Rumpfzahl“ r, so haben a und b unter 7, 11 und 13 dieselben Teiler; formaler notiert:
Sei $a \in \mathbb{N},\ a \geq 1001$, und $b = \lfloor \frac{a}{1000} \rfloor - (a \mod 1000)$; dann ist a durch 7 bzw. durch 11 bzw. durch 13 teilbar genau dann, wenn dies für b gilt.

Beweis
Sei als Abkürzung $r = \lfloor \frac{a}{1000} \rfloor$ und $d = (a \mod 1000)$ gesetzt.
Aus $a = 1000r + d$ und $b = r - d$ folgt $a + b = 1001r$, d. h. $a \equiv -b \mod 1001$. Da $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ ein gemeinsames Vielfaches der drei betrachteten Teiler ist, folgt die Behauptung.

Beispiel
Vorgelegt sei für a die Zahl $144\,926\,496$, die auf Teilbarkeit durch 7, 11 bzw. 13 untersucht werden soll.

$$
\begin{array}{rr}
a = & \overbrace{144\,926}^{r}\,\overbrace{496}^{d} \\
 & \underline{-496} \\
b = & 144\,430 \\
\text{Verfahren wiederholen:} & \underline{-430} \\
 & -286
\end{array}
$$

Da $7 \not| 286$, wohl jedoch $11 \big| 286$ und $13 \big| 286$, so auch $11 \big| a$ und $13 \big| a$.

Aufgabe 1 *Man zeige: Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt: $a \geq 2 \ \wedge\ b \geq 2 \quad \Rightarrow \quad ab \geq a + b$.*

Lösung Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
a \geq 2 \ \wedge\ b \geq 2 \quad &\Rightarrow \quad ab \geq 4 \qquad\qquad \wedge\ (a-2)(b-2) \geq 0 \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{2}ab \geq 2 \qquad\quad \wedge\ ab - 2(a+b) + 4 \geq 0 \\
&\Rightarrow \quad ab \geq \frac{1}{2}ab + 2 \wedge\ \frac{1}{2}ab + 2 \geq a + b \\
&\Rightarrow \quad ab \geq a + b.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2 (aus H. MESCHKOWSKI: *Mathematik als Bildungsgrundlage*; Vieweg Braunschweig 1965, S. 130)
Gegeben sind 99 Säcke, gut gefüllt mit (jeweils mindestens 100) Münzen, von denen jede 5 g wiegt, außerdem ein weiterer Sack, der nur falsche Münzen enthält, die je 4 g wiegen. Vorhanden ist eine auf 1 g genau wiegende Waage.
Wie kann man durch eine einzige *Wägung feststellen, in welchem Sack das falsche Geld steckt?*

Lösung
Die Säcke werden durchnummeriert. Man entnimmt dem Sack mit der Nummer n $(1 \leq n \leq 100)$ genau n Münzen. Man hat dann insgesamt

$$\sum_{n=1}^{100} n = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 101 = 5050$$

entnommene Münzen vorliegen. Wären alle echt, so hätten sie das Gewicht 25250 g. Aus dem Sack mit den falschen Münzen - er trage die Nummer k - sind aber k falsche Münzen entnommen worden, die zusammen k g weniger wiegen, als sie es tun müssten, wenn sie echte Münzen wären.
Aus dem *wirklichen* Gewicht w der Münzen hat man dann

$$25250 - w = k$$

und damit durch nur eine einzige Wägung die Nummer des Sackes mit den falschen Münzen gefunden.

Bemerkung
Ähnlich wie bei vorstehender Lösung geht man bei den seit der Mitte der 1960er Jahre bis zum 1. 1. 2007 üblichen ISBN-Buchkennzeichnungen vor, um eventuell falsche Ziffern in der Kennzeichnung sofort zu erkennen. Eine ISBN-Nummer besteht aus 9 Ziffern des Dezimalsystems und einer angefügten „Prüfziffer“ aus dem 11er-System, wobei X für die Dezimalzahl 10 steht. Die 9 Dezimalsytemziffern werden der Reihe nach mit $1; 2; 3; \ldots$ multipliziert und die entstehenden Produkte addiert. Bei korrekt notierter ISBN-Nummer muss dann die Summe dieser Produkte kongruent zur Prüfziffer mod 11 sein.

Beispiel

	3	-	7	6	1	4	-	2	3	7	8	-	0	
·	1		2	3	4	5		6	7	8	9			
	3		14	18	4	20		12	21	56	72	=	220	≡ 0 mod 11

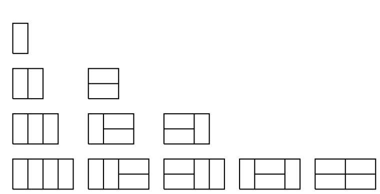
Wegen der Übereinstimmung zwischen der Prüfziffer und dem Rest von 220 mod 11 ist hier die ISBN-Nummer korrekt notiert.

Aufgabe 3 (aus MNU 48/1, 15.1.1995, Seite 45)
Rechteckige Platten der Länge 2 und der Breite 1 – so genannte (2×1)-Platten – sollen zu Rechteckstreifen der Breite 2 fugenlos aneinander gepflastert werden.
a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, einen solchen Streifen der Länge 4 zu pflastern?
b) Verallgemeinere die Aufgabenstellung, und gib für sie auch eine Lösung an.

Lösung
a) Es gibt 5 Möglichkeiten, die vier (2×1)-Platten zu einem Rechteckstreifen der Länge 4 und der Breite 2 fugenlos zu pflastern (s.u. bei b)).

b) Die Verallgemeinerung besteht darin, k (2×1)-Platten zu einem Rechteckstreifen der Länge k und der Breite 2 zu pflastern und nach der Anzahl der Möglichkeiten zu fragen.

Mit 1 Platte gibt es $a_1 = 1$ Pflasterung,
mit 2 Platten gibt es $a_2 = 2$ Pflasterungen,
mit 3 Platten gibt es $a_3 = 3$ Pflasterungen,
mit 4 Platten gibt es $a_4 = 5$ Pflasterungen,
mit 5 Platten gibt es $a_5 = 8$ Pflasterungen.



Warum gibt es mit 5 Platten (d. h. für einen Rechteckstreifen der Länge 5) 8 Pflasterungen? Zunächst sieht man, dass $a_5 = 8 = 5 + 3 = a_4 + a_3$ ist.
Es muss mindestens 8 Pflasterungen geben, weil an jeden Rechteckstreifen der Länge 4 eine neue (2×1)-Platte sich anfügen lässt aber an jeden Rechteckstreifen der Länge 3 stets nur zwei (2×1)-Platten sich anfügen lassen. Da sich bei einem Rechteckstreifen der Länge 3 nur dann neue Pflasterungen ergeben, wenn die beiden (2×1)-Platten in „Querlage“ angefügt werden, sind auch nur 8 Pflasterungen möglich.

Diese Überlegung lässt sich verallgemeinern, so dass sich die Anzahl der Pflasterungen zu einem Rechteckstreifen der Länge k (> 2) und der Breite 2 aus

$$a_k = a_{k-1} + a_{k-2}$$

ergibt, und das ist die Rekursionsformel für die FIBONACCI-Folge.

Aufgabe 4 *Ersetze in der Gleichung $S + E + N + S + E = 43$ jeden Buchstaben durch eine positive ganze Zahl, und zwar gleiche Buchstaben durch die gleiche Zahl, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Zahlen. Ermittle, wie viele Möglichkeiten es dafür gibt.*

Lösung
In der Ansatzgleichung $2s + 2e + n = 43$ muss n in jedem Fall eine ungerade Zahl sein. Aus $2(s + e) = 43 - n$ entnimmt man, dass wegen $s \neq e$ für n nur die ungeraden Zahlen $1; 3; 5; \ldots; 37$ gewählt werden können; denn käme noch 39 in Betracht, so müsste $2(s+e) = 4$, d. h. $s = e = 1$ sein entgegen der Voraussetzung $s \neq e$, und im Fall $n = 41$ müsste $s = 0, e = 1$ oder $s = 1, e = 0$ gelten im Widerspruch dazu, dass nur positive Einsetzungen zugelassen sind; aus diesem Grund ist auch $n = 43$ unmöglich.
$\frac{43-n}{2}$ kann also nur die Werte $3; 4; 5; \ldots; 21$ annehmen; diese 19 Zahlen werden gegeben durch

$$\frac{43 - n}{2} = \frac{43 - (2k + 1)}{2} = 21 - k \quad \text{mit} \quad 0 \leq k \leq 18.$$

Nun gibt es unter diesen Zahlen zu jeder ungeraden Zahl $2r + 1$ genau $2r$ Darstellungen als Summe zweier Summanden und zu jeder geraden Zahl $2(r+1)$ genau $2r$ Darstellungen als Summe zweier *verschiedener* Summanden. So besitzen z. B. 7 und 8 beide genau 6 solcher Summendarstellungen:

$$7 = 1+6 = 2+5 = 3+4 = 4+3 = 5+2 = 6+1 \quad \text{bzw.} \quad 8 = 1+7 = 2+6 = 3+5 = 5+3 = 6+2 = 7+1.$$

Alle Einsetzungsmöglichkeiten in $s + e$ zu jeder der genannten 19 Zahlen sind daher zunächst zu berechnen aus

$$1 \cdot 20 + 2 \cdot (18 + 16 + \ldots + 4 + 2) = 1 \cdot 20 + 4 \cdot (9 + 8 + \ldots + 2 + 1) = 20 + 4 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} = 200.$$

Jedoch ist jetzt zu berücksichtigen, dass in den zu $n \in \{1; 3; 5; 7; 9; 11; 13\}$ gehörigen Summendarstellungen jeweils $s \neq n$ und $e \neq n$ gelten muss; das erzwingt für die Summen $s + e$ mit $15 \leq s + e \leq 21$ jeweils 2 Streichungen, insgesamt also $7 \cdot 2 = 14$ Streichungen, so dass schließlich nur 186 Ersetzungen für die Buchstaben E, N und S in der gegebenen Gleichung möglich bleiben.

n	$\frac{43-n}{2}$	Möglichkeiten für $s+e$	Verbleibende Möglichkeiten
1	21	~~1+20~~, 2+19, 3+18, 4+17, 5+16, 6+15, 7+14, 8+13, 9+12, 10+11, 11+10, 12+9, 13+8, 14+7, 15+6, 16+5, 17+4, 18+3, 19+2, ~~20+1~~	20 - 2
3	20	1+19, 2+18, ~~3+17~~, 4+16, 5+15, 6+14, 7+13, 8+12, 9+11, 11+9, 12+8, 13+7, 14+6, 15+5, 16+4, ~~17+3~~, 18+2, 19+1	18 - 2
5	19	1+18, 2+17, 3+16, 4+15, ~~5+14~~, 6+13, 7+12, 8+11, 9+10, 10+9, 11+8, 12+7, 13+6, ~~14+5~~, 15+4, 16+3, 17+2, 18+1	18 - 2
7	18	1+17, 2+16, 3+15, 4+14, 5+13, 6+12, ~~7+11~~, 8+10, 10+8, ~~11+7~~, 12+6, 13+5, 14+4, 15+3, 16+2, 17+1	16 - 2
9	17	1+16, 2+15, 3+14, 4+13, 5+12, 6+11, 7+10, ~~8+9~~, ~~9+8~~, 10+7, 11+6, 12+5, 13+4, 14+3, 15+2, 16+1	16 - 2
11	16	1+15, 2+14, 3+13, 4+12, ~~5+11~~, 6+10, 7+9, 9+7, 10+6, ~~11+5~~, 12+4, 13+3, 14+2, 15+1	14 - 2
13	15	1+14, ~~2+13~~, 3+12, 4+11, 5+10, 6+9, 7+8, 8+7, 9+6, 10+5, 11+4, 12+3, ~~13+2~~, 14+1	14 - 2
15	14	1+13, 2+12, 3+11, 4+10, 5+9, 6+8, 8+6, 9+5, 10+4, 11+3, 12+2, 13+1	12
17	13	1+12, 2+11, 3+10, 4+9, 5+8, 6+7, 7+6, 8+5, 9+4, 10+3, 11+2, 12+1	12
19	12	1+11, 2+10, 3+9, 4+8, 5+7, 7+5, 8+4, 9+3, 10+2, 11+1	10
21	11	1+10, 2+9, 3+8, 4+7, 5+6, 6+5, 7+4, 8+3, 9+2, 10+1	10
23	10	1+9, 2+8, 3+7, 4+6, 6+4, 7+3, 8+2, 9+1	8
25	9	1+8, 2+7, 3+6, 4+5, 5+4, 6+3, 7+2, 8+1	8
27	8	1+7, 2+6, 3+5, 5+3, 6+2, 7+1	6
29	7	1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2, 6+1	6
31	6	1+6, 2+4, 4+2, 5+1	4
33	5	1+4, 2+3. 3+2, 4+1	4
35	4	1+3, 3+1	2
37	3	1+2, 2+1	2
			Summe: $200 - 7 \cdot 2 = 186$

Aufgabe 5
Gesucht ist eine ultraschnelle Methode zur Berechnung von $999\,999\,999^3$.

Lösung

$$999\,999\,999^3 = (10^9-1)^3 = 10^{27} - 3\cdot 10^{18} + 3\cdot 10^9 - 1 = 10^{27} + 3\cdot 10^9 - (3\cdot 10^{18}+1),$$

ausführlich geschrieben

$$\begin{array}{rr} & 1\,000\,000\,000\,000\,000\,003\,000\,000\,000 \\ - & 3\,000\,000\,000\,000\,000\,001 \\ \hline & 999\,999\,997\,000\,000\,002\,999\,999\,999 \end{array}$$

Aufgabe 6
Sei $a = \underbrace{111...1}_{100\,\textit{Ziffern}}$, $b = \underbrace{222...2}_{50\,\textit{Ziffern}}$. *Man beweise:* $a-b$ *ist eine Quadratzahl.*

Lösung

$$a-b = \sum_{i=0}^{99} 10^i - \sum_{i=0}^{49} 2\cdot 10^i = \frac{10^{100}-1}{10-1} - \frac{2\cdot(10^{50}-1)}{10-1} = \frac{(10^{50})^2 - 2\cdot 10^{50}+1}{9} = \left(\frac{10^{50}-1}{3}\right)^2.$$

Aufgabe 7
100 kg Gurken bestehen gewichtsmäßig zu 99 Prozent aus Wasser. Wieviel kg Wasser müssen sie durch Austrocknen verlieren, damit sie nur noch zu 98 Prozent aus Wasser bestehen? Schätze, bevor du rechnest!

Lösung
Sei x das Gewicht (in kg) des zu verlierenden Wassers. Damit findet man

$$\frac{99}{100}\cdot 100 - \frac{100}{100}\cdot x = \frac{98}{100}\cdot(100-x) \quad \Leftrightarrow \quad x = 50$$

Die Gurken müssen 50 kg Wasser verlieren.

Variante zu vorstehender Aufgabe
Ein Landwirt hat 100 kg Kartoffeln, die er den Winter über in einer Scheune lagert. Anfangs haben die Kartoffeln einen Wassergehalt von 99 Prozent. Während der Lagerung trocknen sie allerdings und haben zum Winter-Ende nur noch 98 Prozent Wassergehalt. Wieviel kg Kartoffeln bleiben dem Landwirt?

Lösung der Variante
Anfangs: 1 kg Trockenmasse, 99 kg Wasser.

Die Trockenmasse bleibt konstant !!!
Am Winter-Ende: 1 kg macht 2 Prozent der Gesamtmasse aus, d. h. 50 kg Trockenmasse machen 100 Prozent der Gesamtmasse aus.
Dem Landwirt bleiben - zu seiner Verblüffung!! - also nur noch 50 kg Kartoffeln.

Aufgabe 8
m Liter einer p-prozentigen Salzlösung sollen mit g Litern einer q-prozentigen Salzlösung gemischt werden, so dass eine r-prozentige Salzlösung entsteht. Man bestimme r.

Lösung
m Liter der p-prozentigen Salzlösung ergeben $\frac{p}{100} \cdot m$ Liter Salz, und g Liter der p-prozentigen Salzlösung ergeben $\frac{q}{100} \cdot g$ Liter Salz.

Also liefert die Mischung der beiden Salzlösungen $\frac{mp+gq}{100}$ Liter Salz. Bezogen auf die Gesamtmenge der zusammengemischten Salzlösungen ergibt das

$$r\,\% = \frac{r}{100} = \frac{\frac{mp+gq}{100}}{m+g},$$

nach Multiplikation mit 100 somit $r = \frac{mp+gq}{m+g}$.

Aufgabe 9
Ermittle die Lebensalter der Personen.
a) Von einem Ehepaar mit zusammen 49 Lebensjahren ist er heute doppelt so alt, wie sie war, als er so alt war, wie sie war, als er so alt war, wie sie jetzt ist.
b) Ein Vetter ist heute doppelt so alt, wie seine Cousine war, als er so alt war, wie sie jetzt ist. Vor 19 Jahren waren sie zusammen halb so alt, wie sie zusammen in 11 Jahren sein werden.
c) Theo ist zweimal so alt, wie Ria war, als er ein Jahr älter war, als sie heute ist. Aber Ria ist halb so alt, wie Theo sein wird, wenn sie ein Jahr älter ist, als er heute ist.

Lösung
a) Erste Lösung mit 3 Variablen.

	vor z Jahren	heute
Ehemann	$x-z$	x
Ehefrau	$y-z$	y

Dem Aufgabentext zusammen mit nebenstehender Tabelle entnimmt man als Ansatz folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x+y &= 49 \\ x &= 2(y-z) \\ x-z &= y \end{aligned}$$

Dieses System wird gelöst durch $x = 28,\ y = 21,\ z = 7$.
Der Ehemann ist heute 28 Jahre alt und seine Frau 21 Jahre.

Zweite Lösung mit nur zwei Variablen.

	früher	heute
Ehemann	y	x
Ehefrau	$\frac{1}{2}x$	y

Hier sind Angaben des Aufgabentextes schon in die Tabelle eingearbeitet. Da die Differenz der Lebensalter von Ehemann und Ehefrau zu jedem Zeitpunkt die gleiche bleibt, findet man jetzt als Ansatz:

$$\begin{aligned} x+y &= 49 \\ y - \frac{1}{2}x &= x-y \end{aligned}$$

mit der Lösung $x = 28,\ y = 21$ und der gleichen Antwort wie zuvor.

b) Erste Lösung mit drei Variablen.

	vor 19 Jahren	früher	heute	in 11 Jahren
Vetter	$x - 19$	$x - z$	x	$x + 11$
Cousine	$y - 19$	$y - z$	y	$y + 11$

Wieder gewinnt man aus Aufgabentext und Tabelle den Ansatz:

$$\begin{aligned} x &= 2(y - z) \\ x - z &= y \\ 2\left((x - 19) + (y - 19)\right) &= (x + 11) + (y + 11) \end{aligned}$$

Dieses System wird gelöst durch $x = 56,\ y = 42,\ z = 14$. Der Vetter ist 56 Jahre alt und seine Cousine 42 Jahre.

Zweite Lösung mit nur zwei Variablen.

	vor 19 Jahren	früher	heute	in 11 Jahren
Vetter	$x - 19$	y	x	$x + 11$
Cousine	$y - 19$	$\frac{1}{2}x$	y	$y + 11$

Unter Beachtung der konstant bleibenden Differenz der Lebensalter zu jedem Zeitpunkt ergibt sich hier der kürzere Ansatz:

$$\begin{aligned} y - \frac{1}{2}x &= x - y \\ 2\left((x - 19) + (y - 19)\right) &= (x + 11) + (y + 11) \end{aligned}$$

Die Lösung dieses Systems ist $x = 56,\ y = 42$ mit gleicher Antwort wie zuvor.

c) Man kann hier mit vier Variablen arbeiten ($x,\ y$ für Theos bzw. Rias Alter; $z,\ w$ zur Darstellung von „früher“ bzw. „später“) oder aber die Angaben der Aufgabenstellung sofort in eine Tabelle einarbeiten:

	früher	heute	später
Theo	$y + 1$	x	$2y$
Ria	$\frac{1}{2}x$	y	$x + 1$

Wieder unter Beachtung der konstant bleibenden Differenz der Lebensalter zu jedem Zeitpunkt ergibt sich der Ansatz:

$$\begin{aligned} (y + 1) - \frac{1}{2}x &= x - y \\ 2y - (x + 1) &= x - y \end{aligned}$$

Auflösung des Systems liefert $x = 10,\ y = 7$. Theo ist 10 Jahre und Ria 7 Jahre alt.

Aufgabe 10
Ermittle jeweils das Alter der Personen.
a) Als Carl nach dem Alter seiner Schwester gefragt wurde, antwortete er: „Marias Alter ist 1 mehr als das Achtfache der Summe seiner Ziffern.“
b) Ein Mathematiker antwortete auf die Frage nach dem Alter seiner Söhne: „Das Alter jedes von Beiden ist 1 mehr als als die dreifache Summe ihrer Ziffern.“

Lösung
a) Marias Alter werde gegeben durch $10a + b$, wobei $a, b \in \{0; 1; \ldots; 9\}$. Dann hat man sofort

$$10a + b = 8(a + b) + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2a - 7b = 1.$$

Die rechts stehende Gleichung wäre unter Voraussetzung von $a, b \in \mathbb{Z}$ eine diophantische Gleichung mit der Lösungsmenge

$$\mathcal{L} = \{(a; b) \,|\, a = -3 + 7r,\ b = -1 + 2r,\ r \in \mathbb{Z}\},$$

die man so z. B. mittels euklidischem Algorithmus finden kann. Die Forderung, dass a, b nur für Ziffern stehen dürfen, ist jedoch nur für $r = 1$ erfüllt, so dass die einzige Lösung hier durch $a = 4$, $b = 1$ gegeben wird, d. h. Maria ist 41 Jahre alt. ($2 \cdot \mathbf{4} - 7 \cdot \mathbf{1} = 1$ hätte man auch sofort durch Raten finden können.)

In Betracht zu ziehen ist auch die Möglichkeit, dass Maria ihr hundertstes Lebensjahr überschritten haben könnte. Dann hätte man mit $a, b, c \in \{0; 1; \ldots; 9\}$

$$100a + 10b + c = 8(a + b + c) + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 92a + 2b - 7c = 1.$$

Damit die rechte Gleichung als diophantische Gleichung aufgefasst überhaupt gelöst werden kann, muss c wegen $2(46a + b) - 1 = 7c$ ungerade sein; das bedeutet $c \in \{1; 3; 5; 7; 9\}$. Untersucht man für diese Fälle die Gleichung auf Lösbarkeit, stellt man fest, dass nur für $c = 1$ die Gleichung bzgl. der Ziffernmenge lösbar ist; man hat dann

$$92a + 2b = 8 \quad \Leftrightarrow \quad 46a + b = 4,$$

und hier wird die rechte Gleichung in der Ziffernmenge nur durch $a = 0$, $b = 4$ gelöst. Marias Alter ist dann $100 \cdot 0 + 10 \cdot 4 + 1 = 41$ Jahre – wie zuvor.

b) Hier darf man wohl von vornherein voraussetzen, dass das Lebensalter der beiden Söhne niedriger als 100 Jahre ist, und hat dann sofort mit $a, b \in \{0; 1; \ldots; 9\}$

$$10a + b = 3(a + b) + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 7a - 2b = 1.$$

Als diophantische Gleichung aufgefasst hätte man hier als Lösungsmenge

$$\mathcal{L} = \{(a; b) \,|\, a = 1 + 2r,\ b = 3 + 7r,\ r \in \mathbb{Z}\}.$$

Das einzige Ziffernpaar ergibt sich hier aber nur für $r = 0$, also $(a; b) = (1; 3)$. Die Söhne sind demnach 13 Jahre alt, also gleich alt. (Auch hier hätte man $7 \cdot \mathbf{1} - 2 \cdot \mathbf{3} = 1$ leicht durch Raten finden können.)

Aufgabe 11

Bestimme die kleinste natürliche Zahl, die bei Teilung durch 28 den Rest 5 und bei Teilung durch 5 den Rest 4 lässt.

Lösung

Alle natürlichen Zahlen, die bei Teilung durch 28 den Rest 5 lassen, haben die Form $28x + 5$ und die Zahlen, die bei Teilung durch 5 den Rest 4 lassen, haben die Form $5y + 4$. Daher macht man den Ansatz

$$28x + 5 = 5y + 4,$$

der auf die diophantische Gleichung

$$-28x + 5y = 1.$$

führt. Eine Lösung kann mittels des euklidischen Algorithmus gefunden werden:

$$\begin{array}{r|r|l}
28 = 5 \cdot 5 + 3 & 3 = 28 - 5 \cdot 5 & 1 = 28 - 5 \cdot 5 - 1 \cdot \big(5 - 1 \cdot (28 - 5 \cdot 5)\big) \\
5 = 1 \cdot 3 + 2 & 2 = 5 - 1 \cdot 3 & 1 = 28 - 5 \cdot 5 - 1 \cdot 5 + 28 - 5 \cdot 5 \\
3 = 1 \cdot 2 + 1 & 1 = 3 - 1 \cdot 2 & 1 = 2 \cdot 28 - 11 \cdot 5 \\
 & & 1 = (-2) \cdot (-28) + (-11) \cdot 5
\end{array}$$

sodass $(-2; -11)$ ein Lösungspaar ist. Die Lösungsgesamtheit ergibt sich aus

$$x = -2 + \frac{5}{\mathrm{ggT}(28; 5)} \cdot t \quad \text{und} \quad y = -11 - \frac{-28}{\mathrm{ggT}(28; 5)} \cdot t$$

für beliebiges $t \in \mathbb{Z}$.
Da die kleinste natürliche Zahl gesucht wird, die die genannten Bedingungen erfüllt, muss ein solches t gewählt werden, für das $x, y \in \mathbb{N}$ und beide minimal sind; dieses t ist 1 und damit $x = 3,\ y = 17$, und für diese Werte ergibt sich die gesuchte Zahl 89.

Aufgabe 12
Wie alt sind die im Folgenden genannten Personen?
a) Eine Mutter ist so alt wie ihre beiden Töchter zusammen. Die Summe aller Alter ist eine zweistellige Zahl. Das Alter der einen Tochter besteht aus zwei Ziffern, die bei Vertauschung das Alter der Mutter ergeben. In 39 Jahren ergeben die vertauschten Ziffern des Alters der Mutter das heutige Alter der anderen Tochter.
b) Eine Großmutter behauptet von sich, ihrer Tochter und ihrer Enkelin: „Meine Tochter ist 24 Jahre jünger als ich und 35 Jahre älter als meine Enkelin. Zusammen sind wir 100 Jahre alt.

Lösung
a) Sei $10a + b$ mit $a, b \in \{0; 1; \ldots; 9\}$ und $a > b$ das Alter der Mutter; dann beträgt das Alter der einen Tochter $10b+a$ Jahre, das Alter der anderen Tochter $(10a+b)-(10b+a)$ Jahre, das man im Hinblick auf Ziffernvergleich bzw. Zifferntausch auch so schreiben kann:

$$(10a+b)-(10b+a) = 10(a-b)+(b-a) = 10(a-b)-10+(\underbrace{10+(b-a)}_{\text{stellt eine Ziffer dar}}) = 10(a-b-1)+(10+(b-a)).$$

In 39 Jahren ist das Alter der Mutter

$$10a + b + 39 = 10a + b + 40 - 1 = 10(a + 4) + (b - 1).$$

Zifferntausch ergibt $10(b-1) + (a+4)$, und dies soll gleich dem Alter der anderen Tochter sein, also

$$10(b-1) + (a+4) = 10(a-b-1) + (10 + (b-a)).$$

Vergleich der Zehner- bzw. Einerziffern liefert

$$\begin{aligned} b - 1 &= a - b - 1 \\ a + 4 &= 10 + (b - a) \end{aligned}$$

und dieses System wird gelöst durch $a = 4,\ b = 2$.
Die Mutter ist 42 Jahre alt, die eine Tochter 24 Jahre und die andere 18 Jahre.

b) Sei x das Alter der Tochter; dann ist

$$(x + 24) + x + (x - 35) = 100 \quad \Leftrightarrow \quad x = 37.$$

Das Alter der Großmutter der ist 61 Jahre, das der Tochter 37 Jahre und das der Enkelin 2 Jahre.

Aufgabe 13
Ermittle das Alter.
a) Mein Urgroßvater, der am Ende des 19. Jahrhunderts geboren wurde, war x Jahre alt im Jahr x^2.
b) Ein Vater sagt. „Mein Sohn ist im Jahr 2004 so alt wie die Quersumme seines Geburtsjahres.“

Lösung
Die einzige Quadratzahl zwischen 1900 und 1999 ist $1936 = 44^2$; daher ist $1936 - 44 = 1892$ das Geburtsjahr,

und im Jahr 1936 ist der Urgroßvater 44 Jahre alt.

b) Sei $1900 + (10a + b)$ mit $a, b \in \{0; 1; \ldots ; 9\}$ das Geburtsjahr des Sohnes, dessen Alter dann gegeben wird durch $2004 - (1900 + 10a + b)$. Das Alter soll gleich der Quersumme de Geburtsjahres sein, also

$$2004 - (1900 + 10a + b) = 1 + 9 + a + b \quad \Leftrightarrow \quad 11a + 2b = 94.$$

Die rechte Gleichung – aufgefasst als diophantische Gleichung – ist lösbar, da $\mathrm{ggT}(11; 2) = 1$ ein Teiler von 94 ist. Es ergibt sich der Reihe nach:

$$\begin{aligned}
1 &= 11 \cdot \underbrace{1}_{a_0} + 2 \cdot \underbrace{(-5)}_{b_0} \\
94 &= 11 \cdot (94 \cdot 1) + 2 \cdot (94 \cdot (-5)) \\
a_1 &= 94 \cdot 1 = 94 \\
b_1 &= 94 \cdot (-5) = -470 \\
a &= a_1 + 2r = 94 + 2r \\
b &= b_1 + (-11)r = -470 - 11r
\end{aligned}$$

Nur für $r = -43$ erhält man hier für $(a; b)$ ein Ziffernpaar, nämlich $(8; 3)$. Der Sohn wurde demnach 1983 geboren.

Bemerkung. Natürlich kann man $(8; 3)$ als Lösung von $11a + 2b = 94$ durch Raten finden. Damit ist aber nicht bewiesen, dass dieses Lösungspaar das einzig mögliche ist.

Aufgabe 14
Professor Glatzl und sein Mathe-Kollege Hilbi treffen sich nach längerer Zeit mal wieder auf dem Weg zur Universität.
Glatzl: *Guten Tag, Herr Kollege! Wie geht es Ihnen?*
Hilbi: *Am liebsten gut. Und Ihnen?*
Glatzl: *Ich bin sehr glücklich. Sie wissen, dass ich inzwischen drei Kinder habe?*
Hilbi: *Glückwunsch! Und wie alt sind Ihre Kinder?*
Glatzl: *Das dürften Sie als Mathematiker leicht aus folgenden Angaben herausfinden. Das Produkt der Lebensalter meiner Kinder ist 36, die Summe der Lebensalter ist gleich der Hausnummer Ihres Institutsgebäudes.*
Hilbi: *Diese Angaben reichen mir aber noch nicht.*
Glatzl: *Sie haben recht; also teile ich Ihnen noch mit, dass mein ältestes Kind genau so aussieht wie ich.*
Hilbi: *Danke! Jetzt weiß ich, wie alt Ihre Kinder sind.*
Nun – wie alt sind sie?

Lösung
In folgender Tabelle sind alle Möglichkeiten aufgeführt, aus drei natürlichen Zahlen das Produkt 36 zu bilden (ohne Berücksichtigung der Reihenfolge der Faktoren), außerdem daneben die Summe der jeweiligen drei Zahlen:

$1 \cdot 1 \cdot 36$	1 + 1 + 36 = 38
$1 \cdot 2 \cdot 18$	1 + 2 + 18 = 21
$1 \cdot 3 \cdot 12$	1 + 3 + 12 = 16
$1 \cdot 4 \cdot 9$	1 + 4 + 9 = 14
$1 \cdot 6 \cdot 6$	1 + 6 + 6 = 13
$2 \cdot 2 \cdot 9$	2 + 2 + 9 = 13
$2 \cdot 3 \cdot 6$	2 + 3 + 6 = 11
$3 \cdot 3 \cdot 4$	3 + 3 + 4 = 10

Wie man sieht, haben genau zwei Summen den gleichen Wert, nämlich 13. Diese Zahl muss die Hausnummer des Institutsgebäudes sein; denn ohne den Hinweis auf diese Nummer hätte Hilbi sonst ja schon ausreichend informiert gewesen sein müssen.
Wären nun 1, 6 und 6 die Lebensalter der Kinder, gäbe es kein ältestes Kind. Also bleiben als Lebensalter der Kinder nur die Zahlen 2, 2 (Zwillinge) und 9. (Der Hinweis auf das gleiche Aussehen war nur eine bewusst irritierende Angabe.)

Aufgabe 15 (aus FR. W. WENK: *Vergnügliches Rechnen*; Franckh-Verlag Stuttgart 1970)
Das Schiff ist eine ganze Zahl von Metern lang, und der Kapitän hat Söhne und Töchter. Multipliziert man deren Anzahl mit den Lebensjahren des Kapitäns und der Länge des Schiffes, dann ergibt sich 32118. Wie alt ist der Kapitän?

Lösung
Primfaktorzerlegung liefert $32118 = 2 \cdot 3 \cdot 53 \cdot 101$. Unter Berücksichtigung realer Gegebenheiten wird man die Zahl 101 sofort der Schiffslänge zuordnen. „Söhne und Töchter“ bedeutet, dass der Kapitän mindestens 4 Kinder hat. Dann kommt für die Anzahl der Kinder nur die Zahl 6 in Betracht, und somit bleibt für das Alter des Kapitäns nur die Zahl 53 übrig. Diese Zuordnungen dürften wohl keinem Zweifel unterliegen.

Aufgabe 16 (von Dr. Heike Winkelvoß)
Anna, Beate und Charlotte haben jeweils eine bestimmte Anzahl Pralinen. Anna gibt von ihren Pralinen so viele an Beate und an Charlotte ab, wie diese jeweils schon haben. Danach gibt Beate von ihren Pralinen so viele an Anna und an Charlotte ab, wie diese jetzt schon haben. Schließlich gibt Charlotte von ihren Pralinen so viele an Anna und an Beate ab, wie diese inzwischen haben. Jetzt haben alle drei je 8 Pralinen.
Wie viele Pralinen hatten Anna, Beate und Charlotte zu Anfang vor dem Tausch?

Lösung
Die Tauschvorgänge gibt folgende Tabelle wieder:

	a (Anna)	b (Beate)	c (Charlotte)
1.	$a-b-c$	$2b$	$2c$
2.	$2a-2b-2c$	$2b-a+b+c-2c$	$4c$
3.	$4a-4b-4c$	$4b-2a+2b+2c-4c$	$4c-2a+2b+2c-2b+a-b-c+2c$
	= 8	$=-2a+6b-2c=8$	$=-a-b+7c=8$

Aus ihr entnimmt man das (schon vereinfachte) Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a-b-c &= 2 \\ a+3b-c &= 4 \\ a+b-7c &= -8 \end{aligned}$$

das durch $(a;b;c) = (13;7;4)$ gelöst wird.

Aufgabe 17 (aus: MU 29/3 Juni 1983, Seite 5 - 45)
Finde sämtliche Möglichkeiten, in die 5-stellige Zahl $35\square\square6$ *die beiden fehlenden Ziffern so einzufügen, dass die Zahl durch 9 teilbar wird.*

Lösung
Eine Zahl ist genau dann durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme (viel besser: *Ziffernsumme*) durch 9 teilbar ist. Also macht man den Ansatz (mit $k \in \mathbb{N}$)

$$3+5+x+y+6 = 9k \quad \Leftrightarrow \quad 14+x+y = 9k.$$

Hier stehen x und y für Ziffern, d. h. $x, y \in \{0; 1; 2; \ldots; 9\}$, so dass $0 \leq x + y \leq 18$. Damit kommen für k nur die Werte 2 und 3 in Betracht, um $14 + x + y = 9k$ in der genannten Ziffernmenge zu lösen:

$$14 + x + y = 9k \quad \Leftrightarrow \quad x + y = 4 \ \vee \ x + y = 13.$$

Hiermit ergeben sich für $x + y = 4$ die Zahlen 35046; 35136; 35226; 35316; 35406;
und für $x + y = 13$ die Zahlen 35496; 35586; 35676; 35766; 35856; 35946.

Aufgabe 18

Die Zahl 3025 hat folgende Eigenschaft: „zerbricht“ man sie in 30 und 25, bildet aus beiden Teilen die Summe 55 und quadriert diese, so ergibt sich 3025.
Welche vierstellige Zahl hat ebenfalls diese Eigenschaft, wenn einschränkend verlangt wird, dass keine zwei Ziffern dieser Zahl gleich sein dürfen?

Lösung

x und y seien zwei zweistellige natürliche Zahlen; dann lautet die Bedingung $100x + y = (x + y)^2$.
Auflösung dieser Gleichung nach x ergibt

$$x = 50 - y + \sqrt{(50 - y)^2 + y(1 - y)} \ \vee \ x = 50 - y - \sqrt{(50 - y)^2 + y(1 - y)}.$$

Für $y = 01$ (zweistellig!) nimmt die Wurzel den Wert 49 an; dafür hat man $x = 98 \ \vee \ x = 00$.
Der rechte Fall scheidet wegen der vorausgesetzten Verschiedenheit der Ziffern aus. Es bleibt $x = 98$ und $y = 01$, d. h. die Zahl 9801, für die gilt $(98 + 01)^2 = 9801$.
Auch für $y = 25$ nimmt die Wurzel einen ganzzahligen Wert an, nämlich 5; weitere solche Fälle existieren nicht. Hier ergibt sich dann $x = 30 \ \vee \ x = 20$, wozu jeweils $y = 25$ gehört. Man erhält so die weiteren Zahlen 3025 bzw. 2025. erstere entfällt als schon bekannte Zahl der verlangten Art; bei der zweiten ist die Verschiedenheit der Ziffern nicht gegeben, obschon $(20 + 25)^2 = 45^2 = 2025$.
Die gesuchte Zahl ist demnach 9801.

Aufgabe 19

Sei $a \geq 1, b \geq 4$. Ermittle unter dieser Voraussetzung den kleinsten Wert, den $a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b}$ annehmen kann.

Lösung

Die Funktion $(x \mapsto x + \frac{1}{x}) \big| [1; \infty[$ ist streng monoton steigend. Das liefert für $a \geq 1, b \geq 4$

$$a + \frac{1}{a} \geq 1 + \frac{1}{1} = 2 \quad \text{und} \quad b + \frac{1}{b} \geq 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4},$$

somit als Minimum den Wert $2 + \frac{17}{4} = \frac{25}{4}$.

Aufgabe 20 (aus: BWM 1. Runde 2015 Nr. 2)

Eine Summe aus 335 paarweise verschiedenen positiven ganzen Zahlen hat den Wert 100 000.
a) Wie viele ungerade Summanden müssen in dieser Summe mindestens vorkommen?
b) Wie viele ungerade Summanden können es höchstens sein?
Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

Lösung

a) Die Zahl 100 000 kann in verlangter Art als Summe dargestellt werden:

$$\begin{aligned} 100\,000 &= 99\,540 + 361 + 99 \\ &= 315 \cdot 316 + 19^2 + 99 \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^{315} 2i}_{\text{315 gerade Zahlen}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{19} (2j-1) + 99}_{\text{20 ungerade Zahlen}}, \end{aligned}$$

insgesamt treten also 335 Summanden auf. (Für die Aufspaltung in die 20 ungeraden Summanden gibt es, wie man sieht, noch viele weitere Möglichkeiten.) Da nicht mehr als 315 paarweise verschiedene gerade Summanden auftreten können, müssen mindestens 20 Summanden ungerade sein.

b) Die Zahl 100 000 kann in verlangter Art auch so dargestellt werden:

$$100\,000 = 99\,856 + 144 = \sum_{i=1}^{316} (2i-1) + 12^2,$$

aber dann ist es nicht möglich, 144 als Summe von 19 paarweise verschiedenen positiven ganzen Zahlen darzustellen. Das wird erst möglich, wenn man die Anzahl der ungeraden Zahlen wie folgt verringert:

$$\begin{aligned} 100\,000 &= 98\,596 + 1332 + 72 \\ &= 314^2 + 36 \cdot 37 + 72 \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^{314} (2i-1)}_{\text{314 ungerade Zahlen}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{36} 2j + 72}_{\text{37 gerade Zahlen}} \end{aligned}$$

Die 37 geraden Zahlen lassen sich jetzt aber zu 21 paarweise verschiedenen geraden Summanden zusammenfassen, so dass insgesamt wieder 335 Summanden auftreten. Dies zeigt, dass in der sich ergebenden Summendarstellung von 100 000 höchstens 314 ungerade Summanden vorkommen können.

Aufgabe 21

Zeige, dass zu jeder ungeraden natürlichen Zahl u ein $m \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $u^2 = 8m + 1$ gilt.

Lösung

$$u^2 - 1 = 8m \quad \Leftrightarrow \quad (u+1)(u-1) = 8m$$

Sowohl $u + 1$ als auch $u - 1$ ist durch 2 teilbar, und einer dieser beiden Faktoren ist auch durch 4 teilbar. Daher ist das Produkt teilbar durch 8 und somit $m = \frac{1}{8}(u^2 - 1)$.

Aufgabe 22 (aus: H. Sewerin: *Mathematische Klausuraufgaben*, Manz Verlag München 1985, ISBN 3-7863-0821-7, Seite 33, hier in leicht abgeänderter Fassung)

Ermittle alle natürlichen Zahlen n, für die gilt: $2^6 + 2^9 + 2^n$ ist eine Quadratzahl.

Lösung

Für $n > 6$ ergibt Ausklammern zunächst $2^6 + 2^9 + 2^n = 2^6(1 + 2^3 + 2^{n-6}) = 2^6(9 + 2^{n-6})$. Da $2^6 = (2^3)^2$ quadratisch ist, bleibt zu fragen: Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist auch $9 + 2^{n-6}$ eine Quadratzahl?
Dazu sei $k^2 = 9 + 2^{n-6}$ mit $k \in \mathbb{N}$ gesetzt; dann folgt $(k-3)(k+3) = 2^{n-6}$. Dabei müssen $k - 3$ und $k + 3$

Zweierpotenzen sein, die außerdem den Abstand 6 voneinander haben. Diese beiden Forderungen werden nur für $k = 5$ erfüllt; denn $k - 3 = 2$ und $k + 3 = 8$. Weitere Zweierpotenzen mit dem Abstand 6 gibt es nicht.
Mit $k = 5$ erhält man jetzt aus $k^2 = 9 + 2^{n-6}$

$$25 - 9 = 2^{n-6} \quad \Leftrightarrow \quad 2^4 = 2^{n-6} \quad \Leftrightarrow \quad n = 10.$$

Tatsächlich ist $2^6 + 2^9 + 2^{10} = 64 + 512 + 1024 = 1600 = 40^2$.
Für $n \leq 6$ liefert der Term $2^6 + 2^9 + 2^n$ keine Quadratzahl, wie man sofort durch direktes Nachrechnen bestätigt.
Damit hat sich ergeben, dass $2^6 + 2^9 + 2^n$ nur für $n = 10$ quadratisch wird.

Aufgabe 23
Finde alle Primzahlen, für die auch a) $5p^2 + 1$, b) $3p^2 + 11$ eine Primzahl ist.

Lösung
a) Für $p = 2$ ist $5 \cdot 2^2 + 1 = 21 = 3 \cdot 7$, liefert also keine Primzahl, und für jede Primzahl $p > 2$ ist p ungerade und $5p^2 + 1$ gerade, also auch keine Primzahl. Somit gibt es keine Primzahl der verlangten Art.
b) Für $p = 2$ ist $3 \cdot 2^2 + 11 = 23$, und 23 ist eine Primzahl; für jede Primzahl $p > 2$ liefert $3p^2 + 11$ stets eine gerade Zahl. Hier ist also 2 die einzige Primzahl der verlangten Art.

Aufgabe 24
Im Januar 1989 war die größte bis dahin bekannte Primzahl $2^{216091} - 1$. Zeige, dass diese Zahl die Endziffer 7 hat.

Lösung
Falls $k \equiv -1 \bmod 4$, so hat 2^k die Endziffer 8. Wegen $216091 = 4 \cdot 54022 + 3 \equiv -1 \bmod 4$ hat $2^{216091} - 1$ die Endziffer 7.

Aufgabe 25
*Sei p eine Primzahl mit der Eigenschaft, dass auch $2p+1$ eine Primzahl ist (solche Zahlen heißen **Sophie-Germain-Primzahlen** nach der französischen Mathematikerin* Sophie Germain *(1776 - 1831); z. B. sind 2, 3, 5, 11 S.-G.-Primzahlen, nicht dagegen 7, weil $2 \cdot 7 + 1 = 15$ keine Primzahl ist).*
Man zeige, dass p im Dezimalsystem nicht die Endziffer 7 haben kann.

Lösung
Angenommen, p hätte im Dezimalsystem doch die Endziffer 7; dann könnte man p darstellen als $p = 10k + 7$ mit $k \in \mathbb{N}$, so dass

$$2p + 1 = 20k + 15 = 5(4k + 3).$$

$2p + 1$ wäre demnach durch 5 teilbar und außerdem $2p + 1 \geq 15$, d. h. $p \geq 7$. Entgegen der Voraussetzung wäre $2p + 1$ keine Primzahl. Also war die Annahme falsch; die Behauptung ist zutreffend.

Aufgabe 26
Welcher Rest bleibt übrig, wenn man 3^{100} (eine Zahl mit immerhin 48 Stellen!) durch 7 teilt?

Lösung

$$\begin{aligned}
&3^3 = 27 \equiv -1 \bmod 7\\
&(3^3)^{33} = 3^{99} \equiv (-1)^{33} = -1 \bmod 7\\
&3 \cdot (3^{99}) = 3^{100} \equiv 3 \cdot (-1) = -3 \equiv 4 \bmod 7.
\end{aligned}$$

Also bleibt bei Teilung von 3^{100} durch 7 der Rest 4.

Aufgabe 27 (1. IMO 1959)
Zeige, dass der Bruch $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ *für keine natürliche Zahl* n *zu kürzen ist.*

Lösung
Für alle natürlichen Zahlen n gilt $3(14n+3) - 2(21n+4) = 1$; daher sind Zähler und Nenner relativ prim zueinander und Kürzung ist unmöglich.
Andere Beweismöglichkeit: man benutzt, dass $\mathrm{ggT}(a;b) = \mathrm{ggT}(b;a)$ und $\mathrm{ggT}(a;b) = \mathrm{ggT}(a-b;b)$ für alle $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a > b$ gilt; dann findet man

$$\mathrm{ggT}(21n+4;14n+3) = \mathrm{ggT}(7n+1;14n+3) = \mathrm{ggT}(7n+1;7n+2) = \mathrm{ggT}(7n+1;1) = 1.$$

Aufgabe 28
x und y seien ganze Zahlen. Man zeige, dass $2x+3y$ durch 17 teilbar ist genau dann, wenn $9x+5y$ durch 17 teilbar ist.

Lösung
Sei $9x+5y$ durch 17 teilbar; dann folgt
$17\big|(4(9x+5y))$, d. h. $17\big|(36x+20y)$, anders geschrieben $17\big|\left(17(2x+y)+(2x+3y)\right)$, also $17\big|(2x+3y)$.
Umgekehrt sei $2x+3y$ durch 17 teilbar; dann folgt
$17\big|(13(2x+3y))$, d. h. $17\big|(26x+39y)$, anders geschrieben $17\big|\left(17(x+2y)+(9x+5y)\right)$, also $17\big|(2x+3y)$.

Aufgabe 29
Seien m und n und auch $\frac{n}{m}+\frac{m}{n}$ ganze Zahlen. Wie viele verschiedene Werte existieren für den Bruch $\frac{n}{m}$?

Lösung
Sei d der größte gemeinsame Teiler von m und n; dann hat man $m = a\cdot d$ und $n = b\cdot d$, wobei a und b teilerfremd sind. Nun hat man

$$\frac{n}{m}+\frac{m}{n} = \frac{b}{a}+\frac{a}{b} = \frac{a^2+b^2}{ab}.$$

Daher gilt $ab \,\big|\, a^2+b^2$ und insbesondere $b \,\big|\, a^2$. a und b waren aber als teilerfremd vorausgesetzt worden; deshalb muss $a = 1$ oder $b = 1$ sein.
Falls $a = 1$, so ist $m = d$ und $n = d\cdot b$. Also ist $\frac{n}{m}+\frac{m}{n} = b+\frac{1}{b}$ eine ganze Zahl, und daher kann nur $b = 1$ sein, und damit ist $\frac{n}{m} = 1$.
Falls $b = 1$, schließt man entsprechend, dass $\frac{n}{m} = 1$. Also ist 1 der einzige Wert, den $\frac{n}{m}$ annehmen kann.

Aufgabe 30
Theo will die Behauptung beweisen, dass für jede positive Zahl a und jedes $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ gilt: $a^{n-1} = 1$. Er entscheidet sich für einen Beweis durch vollständige Induktion und notiert folgendes:
Induktionsanfang*: Für $n = 1$ gilt $a^{1-1} = a^0 = 1$ nach Definition.*
Induktionsschritt*: Sei $a^{k-1} = 1$ für $k \in \{1;2;\ldots;n\}$* (Induktionsvoraussetzung)*; dann gilt aber auch*

$$a^{(n+1)-1} = a^n = \frac{a^{n-1}\cdot a^{n-1}}{a^{n-2}} = \frac{1\cdot 1}{1} = 1.$$

Theos Schwester Ria blickt ihm aus Neugier über die Schulter und sagt: „Dein Beweis ist leider falsch.“
Hat Ria recht? - Begründe deine Antwort!

Lösung
Im Nenner von Theos Umformung zum Induktionsschritt kommt der Term a^{n-2} vor, der für $n = 1$ zu a^{-1} wird. In der Induktionsvoraussetzung ist aber a^{-1} nicht enthalten und die Benutzung von a^{n-2} daher falsch.

Aufgabe 31
Zu einer vorgegebenen natürlichen Zahl $n \geq 1$ berechne man die Anzahl aller positiven Teiler von n.

Lösung
Jede natürliche Zahl $n \geq 1$ ist bis auf die Reihenfolge eindeutig darstellbar als Produkt von Primzahlpotenzen:

$$n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{m_i} = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{m_r},$$

wobei $p_1, p_2, \ldots, p_r$ die ersten unmittelbar aufeinander folgenden Primzahlen seien.
Ist zunächst $n = p_1^{m_1}$, so hat diese Zahl genau $1, p_1, p_1^2, \ldots, p_1^{m_1}$ als Teiler; das sind genau $m_1 + 1$ Teiler.
Ist weiter $n = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2}$, so hat $p_2^{m_2}$ die Teiler $1, p_2, p_2^2, \ldots, p_2^{m_2}$; das sind $m_2 + 1$ Teiler, und da $p_2 \neq p_1$ und somit auch deren entsprechende Potenzen voneinander verschieden sind, so hat n genau $(m_1 + 1)(m_2 + 1)$ Teiler. Hiermit hat man praktisch einen Induktionsanfang gemacht.
Für den Induktionsschritt sei $n = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{m_r}$ mit der Teileranzahl $A(n) = (m_1+1)(m_2+1) \cdot \ldots \cdot (m_r+1)$. Zu zeigen ist, dass für $n' = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot p_{r+1}^{m_{r+1}}$ dann $A(n') = (m_1 + 1)(m_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (m_{r+1} + 1)$ ist.
Man hat $n' = n \cdot p_{r+1}^{m_{r+1}}$, wobei p_{r+1} nicht unter den vorangehenden Primfaktoren vorkommt und somit kein Teiler von n ist.
Sämtliche Teiler von n' erhält man dann, indem man alle Teiler von n nacheinander mit $1, p_{r+1}, p_{r+1}^2, \ldots, p_{r+1}^{m_{r+1}}$ multipliziert; man erhält dann $A(n) \cdot (m_{r+1} + 1)$ Teiler von n', also $A(n') = (m_1 + 1)(m_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (m_{r+1} + 1)$.
Kurz notiert ist hiermit für die Anzahl $A(n)$ aller Teiler einer natürlichen Zahl n gezeigt:

$$\boxed{A(n) = A\left(\prod_{i=1}^{r} p_i^{m_i}\right) = \prod_{i=1}^{r} (m_i + 1).}$$

Aufgabe 32
Bestimme alle natürlichen Zahlen, die genau drei verschiedene positive Teiler haben.

Lösung
Jede natürliche Zahl lässt sich - bis auf die Reihenfolge - eindeutig als Produkt von Primzahlpotenzen darstellen:

$$n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{k_i}, \text{ wobei die } p_i \quad (i \in \{1; 2; \ldots; r\}) \text{ die ersten } r \text{ Primzahlen sind.}$$

(r hängt von n ab, und die Exponenten k_i sind nicht-negative ganze Zahlen.)
Die Anzahl der Teiler von n ist dann gegeben durch $A(n) = \prod_{i=1}^{r} (k_i + 1)$, wie man durch vollständige Induktion über r beweisen kann (s. Aufgabe 31).
Für $A(n) = 3 = 2 + 1$ ist $k_i = 2$, d. h. $n = p_i^2$ mit p_i als i-ter Primzahl (evtl. vorausgehende wie auch alle nachfolgenden Primzahlen haben den Exponenten 0). Also sind die *Primzahlquadrate* genau diejenigen Zahlen, die genau drei Teiler besitzen.

Aufgabe 33
p_1 und p_2 seien zwei aufeinander folgende Primzahlen, die beide größer als 2 sind. Beweise, dass dann $q = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$ keine Primzahl ist.

Lösung
„Zwei aufeinander folgende Primzahlen“ bedeutet, dass wegen $p_1 \leq \frac{p_1+p_2}{2} \leq p_2$ für $p_1 < p_2$ zwischen diesen beiden *keine weitere* Primzahl liegt. Das arithmetische Mittel dieser beiden Primzahlen kann daher selbst keine Primzahl sein.
Lässt man die Voraussetzung „aufeinander folgend“ fallen, so findet man sofort ein Gegenbeispiel: $\frac{1}{2}(3+11) = 7$, und 7 ist Primzahl.

Aufgabe 34
Beweise: Wird von einer natürlichen Zahl m – dargestellt im Zehnersystem – ihre Quersumme (eigtl. Ziffern*summe) subtrahiert, so ist das Ergebnis stets durch 9 teilbar.*

Lösung
m habe die Darstellung

$$m = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \ldots + 10^2 a_2 + 10 a_1 + a_0, \quad \text{wobei } a_i \in \{0; 1; \ldots; 9\} \text{ für } 0 \leq i \leq n.$$

Dann ist die Quersumme $Q(m) = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0$ und die Differenz

$$m - Q(m) = (10^n - 1)a_n + (10^{n-1} - 1)a_{n-1} + \ldots + (10 - 1)a_1 + 0.$$

Da hier alle Summanden durch 9 teilbar sind, so ist auch die Differenz $m - Q(m)$ durch 9 teilbar.

(*Hinweis.* Auf der bewiesenen Behauptung beruhen manche Zaubertricks mit Spielkarten, Streichhölzern o. ä..)

Aufgabe 35
Gesucht wird die kleinste natürliche Zahl n, so dass die Quersumme (besser: Ziffernsumme) von n und $n+1$ durch 19 teilbar ist.

Lösung
Die kleinste natürliche Zahl mit der Quersumme 19 ist 199. Auch alle Zahlen $199 \cdot 10^k$ mit beliebigem $k \in \mathbb{N}$ haben die Quersumme 19.
Von den insgesamt 42 dreistelligen Zahlen mit der Quersumme 19 haben keine zwei Zahlen den Abstand 1 voneinander.
Man sucht daher ein minimales $k \in \mathbb{N}$ so, dass auch $199 \cdot 10^k - 1$ eine durch 19 teilbare Quersumme hat; diese Zahl ist so aufgebaut:

$$n = 198\,\underbrace{99\ldots9}_{k \text{ Neunen}}$$

und die Anzahl der gekennzeichneten Neunen ist zu bestimmen..
Für die Quersumme gilt mit einem geeigneten $m \in \mathbb{N}$

$$1 + 9 + 8 + 9 \cdot k = 19m,$$

d. h. $9(2 + k) = 19m$. Wegen ggT$(19; 9)$ = 1 ist das kleinstmögliche k bestimmt durch $k + 2 = 19$, d. h. durch $k = 17$. Dann ist $m = 9$. Damit hat man

$$n = 19\,899\,999\,999\,999\,999\,999$$
$$n + 1 = 19\,900\,000\,000\,000\,000\,000$$

und QS(n) = $1 + 9 + 8 + 9 \cdot 17 = 19 \cdot 9$, QS$(n + 1)$ = $1 + 9 + 9 = 19$.

Aufgabe 36
Man beweise, dass zu jeder natürlichen Zahl ≥ 1 eine durch 2^n teilbare Zahl a_n existiert, deren Dezimaldarstellung genau n Ziffern enthält, deren jede gleich 1 oder 2 ist.

Lösung
Beweis durch vollständige Induktion über n:
Induktionsanfang: Für $n = 1$ nehme man $a_1 = 2$ als durch 2 teilbare Zahl, für $n = 2$ wähle man $a_2 = 12$ als durch 2^2teilbare Zahl.
Induktionsschritt: Vorausgesetzt sei, dass eine durch 2^n teilbare Zahl a_n der verlangten Art existiert. Zu unterscheiden sind dann zwei Fälle:
1) Sei 2^{n+1} Teiler von a_n. Um die Zahl a_{n+1} zu erhalten, setze man die Ziffer 2 vor die vorderste Stelle von a_n; dann hat man

$$a_{n+1} = 2 \cdot 10^n + a_n = 2^{n+1} \cdot 5^n + a_n,$$

und man sieht, dass diese Zahl aus $(n + 1)$ Ziffern 1 oder 2 besteht und durch 2^{n+1} teilbar ist;
2) Sei 2^{n+1} kein Teiler von a_n; dann ist $a_n = 2^n k$ mit einer geeigneten ungeraden ganzen Zahl k. In diesem Fall setze man die Ziffer 1 vor die vorderste Stelle von a_n; dann hat man

$$a_{n+1} = 10^n + a_n = 2^n \cdot 5^n + 2^n \cdot k = 2^n(5^n + k).$$

Da k ungerade, so ist $5^n + k$ gerade; daher ist a_{n+1} durch 2^{n+1} teilbar und somit die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 37
Man zeige: Bei der üblichen Herstellung eines Dezimalbruches durch Division natürlicher Zahlen kann niemals ein Neuner-Ende auftreten.

Lösung
Angenommen, ab m-ter Nachkommastelle träte bei $b : a$ doch ein Neuner-Ende auf, d. h. man hätte für alle $i \in \mathbb{N}$ mit $i \geq m$

$$0 \leq r_i < a \quad \text{und} \quad 10r_i = 9a + r_{i+1}.$$

Letzteres heißt anders geschrieben

$$r_i = (1 - 10^{-1})a + 10^{-1}r_{i+1}. \tag{1}$$

Dann kann man aber auch

$$r_m = (1 - 10^{-n})a + 10^{-n}r_{m+n} \tag{2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mittels vollständiger Induktion beweisen.

Induktionsanfang: $r_m = (1-10^{-1})a+10^{-1}r_{m+1}$ ist äquivalent mit $10r_m = 9a+r_{m+1}$, was nach der gemachten Annahme gelten soll.
Induktionsschritt: Zu zeigen ist, dass unter der Induktionsvoraussetzung auch

$$r_m = (1 - 10^{-(n+1)})a + 10^{-(n+1)})r_{m+n+1}$$

gilt. Wegen $m + n \geq m$ darf man in (1) $m + n$ statt i schreiben und erhält damit

$$\begin{aligned} r_{m+n} &= (1 - 10^{-1})a + 10^{-1}r_{m+n+1} \\ &= 9 \cdot 10^{-1}a + 10^{-1}r_{m+n+1}, \end{aligned}$$

also

$$10^{-n}r_{m+n} = (10^{-n-1}(9a + r_{m+n+1}),$$

so dass nun

$$
\begin{aligned}
r_m &= (1-10^{-n})a + 10^{-n} r_{m+n} \\
&= (1-10^{-n})a + 10^{-n-1}(9a + r_{m+n+1}) \\
&= a - 10^{-n}a + 10^{-n-1}(10-1)a + 10^{-n-1} r_{m+n+1} \\
&= a - 10^{-n}a + 10^{-n}a - 10^{-n-1}a + 10^{-n-1} r_{m+n+1} \\
&= (1-10^{-(n+1)})a + 10^{-(n+1)} r_{m+n+1},
\end{aligned}
$$

womit (2) bewiesen ist.

Aus (2) folgt aber nun

$$
\begin{aligned}
a - r_m &= a - (1-10^{-n})a - 10^{-n} r_{m+n} \\
&= 10^{-n}(a - r_{m+n}) \\
&\leq 10^{-n} a
\end{aligned}
$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ im Widerspruch zu $a > r_m$, so dass die eingangs gemachte Annahme falsch ist. Daher gilt die Behauptung, q. e. d.

Aufgabe 38
Unter welcher Bedingung ist der Mittelwert dreier natürlicher Zahlen ebenfalls eine natürliche Zahl?

Lösung
Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$ und ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a < b < c$; weiter sei $a = b - k$ und $c = b + l$ mit $k, l \in \mathbb{N}$. Aus

$$(b-k) + b + (b+l) = 3n$$

ergibt sich $3b + l - k = 3n$, d. h. $3(b-n) = k - l$, und das bedeutet: Genau dann, wenn die Differenz der Abstände der beiden „äußeren“ Zahlen von der „mittleren“ Zahl ein Vielfaches von 3 ist, so ist das arithmetische Mittel dieser drei Zahlen ebenfalls eine natürliche Zahl.

Aufgabe 39
Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ beliebig vorgegeben. Man beweise, dass es immer ein Paar (x, y) positiver ganzer Zahlen x, y gibt, so dass

$$x + \frac{(x+y-1)(x+y-2)}{2} = n.$$

Lösung
Zunächst bemerkt man, dass

$$x + \frac{(x+y-1)(x+y-2)}{2} = x + \sum_{i=1}^{x+y-2} i \quad \text{für beliebige } x, y \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Weiter liefert eine tabellarische Übersicht

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
x	1	1	2	1	2	3	1	2	3	4	1	2	...
y	1	2	1	3	2	1	4	3	2	1	5	4	...

Sie gibt Anlass zur Bildung der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ der in der Tabelle auftretenden x-Werte:

$$x_n = \max\left\{n - \frac{(k-1)k}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \ \wedge\ n - \frac{(k-1)k}{2} \leq k\right\} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}.$$

Wegen $n - \frac{(k-1)k}{2} \leq k \ \Leftrightarrow\ n \leq \frac{k(k+1)}{2}$ kann auch

$$x_n = \max\left\{n - \frac{(k-1)k}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \ \wedge\ n \leq \frac{k(k+1)}{2}\right\}$$

oder aber auch

$$x_n = \min\left\{n - \frac{k(k+1)}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \ \wedge\ \frac{k(k+1)}{2} < n\right\}$$

geschrieben werden. Zu jedem x_n findet man das passende y_n aus

$$\frac{1}{2}(x_n + y_n - 1)(x_n + y_n - 2) = n - x_n \ \Leftrightarrow\ y_n = \frac{1}{2}(3 - 2x_n + \sqrt{8(n - x_n) + 1}).$$

Der zweite mögliche Fall $y_n = \frac{1}{2}(3 - 2x_n - \sqrt{8(n - x_n) + 1})$ scheidet aus, da diese y_n nicht positiv ganzzahlig sind.
Damit ist zu beliebig vorgegebenem $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ die Existenz eines Paares (x, y) positiver ganzer Zahlen mit $x + \frac{(x+y-1)(x+y-2)}{2} = n$ *konstruktiv* (!) bewiesen.

Aufgabe 40
Man ermittle alle positiven ganzen Zahlen n, für die $n^3 + 4^n - n - 1$ Primzahl ist.

Erste Lösung
Setzt man $T = n^3 + 4^n - n - 1$, so liefert eine Wertetabelle zunächst

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
T	3	21	87	315	1143	4305	16719	66039	262863	...
	$3\cdot 1$	$3\cdot 7$	$3\cdot 29$	$3\cdot 105$	$3\cdot 381$	$3\cdot 1435$	$3\cdot 5573$	$3\cdot 22013$	$3\cdot 87621$	...

Die hieraus zu entnehmende Vermutung, dass 3 ein Teiler von T für jedes positive ganzzahlige n ist, soll nun als Behauptung bewiesen werden. Umformung liefert

$$\begin{aligned} n^3 + 4^n - n - 1 &= n(n^2-1) + 4^n - 1 \\ &= n(n-1)(n+1) + (4-1)\cdot(4^{n-1} + 4^{n-2} + \ldots + 4 + 1) \\ &= \underbrace{\underbrace{(n-1)n(n+1)}_{\text{teilbar durch 3}} + \underbrace{3\cdot(4^{n-1} + \ldots + 1)}_{\text{teilbar durch 3}}}_{\text{teilbar durch 3}} \end{aligned}$$

Also liefert T nur für $n = 1$ eine Primzahl, nämlich 3.

Zweite Lösung

$$\begin{aligned} n^3 + 4^n - n - 1 &= n(n^2-1) + (2^2)^n - 1 \\ &= n(n^2-1) + (2^n)^2 - 1 \\ &= n(n^2-1) + (2^n+1)(2^n-1) \\ &= \underbrace{(n-1)n(n+1)}_{\text{teilbar durch 3}} + \underbrace{(2^n+1)(2^n-1)}_{\text{teilbar durch 3}}; \end{aligned}$$

denn von den drei Zahlen $2^n + 1, 2^n, 2^n - 1$ ist mindestens eine durch 3 teilbar; hierfür kommt 2^n als 2er-Potenz allerdings nicht in Frage. Wie zuvor in der ersten Lösung liefert T nur für $n = 1$ eine Primzahl.

Aufgabe 41
Weshalb sind alle sechsstelligen Zahlen von der Form 385385, 771771 oder 501501 durch 13 teilbar?

Lösung
Allgemein geht es um Zahlen der Form

$$a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c$$

mit $a, b, c \in \{0; 1; 2; \ldots; 9\}$ und $a \neq 0$. Die Darstellung kann umgeformt werden in

$$10^3 \cdot (a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c) + (a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c) = (10^3 + 1)(a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c),$$

und wegen $10^3 + 1 = 1001 = 13 \cdot 11 \cdot 7$ ist die so dargestellte Zahl durch 13 (wie auch durch 11 und 7) teilbar.

Aufgabe 42
Beweise, dass für alle natürlichen Zahlen m auch der Ausdruck $\frac{m}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{6}$ eine natürliche Zahl ist.

Lösung
Der gegebene Term kann faktorisiert werden:

$$\frac{m}{3}+\frac{m^2}{2}+\frac{m^3}{6} = \frac{1}{6}(2m+3m^2+m^3) = \frac{1}{6}m(m^2+2m+1+m+1) = \frac{1}{6}m((m+1)^2+m+1) = \frac{1}{6}m(m+1)(m+2).$$

Mindestens einer der drei aufeinander folgenden Faktoren $m, m+1, m+2$ ist durch 2 teilbar und außerdem genau einer von ihnen auch durch 3 teilbar. Somit ist $m(m+1)(m+2)$ durch 6 teilbar, so dass der gegebene Ausdruck für jede natürliche Zahl n ebenfalls eine natürliche Zahl darstellt.

Hinweis. Aus der Umformung $\frac{m}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{6} = \frac{(m+2)(m+1)m}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \binom{m+2}{3}$ entnimmt man direkt, dass der gegebene Ausdruck stets eine natürliche Zahl darstellt, weil alle Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ mit $0 \leq k \leq n$ und $k, n \in \mathbb{N}$ dies tun.

Aufgabe 43
Welche sind diejenigen natürlichen Zahlen, die sich nicht als Summe mehrerer aufeinander folgender natürlicher Zahlen schreiben lassen?

Lösung
Durch *systematisches Probieren* wird man zu folgender Aussage geführt:
Genau die Zweierpotenzen 2^k mit $k \geq 0$ lassen sich nicht als Summe mehrerer aufeinander folgender natürlicher Zahlen schreiben.
Sollte diese Aussage sich als zutreffend erweisen, müssten alle natürlichen Zahlen, die keine Zweierpotenzen sind, als Summe aufeinander folgender natürlicher Zahlen darstellbar sein. Deshalb werde zunächst untersucht, ob und weshalb dies der Fall ist.
Sei n eine ungerade natürliche Zahl; dann kann man die Zerlegung $n = \frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2}$ als eine Darstellung der verlangten Art nehmen. (Diese muss aber nicht die einzig mögliche sein, wie etwa das Beispiel

$$25 = 12 + 13 \quad \text{und} \quad 25 = 3 + 4 + 5 + 6 + 7$$

zeigt.)
Sei nun n eine gerade natürliche Zahl, und sei r die Anzahl der aufeinander folgenden Summanden und a der Startwert; dann ist

$$n = a + (a+1) + \ldots + (a + (r-1)) = r \cdot a + (0 + 1 + \ldots + (r-1)) = ra + \frac{(r-1)r}{2} = \frac{r}{2}(r + (2a-1)).$$

Also muss n von der Form $n = \frac{r}{2}(r + (2a-1))$ sein, anders geschrieben $2n = r(r + (2a-1))$. Dies ist aber nur möglich, wenn entweder r gerade oder $r + (2a-1)$ gerade ist, anders gesagt: wenn genau einer der beiden Faktoren ungerade ist ($2a-1$ ist in jedem Fall ungerade). So lassen sich Zweierpotenzen jedoch nicht darstellen; denn $2n = 2^{k+1} = 2^k \cdot 2$ hat keinen ungeraden Faktor. Damit ist bewiesen, dass die eingangs formulierte Aussage zutrifft.
Es schließt sich hier noch die Frage an, wie man für eine Nicht-Zweierpotenz n eine Darstellung als Summe aufeinander folgender natürlicher Zahlen finden kann. Eine Nicht-Zweierpotenz n enthält mindestens einen ungeraden Faktor u, und dann ist n die Summe von u aufeinander folgenden Summanden mit $\frac{n}{u}$ als mittlerem Summanden; denn der erste und letzte, der zweite und der vorletzte usw. Summand ergeben jeweils den gleichen Wert $2 \cdot \frac{n}{u}$.

Beispiel: 1) Für $n = 798 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 19$ kann man $u = 7$ (oder 3 oder 19) wählen; man erhält 7 Summanden mit $\frac{n}{u} = 114$ als mittlerem Summanden: $111 + 112 + 113 + 114 + 115 + 116 + 117$.
2) Für $n = 112 = 2^4 \cdot 7$ ist $u = 7$, $\frac{n}{u} = 16$ der mittlere Summand und damit $112 = 13+14+15+16+17+18+19$.

Aufgabe 44
a) Zeige, dass die Summe dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen stets durch 3 teilbar ist.
b) Ist die Summe von 4 (5) aufeinander folgenden natürlichen Zahlen immer durch 4 (5) teilbar?
c) Finde weitere Teilbarkeitsregeln dieser Art.
d) Zeige, dass $n^2(n^2-1)(n^2-4)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ durch 360 teilbar ist.
e) Zeige, dass das um 1 vermehrte Produkt vierer aufeinander folgender natürlicher Zahlen stets eine Quadratzahl ist.
f) Zeige, dass die Summe aus dem Produkt von vier aufeinander folgenden ungeraden ganzen Zahlen und der Zahl 16 stets eine Quadratzahl liefert.

Lösung
a) $a + (a+1) + (a+2) = 3a + 3 = 3(a+1)$ für jedes $a \in \mathbb{N}$.

b) Gegenbeispiel für 4 Zahlen: $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ ist nicht teilbar durch 4.
Für 5 aufeinanderfolgende Zahlen gilt $a + (a+1) + (a+2) + (a+3) + (a+4) = 5a + 10 = 5(a+2)$ für jedes $a \in \mathbb{N}$, d. h. Teilbarkeit durch 5.

c) Fortsetzung des Verfahrens:
für 6 Zahlen: $5a + 10 + (a+5) = 6a + 15 = 3(2a+5)$, teilbar durch 3 aber nicht durch 6;
für 7 Zahlen: $6a + 15 + (a+6) = 7a + 21 = 7(a+3)$, teilbar durch 7;
für 8 Zahlen: $7a + 21 + (a+7) = 8a + 28 = 4(2a+7)$, teilbar durch 4 aber nicht durch 8;
für 9 Zahlen: $8a + 28 + (a+8) = 9a + 36 = 9(a+4)$, teilbar durch 9.

Dies gibt Anlass zu folgender
Behauptung: Die Summe aus n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist genau dann durch n teilbar, wenn n eine ungerade Zahl ist.
Beweis: Durch Umformung der Summe findet man
$a+(a+1)+(a+2)+\ldots+(a+(n-1)) = na+(1+2+\ldots+(n-1)) = na+\frac{1}{2}(n-1)n = n\left(a + \frac{1}{2}(n-1)\right)$,
und $\frac{n-1}{2} \in \mathbb{N}$ genau dann, wenn n ungerade natürliche Zahl ist.

d) Es ist $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$. Vollständige Faktorisierung des gegebenen Ausdrucks ergibt

$$n^2(n^2-1)(n^2-4) = n\left((n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)\right).$$

Ist von den innerhalb der äußeren Klammer stehenden fünf aufeinander folgenden Faktoren $n+2$ durch 3 teilbar, so auch der Faktor $n-1$; ist dagegen $n+1$ durch 3 teilbar, so auch $n-2$. Ist n durch 3 teilbar, so ist wegen des doppelten Vorkommens von n der Ausdruck durch 3^2 teilbar. Auf jeden Fall ist der Ausdruck somit durch 9 teilbar.
Weiter ist von den innerhalb der äußeren Klammer stehenden fünf aufeinander folgenden Faktoren genau einer durch 5 teilbar (vgl. Teil c)); somit ist der Ausdruck auf jeden Fall durch 45 teilbar.
Falls $n = 1$ oder $n = 2$, so liefert der Ausdruck den Wert 0, und 0 ist trivialerweise durch 360 teilbar.
Sei nun $n \geq 3$. Mindestens zwei von den innerhalb der äußeren Klammer stehenden fünf aufeinander folgenden Faktoren ist durch 2 teilbar und dann einer von diesen sogar durch 4 teilbar, so dass der Ausdruck auch durch 8 teilbar ist.
Zusammengefasst hat sich ergeben: der Ausdruck ist durch $8 \cdot 45$, d. h. durch 360 teilbar.

e) Durch zweckmäßiges Umordnen findet man

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)(n+3)+1 &= (n(n+3))\left((n+1)(n+2)\right)+1 \\ &= (n^2+3n)\big((n^2+3n)+2\big)+1 \\ &= (n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1 = (n^2+3n+1)^2. \end{aligned}$$

f) Zu zeigen ist, dass die Gleichung

$$(2k+1)(2k+3)(2k+5)(2k+7)+16 = z^2, \quad \text{wobei } k, z \in \mathbb{Z}.$$

gilt. Durch äquivalente Umformungen erhält man

$$\begin{aligned} (2k+1)(2k+7)\cdot(2k+3)(2k+5) &= z^2-16 \\ (4k^2+16k+7)\cdot(4k^2+16k+15) &= (z-4)(z+4) \\ (4k^2+16k+11)\cdot(4k^2+16k+11) &= z^2, \end{aligned}$$

und die vorletzte und damit auch die letzte Gleichung gilt, weil

$$(4k^2+16k+15)-(4k^2+16k+7) = 8 = (z+4)\ -\ (z-4).$$

Damit ist die Gültigkeit auch der eingangs notierten Gleichung gezeigt.

Aufgabe 45
Man zeige, dass die beiden Terme $2a+3b$ und $9a+5b$ für genau die gleichen ganzzahligen Werte von a und b durch 17 teilbar sind.

Lösung
Man hat die beiden gegebenen Terme im Hinblick auf Vielfachheit von 17 zu untersuchen und findet z. B.

$$3(9a+5b)-5(2a+3b) = 17a,$$

und hat damit die gemeinsame Teilbarkeit beider Terme durch 17 schon bewiesen.

Aufgabe 46
Man beweise, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ die Zahl $5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}$ durch 19 teilbar ist.

Lösung

$$\begin{aligned} 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1} &= (5^2)^n \cdot 5 \cdot 2^n \cdot 4 + 3^n \cdot 9 + 2^n \cdot 2^n \cdot 2 \\ &= (25^n \cdot 20 + 6^n \cdot 18) \cdot 2^n \\ &= (25^n \cdot (19+1) + 6^n \cdot (19-1)) \cdot 2^n \\ &= ((25^n + 6^n) \cdot 19 + (25^n - 6^n)) \cdot 2^n \\ &= (\underbrace{(25^n + 6^n) \cdot 19}_{\text{Vielfaches von 19}} + \underbrace{(25-6) \cdot (25^{n-1} - \ldots + \ldots)}_{\text{Vielfaches von 19}}) \cdot 2^n, \end{aligned}$$

und die Summe zweier Vielfachen von 19 ist ebenfalls Vielfaches von 19.

Aufgabe 47
Welche ganzen Zahlen $m > 1$ haben die Eigenschaft, dass m Teiler des Produktes der Zahlen $1; 2; \ldots; m-1$ ist?

Lösung
Probieren (evtl. mittels Taschenrechner) liefert die Vermutung, dass die genannte Eigenschaft genau auf alle natürlichen Zahlen > 4 zutrifft, die nicht Primzahlen sind.
Sei $m = p$ und p Primzahl; dann ist p von allen Zahlen $1; 2; \ldots; p-1$ verschieden und in deren Produkt nicht als Teiler enthalten.
Falls $m = 4$, so ist m kein Teiler des Produktes $1 \cdot 2 \cdot 3$.
Ist $m > 4$ und keine Primzahl, so ist m zusammengesetzt, so dass man

$$m = k \cdot p \quad \text{mit } \; k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \; p \text{ Primzahl},$$

schreiben kann, wobei sogar $k \geq 2$ und $p \leq \frac{m}{2}$ ist. Dann sind aber sowohl k als auch p unter den Zahlen $1; 2; \ldots; m-1$ vorhanden, und m ist deshalb Teiler des Produktes dieser Zahlen.

Aufgabe 48
a) Bilde für einige Primzahlen p außer 2 und 5 die vierte Potenz p^4. Was fällt auf? Warum gilt diese Eigenschaft für alle *Primzahlen außer 2 und 5?*
b) Bilde für Primzahlen $p > 5$ die Zahl $p^4 - 1$. Durch welche größte *Zahl ist sie echt teilbar?*
c) Zeige: Für alle Primzahlen $p > 3$ ist $p^2 - 1$ ein Vielfaches von 24.
d) Beweise: Sind p und q beliebige Primzahlen > 3, so ist entweder *ihre Summe* oder *ihre Differenz ohne Rest durch 6 teilbar.*
e) Beweise: Die Quadratdifferenz $p^2 - q^2$ zweier verschiedener beliebiger Primzahlen > 3 ist ein ganzzahliges Vielfaches von 12.

Lösung
a) Mit Ausnahme von 2 und 5 haben die vierten Potenzen aller Primzahlen die Endziffer 1; denn diese Primzahlen selbst haben 1; 3; 7 oder 9 als Endziffer. In jedem dieser Fälle liefert Potenzierung mit 4 die Endziffer 1.

b) Sei $p > 5$ und p Primzahl. Dann findet man folgende Zerlegungen:

$$p^4 - 1 = (p^2-1)(p^2+1) = (p-1)(p+1)(p^2+1) = (p-1)(p^3+p^2+p+1) = (p+1)(p^3-p^2+p-1).$$

Größter Teiler von $p^4 - 1$ ist demnach $p^3 + p^2 + p + 1$.

c) Sei $p > 3$ und p Primzahl. Es ist $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$, und die beiden Faktoren $p-1$ und $p+1$ sind *gerade* natürliche Zahlen. Außerdem ist genau eine dieser beiden Zahlen auch durch 4 teilbar, und von den drei aufeinander folgenden Zahlen $p-1$, p, $p+1$ ist genau eine durch 3 teilbar. Wegen $p > 3$ scheidet p dabei aus. Also ist insgesamt betrachtet $p^2 - 1$ Vielfaches von $2 \cdot 4 \cdot 3$, d. h. von 24.

d) Seien p, q Primzahlen > 3 und ohne Beschränkung der Allgemeinheit $p > q$. Dann ist zunächst

$$(p+q)(p-q) = p^2 - q^2 = (p^2 - 1) - (q^2 - 1)$$

Vielfaches von 24, wie soeben in c) gezeigt. Ist nun $p + q = 6k$ mit $k \in \mathbb{N}$, so $p - q = p + q - 2q = 6k - 2q = 2(3k - q)$. Wegen $q > 3$ ist $3k - q$ kein Vielfaches von 3, so dass $p - q$ kein Vielfaches von 6 ist.
Entsprechend sieht man, dass im Fall $p - q = 6k$ mit $k \in \mathbb{N}$ die Summe $p + q$ kein Vielfaches von 6 ist.

e) Aus dem Beweis zu c) und d) folgt sofort, dass $p^2 - q^2$ ein ganzzahliges Vielfaches sogar von 24 ist, also erst recht von 12.

Aufgabe 49
Beweise den „kleinen“ Satz von FERMAT*:*
Für eine beliebige Primzahl p und eine beliebige ganze Zahl a gilt: $a^p - a$ ist durch p teilbar, anders geschrieben:

$$a^p \equiv a \mod p.$$

Äquivalente Aussage: Falls a eine ganze, nicht durch die Primzahl p teilbare Zahl ist, so gilt: $a^{p-1} - 1$ ist durch p teilbar, anders geschrieben:

$$a^{p-1} \equiv 1 \mod p.$$

Lösung
Die Äquivalenz der beiden Formulierungen ergibt sich daraus, dass die zweite Fassung durch Multiplikation mit a in die erste Fassung übergeht und umgekehrt die erste Fassung durch Division in die zweite, da man in Kongruenzen durch teilerfremde Zahlen teilen darf.
Beim Beweis darf man sich auf nichtnegative Zahlen a beschränken; denn für negative a folgt die Aussage aus

$$(-a)^p - (-a) = -(a^p - a) \text{ für } p > 2 \quad \text{bzw.} \quad (-a)^2 - (-a) = a^2 - a + 2a = a(a-1) + 2a \text{ für } p = 2.$$

Nun zum Beweis der Aussage durch vollständige Induktion über alle nichtnegativen ganzen Zahlen a.
Induktionsanfang: $0^p - 0 = 0$, und 0 ist durch p teilbar.
Induktionsschritt: Sei $a^p - a$ für ein nichtnegatives a durch p teilbar; zu zeigen ist, dass dann auch $(a+1)^p - (a+1)$ durch p teilbar ist.
Nach dem *binomischen Lehrsatz* gilt

$$(a+1)^p - (a+1) = a^p + \binom{p}{1} a^{p-1} + \ldots + \binom{p}{p-1} a + 1 - (a+1),$$

und wie man aus der Darstellung

$$\binom{p}{k} = \frac{p \cdot (p-1) \cdot \ldots \cdot (p-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}$$

ersieht, tritt p für $1 \leq k \leq p-1$ nur im Zähler auf. Daher folgt

$$(a+1)^p - (a+1) \equiv a^p + 1 - (a+1) \equiv a^p - a \mod p,$$

d. h. auch $(a+1)^p - (a+1)$ ist durch p teilbar.

Aufgabe 50
Sei p eine Primzahl und $n \in \mathbb{N}$; dann gilt: falls $pn+1$ Quadratzahl, so lässt sich $n+1$ als Summe von p Quadraten darstellen. (Auch 0^2 ist als Quadratzahl zugelassen.)

Lösung
Sei $pn + 1 = m^2$ mit $m \in \mathbb{N}$; dann ist

$$n = \frac{(m+1)(m-1)}{p}, \tag{3}$$

und wegen $n \in \mathbb{N}$ gilt jetzt (I) $p \big| m-1$ oder (II) $p \big| m+1$.

Zu (I): Für $pr = m - 1$ mit $r \in \mathbb{N}$, d. h. $m = pr + 1$ erhält man aus (3)

$$n+1 = \frac{(pr+2)pr}{p} + 1 = pr^2 + 2r + 1 = (p-1)r^2 + (r+1)^2 = \sum_{i=1}^{p-1} r^2 + (r+1)^2.$$

Zu (II): Für $ps = m + 1$ mit $s \in \mathbb{N}$, d. h. $m = ps - 1$ erhält man aus (3)

$$n+1 = \frac{ps(ps-2)}{p} + 1 = ps^2 - 2s + 1 = (p-1)s^2 + (s-1)^2 = \sum_{i=1}^{p-1} s^2 + (s-1)^2.$$

Damit ist für beide Fälle die Darstellbarkeit von $n + 1$ als Summe von p Quadratzahlen gezeigt.
Zahlenbeispiele: a) Für $p = 7,\ n = 5$: $n + 1 = 6 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2$.
b) Für $p = 5,\ n = 24$: $n + 1 = 25 = 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2$.

Aufgabe 51 (aus: 29. IMO 1988)
Man zeige: Wenn $a, b, q \in \mathbb{Z}^+$ und $a^2 + b^2 = q(ab + 1)$, so ist q eine Quadratzahl.

Lösung
Wegen der Symmetrie in a, b darf man $a \leq b$ annehmen. Weiter gilt $a = b \;\Leftrightarrow\; a = q = 1$; denn falls $a = b$, so $2a^2 = q(a^2 + 1) \;\Leftrightarrow\; (2 - q)a^2 = 1$, und diese Gleichung ist wegen $a > 0$ nur für $a = q = 1$ erfüllbar. Ist umgekehrt $a = q = 1$, so hat man $1 + b^2 = b + 1$, und wegen $b > 0$ ist diese Gleichung nur für $b = 1$ erfüllbar.
Nun darf man sogar $a < b$ annehmen.

Mittels TR-Einsatz und ausreichender Geduld findet man alle Lösungen mit $a \leq 150$ und $b \leq 1000$:

a	1	2	3	4	5	6	7	**8**	8	9	10	27	**30**	**112**
b	1	**8**	27	64	125	216	343	**30**	512	729	1000	240	**112**	418
q	1	4	9	16	25	36	49	4	64	81	100	9	4	4

Die Tabelle zeigt $(a; b; q) = (c; c^3; c^2)$ mit $c \in \mathbb{Z}^+$ als Lösungstripel: $c^2 + c^6 = c^2(c^4 + 1)$. Man hat also für jede Quadratzahl ein Lösungstripel gefunden.

Schaut man sich jetzt diejenigen Tripel $(a; b; q)$ an, die dasselbe q liefern – das sind z. B. für $q = 4$ die Tripel $(2; 8; 4)$, $(8; 30; 4)$, $(30; 112; 4)$ und $(112; 418; 4)$ –, so sieht man, dass die *zweite* Komponente jedes Tripels gleich der *ersten* Komponente des nächsten Tripels ist. Dies deutet auf die Transformation

$$(a; b; q) \;\mapsto\; (b; a_1; q).$$

Die diophantische Gleichung $a^2 + b^2 = q(ab+1)$, anders geschrieben

$$a^2 - qab + b^2 - q = 0, \tag{4}$$

ist eine quadratische Gleichung in a und hat zwei Lösungen a, a_1; für diese gilt nach dem Wurzelsatz des VIETA

$$a + a_1 = qb \text{ und } \ a \cdot a_1 = b^2 - q. \tag{5}$$

Die linke Gleichung zeigt, dass mit a (> 0) auch a_1 eine ganze Zahl ist, und es ist

$$a_1 = qb - a.$$

Man prüft sofort nach, dass auch $(b; a_1; q)$ ein Lösungstripel der (diophantischen) Gleichung (4) ist. Die Transformation

$$(a; b; q) \ \mapsto \ (b; qb{-}a; q)$$

erzeugt eine unendliche Menge von Lösungstripeln, die alle zum gleichen q gehören.
Ausgehend von dem Lösungstripel $(a; b; q)$ mit $a < b$ kann man aber auch einen Schritt zurückgehen:

$$(a; b; q) \ \mapsto \ (b_1; a; q).$$

Hier ist

$$b_1 = qa - b. \tag{6}$$

In der Tat: man kann (4) auch als quadratische Gleichung in b deuten:

$$b^2 - qba + a^2 - q = 0; \tag{7}$$

sie hat (wieder nach dem Wurzelsatz des VIETA) zwei Lösungen b, b_1 mit $b_1 + b = qa$. Also ist auch b_1 eine ganze Zahl, und aus $b_1 = qa - b$ folgt (6).
Ausgehend von einem Lösungstripel $(a; b; q)$ kann man wiederholt zurückgehen mit der Abbildung

$$(a; b; q) \ \mapsto \ (qa - b; a; q),$$

bis man bei $a = 0$ ankommt. Dann ist $q = b^2$, d. h. q ist stets Quadratzahl.

Aufgabe 52
Sei p Primzahl, $p \geq 3$. Dann kommt p in der Primfaktorzerlegung von $\sum_{i=1}^{p} i^p$ genau zweimal vor.

Lösung
Zweierlei ist zu zeigen: (I) $p^2 \Big| \sum_{i=1}^{p} i^p$ und (II) $p^3 \not\Big| \sum_{i=1}^{p} i^p$.

Zu (I): Die Behauptung ist äquivalent mit $\sum_{i=1}^{p} i^p \equiv 0 \mod p^2$. Durch Umordnung und Zusammenfassung des ersten Summanden mit dem vorletzten, des zweiten mit dem vorvorletzten usw. erhält man (p ist ungerade!)

$$\sum_{i=1}^{p} i^p = (1^p + (p-1)^p) + (2^p + (p-2)^p) + \ldots + ((p-2)^p + (p-1)^p) + p^p = \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} (i^p + (p-i)^p) + p^p.$$

Nun gilt

$$i^p+(p-i)^p=(i^p-(i-p)^p)=(i-(i-p))\left(i^{p-1}+i^{p-2}(i-p)+\ldots+i(i-p)^{p-2}+(i-p)^{p-1}\right)$$
$$=p\cdot\sum_{j=0}^{p-1}i^{p-1-j}(i-p)^j,$$

und hierin ist auch der zweite Faktor durch p teilbar, wie man mittels des *binomischen Lehrsatzes* zeigt:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{p-1}i^{p-1-j}(i-p)^j&=\sum_{j=0}^{p-1}\left(i^{p-1-j}\cdot\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}i^{j-k}(-p)^k\right)\\&\equiv\sum_{j=0}^{p-1}i^{p-1-j}\cdot i^{j-0}(-p)^0=\sum_{j=0}^{p-1}i^{p-1}=p\cdot i^{p-1}\equiv 0\mod p.\end{aligned}$$

Damit hat sich ergeben:

$$\sum_{i=1}^{p}i^p\equiv 0\mod p^2.$$

Zu (II): Hier benötigen wir zuerst den Nachweis, dass $i^p+(p-i)^p\equiv p^2\mod p^3$ für ungerade Primzahlen p und ganze Zahlen i, die nicht durch p teilbar sind, gilt. Wie zuvor hat man zunächst wieder

$$i^p+(p-i)^p=p\cdot\sum_{j=0}^{p-1}i^{p-1-j}(i-p)^j$$

und hat den zweiten Faktor $\mod p^2$ zu betrachten. Mittels des *binomischen Lehrsatzes* findet man

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{p-1}i^{p-1-j}(i-p)^j&=\sum_{j=0}^{p-1}\left(i^{p-1-j}\cdot\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}i^{j-k}(-p)^k\right)\\&\equiv\sum_{j=0}^{p-1}i^{p-1-j}\left(\binom{j}{0}i^{j-0}(-p)^0+\binom{j}{1}i^{j-1}(-p)^1\right)\\&=\sum_{j=0}^{p-1}i^{p-1-j}\left(i^j-ji^{j-1}p\right)=\sum_{j=0}^{p-1}i^{p-1}-\sum_{j=0}^{p-1}ji^{p-2}p=\\&=p\,i^{p-1}-p\,i^{p-2}\sum_{j=0}^{p-1}j\\&=p\,i^{p-1}-p\,i^{p-2}\frac{(p-1)p}{2}=p\,i^{p-1}-p^2i^{p-2}\frac{p-1}{2}\equiv p\,i^{p-1}\mod p^2,\end{aligned}$$

Letzteres, da p ungerade und daher $\frac{p-1}{2}$ ganzzahlig ist.
i durchläuft die Zahlen $1;2;\ldots;p-1$, die alle teilerfremd zur Primzahl p sind; daher gilt für diese Zahlen nach dem *„kleinen“* FERMAT*schen Satz* $i^{p-1}\equiv 1\mod p$.
Unter Anwendung der Regel

$$a\equiv b\mod m\quad\Leftrightarrow\quad ka\equiv kb\mod km\quad\text{für }k\neq 0$$

erhält man

$$p\,i^{p-1} \equiv p \mod p^2.$$

Nach nochmaliger Anwendung der Regel folgt mit $\sum_{j=0}^{p-1} i^{p-1-j}(i-p)^j \equiv p\,i^{p-1} \mod p^2$

$$p^2 = p \cdot p \equiv p \cdot \sum_{j=0}^{p-1} i^{p-1-j}(i-p)^j \equiv i^p + (p-i)^p \mod p \cdot p^2,$$

d. h. $i^p + (p-i)^p \equiv p^2 \mod p^3$, und damit ist der erforderliche Nachweis erbracht.

Da p offensichtlich $\frac{p-1}{2}$ nicht teilt, gilt unter Beachtung der Voraussetzung $p \geq 3$

$$\sum_{i=1}^{p} i^p = \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} (i^p + (p-i)^p) + p^p \equiv \frac{p-1}{2} p^2 \not\equiv 0 \mod p^3,$$

und damit ist auch (II) bewiesen.

Aufgabe 53
Sei n eine ungerade natürliche Zahl und $n \geq 3$. Man beweise:
Wenn n sich als Summe zweier ganzer Quadratzahlen darstellen lässt, dann hat n bei Division durch 4 den Rest 1.

Lösung
Sei $n \geq 3$ und $n = x^2 + y^2$ mit $x, y \in \mathbb{N}$.
Da n nach Voraussetzung ungerade sein soll, muss in der Quadratesumme genau einer der beiden Summanden ungerade und der andere gerade sein; denn anderenfalls wäre die Quadratesumme nicht ungerade.
Sei – wegen der Symmetrie in x, y – x^2 ungerade und y^2 gerade; dann ist auch x ungerade und y gerade, d. h. $x = 2k - 1$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $y = 2l$ mit $l \in \mathbb{N}$. Nun findet man

$$n = x^2 + y^2 = (2k-1)^2 + (2l)^2 = 4k^2 - 4k + 1 + 4l^2 = 4(k^2 - k + l^2) + 1$$

und wegen $k, l \geq 1$ ist $k^2 - k + l^2 \geq l^2 \geq 1$. Also lässt n bei Division durch 4 den Rest 1, was zu zeigen war.

Bemerkung. Durch *Kontraposition* der soeben bewiesenen Behauptung erhält man die dann ebenso wahre Aussage: Sei n eine ungerade natürliche Zahl und $n \geq 3$. Wenn n bei Division durch 4 den Rest 3 hat, dann lässt n sich nicht als Summe zweier ganzer Quadratzahlen darstellen, anders formuliert:
Keine natürliche Zahl der Form $4k+3$ mit $k \in \mathbb{N}$ kann als Summe zweier Quadrate natürlicher Zahlen dargestellt werden.

Aufgabe 54
Sei $a_1, a_2, \ldots, a_n$ eine beliebige Permutation der Zahlen $1; 2; \ldots; n$. Man beweise, dass dann für ungerades n das Produkt $(a_1 - 1)(a_2 - 2) \cdot \ldots \cdot (a_n - n)$ stets gerade ist.

Lösung
Die Terme $(a_i - i)$ sind als Faktoren *funktional gebunden*. Betrachtet man sie dagegen als Summanden, ergibt sich eine ganz einfache Lösung nach dem DIRICHLET*schen Schubfachprinzip*. Man findet

$$(a_1-1)+(a_2-2)+\ldots+(a_n-n) = (a_1+a_2+\ldots+a_n)-(1+2+\ldots+n) = (1+2+\ldots+n)-(1+2+\ldots+n) = 0,$$

und 0 ist eine gerade Zahl. Die Anzahl der Klammern links in der Summe ist aber ungerade; also ist der Wert mindestens einer Klammer gerade, da eine ungerade Anzahl nur ungerader Werte keinen geraden Wert ergibt.

Aufgabe 55

Für eine natürliche Zahl n bezeichnet $n!$ (sprich: n Fakultät) das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis n, also z. B. $1! = 1;\ 2! = 1 \cdot 2;\ 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3;\ 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4;$ *usw.*
Bestimme alle natürlichen Zahlen n, für die die Summe $1! + 2! + 3! + \ldots + n!$ *eine Quadratzahl wird.*

Lösung

Durch geschickte Klammersetzung lässt sich der Aufwand zur Berechnung der Summe der Fakultäten der ersten n natürlichen Zahlen in Grenzen halten, wie folgendes Beispiel zeigen soll:

$$\begin{aligned} 1! + 2! + 3! + 4! + 5! + 6! &= 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \\ &= 1 + 2 \cdot (1 + 3 \cdot (1 + 4 \cdot (1 + 5 \cdot (1 + 6)))) \\ &= 873. \end{aligned}$$

Mit der Berechnung beginnt man bei der innersten Klammer.
Nun findet man ganz schnell: $1! = 1;\ 1! + 2! = 3;\ 1! + 2! + 3! = 9;\ 1! + 2! + 3! + 4! = 33$. Nur für $n = 1$ oder $n = 3$ wird also eine Quadratzahl geliefert.
Für $n \geq 5$ ist $n!$ stets ein Vielfaches von 10, d. h. im Zehnersystem dargestellt hat $n!$ stets die Null als Endziffer. Daher liefert $1! + 2! + \ldots + n! = 33 + 5! + \ldots + n!$ für $n \geq 5$ stets eine Zahl mit der Endziffer 3, und eine solche kann keine Quadratzahl sein. Somit sind nur die schon genannten Zahlen 1 und 3 von der gesuchten Art.

Aufgabe 56

Man finde alle Paare $(n; k)$ positiver ganzer Zahlen derart, dass die Gleichung $(n + 1)^k - 1 = n!$ gilt.

Lösung

Für die Spezialfälle $n = 1; 2; 3; 4$ findet man sofort:

$$\begin{aligned} n = 1: &\quad (1 + 1)^k - 1 = 1! \ \Leftrightarrow \ k = 1; \\ n = 2: &\quad (2 + 1)^k - 1 = 2! \ \Leftrightarrow \ k = 1; \\ n = 3: &\quad (3 + 1)^k - 1 = 3! \ \text{ für kein } k \text{ erfüllbar;} \\ n = 4: &\quad (4 + 1)^k - 1 = 4! \ \Leftrightarrow \ k = 2. \end{aligned}$$

Spezielle Lösungspaare sind also $(1; 1)$, $(2; 1)$ und $(4; 2)$. Gibt es noch weitere?

Die gegebene Gleichung kann umgeformt werden in

$$(n + 1)^k - n! = 1.$$

Sollten noch weitere Lösungspaare existieren, so müsste $n > 4$ und $n + 1$ in jedem Fall eine Primzahl > 5 sein; denn angenommen, $n + 1$ wäre keine Primzahl.
Dann existierte ein t mit $1 < t \leq n$ so, dass $t \mid (n + 1)$ und $t \mid n!$, woraus $t \mid 1$ folgte im Widerspruch zu $t > 1$.
Also muss $n + 1$ eine Primzahl p sein, und die gegebene Gleichung kann so geschrieben werden:

$$(p - 1)! = p^k - 1.$$

Behauptung: Falls jetzt $p > 5$, so gibt es keine positive ganze Zahl k, für die diese Gleichung erfüllt wird.
Beweis: Sei $p > 5$ und p Primzahl, und sei angenommen, dass es doch ein solches k gibt. Division der Gleichung $(p - 1)! = p^k - 1$ durch $p - 1$ liefert

$$(p - 2)! = \frac{p^k - 1}{p - 1}.$$

Da $(p-1) \mid (p-2)!$ für $p > 5$, so müsste auch $(p-1) \mid \frac{p^k-1}{p-1}$ gelten. Unter welcher Bedingung ist dies möglich?

$$\begin{aligned}\frac{p^k-1}{p-1} &= \sum_{i=0}^{k-1} p^i = \sum_{i=0}^{k-1}((p-1)+1)^i = \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}(p-1)^j \\ &= \sum_{i=0}^{k-1}\left(1+\sum_{j=1}^{i}\binom{i}{j}(p-1)^j\right) = \sum_{i=0}^{k-1} 1 + \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{i}\binom{i}{j}(p-1)^j \\ &= k + (p-1)\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{i}\binom{i}{j}(p-1)^{j-1}\end{aligned}$$

Hieraus folgt unmittelbar, dass $p-1$ die Summe $\sum_{i=0}^{k-1} p^i$ und damit auch $\frac{p^k-1}{p-1}$ genau dann teilt, wenn $(p-1) \mid k$. Ist Letzteres der Fall, heißt das insbesondere $k \geq p-1 \geq 6$, und dann ergibt sich

$$\begin{aligned} & \frac{p^k-1}{p-1} \geq \frac{p^{p-1}-1}{p-1} > (p-2)! \\ \Leftrightarrow \quad & p^k - 1 \geq p^{p-1} - 1 > (p-1)! \end{aligned}$$

im Widerspruch zur Gleichung $(p-1)! = p^k - 1$. Damit ist die Behauptung bewiesen, und die eingangs gefundenen Lösungspaare sind die einzig möglichen.

Aufgabe 57
Man ermittle alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung $x^{10} + y^{10} - z^{10} = 1999$.

Lösung
Nach dem *„kleinen"* FERMAT*schen Satz* (s. Aufgabe 49) ist nur $t^{10} \equiv 0$ oder $t^{10} \equiv 1$ mod 11 möglich. Also gilt $x^{10} + y^{10} - z^{10} \in \{-1; 0; 1; 2\}$ modulo 11. Nun ist aber $1999 \equiv 8$ mod 11, so dass die gegebene Gleichung keine ganzzahligen Lösungen besitzt.

Aufgabe 58
Gesucht sind alle $m \in \mathbb{R}$*, so dass die Gleichung*

$$x^4 - (3m+2)x^2 + m^2 = 0$$

genau vier reelle Lösungen x_1, x_2, x_3, x_4 *mit* $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ *besitzt, für die gilt:* $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3$*, d. h.* x_1, x_2, x_3, x_4 *sind das Anfangsstück einer arithmetischen Folge.*

Lösung
Sei $f(x) = x^4 - (3m+2)x^2 + m^2$; dann ist wegen $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ das Schaubild von f symmetrisch zur y-Achse, und daher hat man $x_1 = -x_4,\ x_2 = -x_3$.
Daraus folgt $x_3 - x_2 = x_3 - (-x_3) = 2x_3$. Die Nullstellen folgen also in x-Achsenrichtung jeweils im Abstand $2x_3$ aufeinander.
Sei $a = x_3$; dann lauten die vier Nullstellen von f der Reihe nach $-3a, -a, a, 3a$, so dass

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+3a)(x+a)(x-a)(x-3a) \\ &= (x^2-9a^2)(x^2-a^2) \\ &= x^4 - 10a^2x^2 + 9a^4. \end{aligned}$$

Vergleich mit $x^4-(3m+2)x^2+m^2$ liefert $m^2=(3a^2)^2$, d. h. $m=3a^2$ und

$$\begin{aligned}3m+2&=10a^2\\9a^2+2&=10a^2\\a&=\sqrt{2}\quad(a>0\text{ nach Definition})\end{aligned}$$

und damit $m=6$.
Die Lösungen bilden den Beginn der arithmetischen Folge $\left((2n-5)\sqrt{2}\right)_{n=1}^{\infty}$.

Aufgabe 59
Seien $x,y\in\mathbb{Q}$ so gewählt, dass $(x+y)^3=xy(3x+3y+2)$. Man beweise, dass dann $\sqrt{1-xy}\in\mathbb{Q}$.

Lösung
Sei $a=x+y,\ b=xy$; dann ist, falls $3a+2$ vorausgesetzt wird,

$$a^3=b(3a+2)\ \Leftrightarrow\ b=\frac{a^3}{3a+2}.$$

Falls $3a+2=0$, so folgte $a=0$ in direktem Widerspruch zu $a=-\frac{2}{3}$. Also hat man jetzt

$$a^2=(x+y)^2=x^2+2xy+y^2=x^2+2b+y^2$$

und somit

$$a^2-4b=(x-y)^2$$

Sei $u^2=(x-y)^2$; dann ist u^2 das Quadrat einer rationalen Zahl, und weiter ist

$$u^2=a^2-\frac{4a^3}{3a+2}=\frac{3a^3+2a^2-4a^3}{3a+2}=\frac{2a^2-a^3}{3a+2}=\frac{a^2(2-a)}{3a+2},$$

so dass $\dfrac{2-a}{3a+2}=\left(\dfrac{u}{a}\right)^2$.

Falls $a=0$, so

$$0^3=xy(3\cdot 0+2)\ \Leftrightarrow\ 0=2xy\ \Leftrightarrow\ x=0\vee y=0,$$

und $x=0$ hat $y=0$ zur Folge.

$$1-xy=1-b=1-\frac{a^3}{3a+2}=\frac{3a+2-a^3}{3a+2}=\frac{(a+1)^2(2-a)}{3a+2}=(a+1)^2\cdot\left(\frac{u}{a}\right)^2=\left(\frac{a+1}{a}\cdot u\right)^2,$$

und der letzte Term stellt ganz offensichtlich das Quadrat einer rationalen Zahl dar.

Aufgabe 60
Man zeige: Hat die Gleichung $x^3-ax^2+bx-c=0$ (mit $a,b,c\geq 0$) reelle Lösungen, so sind diese Lösungen nicht-negativ.

Lösung
Angenommen, es existiert eine negative Lösung r_1; dann ist

$$r_1^3<0,\quad -ar_1^2<0,\quad br_1<0,\quad -c<0,$$

und durch Summation ergibt sich $r_1^3-ar_1^2+br_1-c<0$ im Widerspruch zur Gleichheit.

Aufgabe 61
Man bestimme alle positiven reellen Zahlen, die die Gleichung

$$x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 4 = 2\left(\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1}\right)$$

erfüllen.

Lösung
Die gegebene Gleichung lässt sich für $x, y > 0$ äquivalent umformen:

$$\begin{aligned}
& x + \frac{1}{x} - 2\sqrt{2x+1} + 2 \qquad + y + \frac{1}{y} - 2\sqrt{2y-1} + 2 && = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{x^2 - 2x\sqrt{2x+1} + (2x+1)}{x} + \frac{y^2 - 2y\sqrt{2y+1} + (2y+1)}{y} && = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{\left(x - \sqrt{2x+1}\right)^2}{x} \qquad + \frac{\left(y - \sqrt{2y+1}\right)^2}{y} && = 0
\end{aligned}$$

Wegen $x, y \in \mathbb{R}^+$ gilt die letzte Gleichung genau dann, wenn die Zähler der beiden Summanden auf der linken Seite verschwinden.

$$x = \sqrt{2x+1} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 - \sqrt{2} \;\vee\; x = 1 + \sqrt{2}$$

und ganz entsprechend für den zweiten Zähler. Da für x bzw. y jeweils nur der positive Wert $1 + \sqrt{2}$ in Frage kommt, ist $(1 + \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2})$ das einzige Lösungspaar für die gegebene Gleichung.

Aufgabe 62
Man löse die Gleichung $x^2 + 4\left(\frac{x}{x-2}\right)^2 = 45$.

Lösung
Durch Äquivalenzumformung erhält man zunächst

$$\begin{aligned}
& x^2 + 4\left(\frac{x}{x-2}\right)^2 && = 45 \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 + \frac{4x^2}{x-2} + \left(\frac{2x}{x-2}\right)^2 - \frac{4x^2}{x-2} && = 45 \\
\Leftrightarrow \quad & \left(x + \frac{2x}{x-2}\right)^2 - \frac{4x^2}{x-2} - 45 && = 0
\end{aligned}$$

Mittels der Substitution $t = \frac{x^2}{x-2}$ findet man nun weiter

$$\begin{aligned}
& t^2 - 4t - 45 && = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (t-9)(t+5) && = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & t = 9 \quad \vee \quad t = -5.
\end{aligned}$$

Nach Resubstitution ergibt sich dann

$$\begin{array}{rlcl} & \dfrac{x^2}{x-2} = 9 & \vee & \dfrac{x^2}{x-2} = -5 \\ \Leftrightarrow & x^2 - 9x + 18 = 0 & \vee & x^2 + 5x - 10 = 0 \\ \Leftrightarrow & x = 6 \ \vee \ x = 3 & \vee & x = -\dfrac{1}{2}(5 - \sqrt{65}) \ \vee \ x = -\dfrac{1}{2}(5 + \sqrt{65}). \end{array}$$

Aufgabe 63
Man löse die Gleichung $x^2 - (x+2)\sqrt{x-1} = x - 2$.

Lösung
Damit die Wurzel existiert, ist $x \geq 1$ vorauszusetzen. Durch Umformungen findet man zunächst

$$\begin{array}{rll} & x^2 - x + 2 & = (x+2)\sqrt{x-1} \\ \Rightarrow & (x^2 - x + 2)^2 & = (x+2)^2(x-1) \\ \Leftrightarrow & x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x + 4 & = x^3 + 4x^2 + 4x - x^2 - 4x - 4 \\ \Leftrightarrow & x^4 \underbrace{-3}_{a} x^3 \underbrace{+2}_{b} x^2 \underbrace{-4}_{c} x \underbrace{+8}_{d} = 0 & \end{array}$$

Der Polynomterm auf der linken Seite kann in das Produkt zweier quadratischer Polynomterme zerlegt werden. Dazu wird zunächst die kubische Resolvente $u^3 - 2b \cdot u^2 + (ac + b^2 - 4d) \cdot u + (c^2 - abc + a^2 d) = 0$ gebildet:

$$u^3 - 4u^2 - 16u + 64 = 0$$

mit $u = -4$ (< 0) als einer Lösungsmöglichkeit. Zusammen mit $w = \sqrt{9 + 16} = 5$ findet man

$$p = \frac{a + w}{2} = 1, \quad q = \frac{(b-u)(w+a) - 2c}{2w} = 2; \qquad r = \frac{a - w}{2} = -4, \quad s = \frac{(b-u)(w-a) + 2c}{2w} = 4,$$

so dass

$$\begin{array}{rll} & (x^2 + x + 2)(x^2 - 4x + 4) & = 0 \\ \Leftrightarrow & (x^2 + x + 2)(x-2)^2 & = 0 \end{array}$$

Wegen $x^2 + x + 2 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4} > 0$ ist $x = 2$ die einzige Lösung der letzten Gleichung. Da die gegebene Wurzelgleichung quadriert wurde, ist aber eine Probe erforderlich, ob diese Gleichung durch $x = 2$ erfüllt wird. Dies ist aber der Fall, wie man sofort bestätigt.

Aufgabe 64 (Spezielle kubische Gleichung)
Gegeben ist die Gleichung

$$x^3 - 3abx - a^3 - b^3 = 0 \ \textit{ mit festen } a, b \in \mathbb{R}, \ a \neq b.$$

Man ermittle die einzige reelle Lösung dieser Gleichung.

Lösung

Wegen

$$\begin{aligned}-3ab &= -2ab - ab\\ &= -a^2 - 2ab - b^2 - ab + a^2 + b^2\\ &= -(a+b)^2 + (a^2 - ab + b^2)\end{aligned}$$

kann man die linke Seite der gegebenen Gleichung umformen:

$$\begin{aligned}&x^3 - 3abx - a^3 - b^3\\ &= x^3 - (a+b)^2x + (a^2 - ab + b^2)x - (a+b)(a^2 - ab + b^2)\\ &= x^3 - (a+b)^2x \underbrace{-(a+b)x^2 + (a+b)x^2}_{\text{eingefügt}} + (a^2 - ab + b^2)x - (a+b)(a^2 - ab + b^2)\\ &= x^2\left(x - (a+b)\right) + (a+b)\left(-(a+b) + x\right)x + (a^2 - ab + b^2)\left(x - (a+b)\right)\\ &= \left(x - (a+b)\right)\left(x^2 + (a+b)x + (a^2 - ab + b^2)\right)\\ &= \left(x - (a+b)\right)\left(x^2 + (a+b)x + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + (a^2 - ab + b^2) - \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}ab - \frac{1}{4}b^2\right)\\ &= \left(x - (a+b)\right)\left(\left(x + \frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}a^2 - \frac{3}{2}ab + \frac{3}{4}b^2\right)\\ &= \left(x - (a+b)\right)\left(\left(x + \frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(a-b)^2\right).\end{aligned}$$

Wegen $a \neq b$ ist der zweite Faktor stets positiv, so dass die sonst mögliche weitere Lösung $-a$ entfällt und somit $a + b$ die einzige reelle Lösung der gegebenen Gleichung ist.

Mit einem anderen Vorgehen findet man die Lösung viel schneller. Zunächst hat man

$$x^3 - 3abx - a^3 - b^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x^2 - 3ab) = (a+b)(a^2 - ab + b^2).$$

1. Fall: $x = a + b$ und $x^2 - 3ab = a^2 - ab + b^2$, und Letzteres heißt $x^2 = (a+b)^2$; folglich $x = a + b$.

2. Fall: $x = a^2 - ab + b^2$ und $x^2 - 3ab = a + b$, d. h. nach Umformung $x = (a+b)^2 - 3ab$ und $x^2 = (a+b) + 3ab$. Da $a, b \in \mathbb{R}$ zwar fest aber beliebig gegeben sein können, ist $a + b + 3ab \geq 0$ jetzt nicht mehr garantiert; daher scheidet dieser 2. Fall aus, und es bleibt $a + b$ als einzige Lösung der gegebenen Gleichung.

Aufgabe 65 (aus: Mfjua 83-44**)**
Eine Folge natürlicher Zahlen wurde nach einer bestimmten Regel gebildet. Die ersten 5 Glieder der Folge lauten

$$4; 7; 12; 21; 38; \ldots.$$

Wie lautet die Regel, und wie heißt nach dieser Regel das 8. Folgenglied?

Lösung
Aus den Darstellungen der gegebenen Folgenglieder

$$\begin{aligned}
a_0 &= 4 = 4 - 0 = 2 \cdot 2 - 0 = 2^1 + (1+1)\\
a_1 &= 7 = 8 - 1 = 2 \cdot 4 - 1 = 2^2 + (2+1)\\
a_2 &= 12 = 14 - 2 = 2 \cdot 7 - 2 = 2^3 + (3+1)\\
a_3 &= 21 = 24 - 3 = 2 \cdot 12 - 3 = 2^4 + (4+1)\\
a_4 &= 38 = 42 - 4 = 2 \cdot 21 - 4 = 2^5 + (5+1)
\end{aligned}$$

gelangt man zu der rekursiv definierten Folge

$$\boxed{\begin{array}{lcl} a_0 & = & 4 \\ a_{n+1} & = & 2a_n - (n+1) \quad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\}), \end{array}}$$

sowie zu einer expliziten Darstellung der Folgenglieder:

$$\boxed{a_n = 2^{n+1} + (n+2) \quad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\}).}$$

Aus beiden Definitionen findet man $a_7 = 265$ für das 8. Folgenglied.

Ein endliches Anfangsstück legt eine Folge jedoch noch nicht eindeutig fest; vielmehr existieren unendlich viele Möglichkeiten, das Anfangsstück fortzusetzen. Eine Möglichkeit ist z. B. diese:

	4		7		12		21		38		69		122		207
1.		**3**		5		9		17		31		53		85	
2.			**2**		4		8		14		22		32		
3.				**2**		4		6		8		10			
4.					**2**		2		2		2				

Aus der Tabelle gewinnt man nun eine ganz andere Folge, deren Glieder sich mittels der Differenzenfolgen durch einen geschlossenen Term angeben lassen:

$$\begin{aligned}
a_n &= \mathbf{4} + \binom{n-1}{1} \cdot \mathbf{3} + \binom{n-1}{2} \cdot \mathbf{2} + \binom{n-1}{3} \cdot \mathbf{2} + \binom{n-1}{4} \cdot \mathbf{2}\\
&= \ldots\\
&= \frac{1}{12}(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 6n + 36) \quad \text{für } n = 1; 2; 3; \ldots .
\end{aligned}$$

Das 8. Folgenglied ist jetzt 207. – Zur Berechnung geschickt klammern: $\frac{1}{12}\big((((n-6)n + 23)n - 6)n + 36\big)$.

Aufgabe 66

Die Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ sei rekursiv definiert durch

$$x_1 = x_2 = 1, \quad x_3 = 4 \quad \textit{und} \quad x_{n+3} = 2x_{n+2} + 2x_{n+1} - x_n \textit{ für alle } n \geq 1.$$

Man beweise, dass alle Folgenglieder Quadratzahlen sind.

Lösung

Für die ersten Folgenglieder findet man sofort $x_1 = 1^2$, $x_2 = 1^2$, $x_3 = 2^2$, $x_4 = 3^2$, $x_5 = 5^2$, $x_6 = 8^2$ usw. Das lässt vermuten, dass $x_n = f_n^2$ ist, wobei f_n das n-te Folgenglied der FIBONACCI-Folge ist, die gegeben wird durch

$$f_1 = f_2 = 1 \quad \text{und} \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \text{ für alle } n \geq 1.$$

Wir beweisen dies durch vollständige Induktion.
Induktionsanfang: eingangs schon durchgeführt.
Induktionsschritt: Vorausgesetzt werde, dass die Behauptung für alle $k \le n+2$ gilt; dann folgt unter Beachtung von $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \;\Leftrightarrow\; f_n = f_{n+2} - f_{n+1}$:

$$\begin{aligned} x_{n+3} &= 2f_{n+2}^2 + 2f_{n+1}^2 - f_n^2 \\ &= 2f_{n+2}^2 + 2f_{n+1}^2 - (f_{n+2} - f_{n+1})^2 \\ &= f_{n+2}^2 + f_{n+1}^2 + 2f_{n+2}f_{n+1} \\ &= (f_{n+2} + f_{n+1})^2 \\ &= f_{n+3}^2, \end{aligned}$$

und damit ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 67
Die Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ sei rekursiv definiert durch

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = 5x_n + \sqrt{24x_n^2 + 1} \;\; \textit{für alle } n \ge 1.$$

Man beweise, dass alle Folgenglieder natürliche Zahlen sind.

Lösung
Zunächst bemerkt man, dass die gegebene Folge monoton steigend ist und alle Folgenglieder positiv sind. Sodann stellt man fest, dass die Rekursionsgleichung äquivalent ist mit

$$x_{n+1}^2 - 10x_{n+1}x_n + x_n^2 - 1 = 0.$$

Mit $n-1$ an Stelle von n erhält man

$$x_n^2 - 10x_n x_{n-1} + x_{n-1}^2 - 1 = 0.$$

Folglich sind für $n \ge 2$ die Zahlen x_{n+1} und x_{n-1} zwei verschiedene Lösungen der Gleichung

$$x^2 - 10xx_n + x_n^2 - 1 = 0.$$

Der Satz des VIETA liefert nun $x_{n+1} + x_{n-1} = 10x_n$ oder äquivalent hiermit

$$\boxed{x_{n+1} = 10x_n - x_{n-1}}$$

für alle $n \ge 2$. Da $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 10$, so folgt induktiv, dass alle x_n natürliche Zahlen sind.

Aufgabe 68
Berechne das 10., 20. und 30. Glied der durch $a_1 = 3$ und $a_{n+1} = \frac{1}{1-a_n}$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ rekursiv definierten Folge. Lassen sich die Folgenglieder durch einen geschlossenen Term beschreiben?

Lösung
Man findet zunächst

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \frac{1}{1-a_{n+1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-a_n}} = \frac{1-a_n}{1-a_n-1} = \frac{1-a_n}{-a_n} = \frac{1}{-a_n} - \frac{a_n}{-a_n} = 1 - \frac{1}{a_n}, \\ a_{n+3} &= \frac{1}{1-a_{n+2}} = \frac{1}{1-(1-\frac{1}{a_n})} = a_n, \end{aligned}$$

also $a_{n+3} = a_n$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Kennt man die ersten drei Folgenglieder, so kennt man alle Glieder der Folge:

$$a_n = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & \text{falls } n \equiv -1 \mod 3; \\ \frac{2}{3}, & \text{falls } n \equiv 0 \mod 3; \\ 3, & \text{falls } n \equiv 1 \mod 3. \end{cases}$$

Vorstehende Darstellung ist in dem Sinne „geschlossen", dass man jetzt jedes Folgenglied sofort angeben kann, ohne das jeweils vorangehende Folgenglied kennen zu müssen: $a_{10} = 3;\ a_{20} = -\frac{1}{2};\ a_{30} = \frac{2}{3}$.
Für eine Beschreibung der Folgenglieder durch einen geschlossenen Term definiert man

$$r(n) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & \text{falls } n \equiv 0 \mod 3; \\ 1, & \text{falls } n \equiv 1 \mod 3; \\ 2, & \text{falls } n \equiv 2 \mod 3 \end{cases}$$

und erhält damit die Darstellungsmöglichkeit ($\lfloor\ \rfloor$ bedeute die Gaußklammer „floor")

$$a_n = \left\lfloor \frac{r(n)}{2} \right\rfloor \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \left\lfloor \frac{r(n+2)}{2} \right\rfloor \cdot \frac{2}{3} + \left\lfloor \frac{r(n+1)}{2} \right\rfloor \cdot 3 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Aufgabe 69
a) Die reellen Zahlen a, b, c seien so gewählt, dass $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$. Man beweise, dass dann $a = b = c$ gilt.
b) Man ermittle den Wert der Summe $x + y$, falls

$$\frac{x}{3y} = \frac{y}{2x - 5y} = \frac{6x - 15y}{x}$$

und der Term $-4x^2 + 36y - 8$ seinen maximalen Wert hat.

Lösung
a) Selbstverständlich muss $a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$ gelten. Außerdem erkennt man sofort, dass a, b und c gleiches Vorzeichen haben müssen.
$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ liefert $b^2 = ac$ und damit auch $b^3 = abc$. Entsprechend findet man $a^3 = abc$ und $c^3 = abc$. Also ist $a^3 = b^3 = c^3$ und deshalb $a = b = c$.

b) Erweitert man den zweiten Bruchterm mit 3 und benutzt das Ergebnis von a), so erhält man $x = 3y$. Also ist

$$-4x^2 + 36y - 8 = -36y^2 + 36y - 9 + 1 = -9(4y^2 - 4y + 1) - 1 = -9(2y - 1)^2 - 1.$$

Der Maximalwert dieses letzten Terms ist -1; er wird im Fall $2y - 1 = 0$ geliefert. Also ist $y = \frac{1}{2}$ und $x = \frac{3}{2}$, so dass $x + y = 2$.

Aufgabe 70
Finde eine wesentlich einfachere Darstellung von a) $2^{\frac{1}{\ln(2)}}$; b) $\sqrt[\sqrt{2}]{\frac{a^{\sqrt{2}}}{a^{\sqrt{8}}}}$ mit $a \in \mathbb{R}^+$.

Lösung
a) Es ist $\ln(2) > 0$, und man kann rechnen: $2^{\frac{1}{\ln(2)}} = \exp\left(\ln\left(2^{\frac{1}{\ln(2)}}\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{\ln(2)} \cdot \ln(2)\right) = \exp(1) = e$.
b) Für jedes $a \in \mathbb{R}^+$ gilt $\sqrt[\sqrt{2}]{\frac{a^{\sqrt{2}}}{a^{\sqrt{8}}}} = \sqrt[\sqrt{2}]{\frac{a^{\sqrt{2}}}{a^{2\sqrt{2}}}} = \sqrt[\sqrt{2}]{\left(\frac{1}{a}\right)^{\sqrt{2}}} = \frac{1}{a}$.

Aufgabe 71 *(aus BWM 2017, 2. Runde Aufgabe 4)*
Eine natürliche Zahl werde liiert *(im Original:* heinersch*) genannt, wenn sie sich als Summe einer positiven Quadratzahl und einer positiven Kubikzahl darstellen lässt.*
Man beweise: Es gibt unendlich viele liierte Zahlen, deren Vorgänger und deren Nachfolger ebenfalls liiert sind.

Lösung (nach Vorlage der Lösung von Hannah Boß, Greven)
I) Der Term $(n^2-1)^2$ liefert für jedes $n \in \mathbb{Z}^+$ mit $n \geq 4$ eine liierte Zahl; denn

$$\begin{aligned}
&\left((n-2)^2-1\right)^2+(2(n-1))^3 \\
&=(n^2-4n+3)^2+8(n^3-3n^2+3n-1) \\
&=n^4-8n^3+22n^2-24n+9\,+\,8n^3-24n^2+24n-8 \\
&=n^4-2n^2+1 \\
&=(n^2-1)^2
\end{aligned}$$

Auch für $n=2$ wird eine liierte Zahl geliefert, nämlich $9=1^2+2^3$, für $n=3$ dagegen nicht, wohl aber wieder für $n=4$, nämlich $225=10^2+5^3$; im Hinblick darauf, ob $(n^2-1)^2$ auch einen liierten Vorgänger besitzt, wurde deshalb $n \geq 4$ vorausgesetzt.

II) Der Nachfolger von $(n^2-1)^2$ liefert für jedes $n \in \mathbb{Z}^+$ mit $n \geq 4$ stets eine liierte Zahl; denn

$$(n^2-1)^2+1=(n^2-1)^2+1^3.$$

III) Um zu zeigen, dass es unendlich viele $n \in \mathbb{Z}^+$ gibt, für die auch der Vorgänger von $(n^2-1)^2$ liiert ist, werde

$$n=\frac{1}{2}\left((2k+1)^3+(2m+1)\right) \tag{8}$$

gesetzt mit beliebigem $k \in \mathbb{Z}^+$ und

$$m=\frac{1}{4}\left((2k+1)^6+7\right). \tag{9}$$

Wegen $1^6 \equiv (-1)^6 \mod 4$ lassen die sechsten Potenzen ungerader Zahlen mod 4 den Rest 1, und es ist

$$(2k+1)^6+7 \equiv 1+7 \equiv 0 \mod 4,$$

so dass die Darstellung von m für jedes $k \in \mathbb{Z}^+$ eine positive ganze Zahl liefert.
Da Potenzen ungerader Zahlen wieder ungerade sind, ist

$$(2k+1)^3+(2m+1) \equiv 1+1 \equiv 0 \mod 2,$$

so dass durch (8) unabhängig von k stets eine positive ganze Zahl für n geliefert wird. Demnach gibt es unendlich viele $n \in \mathbb{Z}^+$, die sich wie in (8) darstellen lassen. Diese Darstellung kann äquivalent umgeformt werden:

$$\begin{aligned}
n&=\frac{1}{2}\left((2k+1)^3+\sqrt{(2m+1)^2}\right) \\
&=\frac{1}{2}(2k+1)^3+\frac{1}{2}\sqrt{4m^2+4m+1} \\
&=\frac{1}{2}(2k+1)^3+\sqrt{m^2+m+\frac{1}{4}}
\end{aligned}$$

und weiter nach Benutzung von (9)

$$n = \frac{1}{2}(2k+1)^3 + \sqrt{m^2 + \frac{(2k+1)^6}{4} + 2}\,.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \left(n - \frac{1}{2}(2k+1)^3\right)^2 &= m^2 + \frac{1}{4}(2k+1)^6 + 2 \\ n^2 - n(2k+1)^3 + \frac{1}{4}(2k+1)^6 &= m^2 + \frac{1}{4}(2k+1)^6 + 2 \\ n^2 - 2 &= n(2k+1)^3 + m^2. \end{aligned}$$

Multiplikation mit n^2 führt zu

$$(n^2-2)n^2 = (2k+1)^3 n^3 + m^2 n^2$$

und schließlich zu

$$(n^2-1)^2 - 1 = (mn)^2 + ((2k+1)n)^3\,.$$

Dabei sind $n, k, m \in \mathbb{Z}^+$. Es gibt also unendlich viele positive ganze Zahlen n, für die $(n^2-1)^2-1$, $(n^2-1)^2$ und $(n^2-1)^2+1$ allesamt liierte Zahlen sind.

Bemerkung

Die soeben genannten Terme $(n^2-1)^2-1$, $(n^2-1)^2$ und $(n^2-1)^2+1$ liefern für $n = \frac{1}{2}\left((2k+1)^3 + (2m+1)\right)$ mit $k \in \mathbb{Z}^+$ und $m = \frac{1}{4}\left((2k+1)^6 + 7\right)$ durchaus nicht alle Tripel liierter Zahlen. Schon 127 und 128 sind liierte Zahlen mit jeweils liiertem Vorgänger und liiertem Nachfolger:

$$126 = 1^2 + 5^3;\ 127 = 10^2 + 3^3;\ 128 = 8^2 + 4^3;\ 129 = 11^2 + 2^3 = 2^2 + 5^3.$$

Aber die Aufgabenstellung verlangt ja keineswegs, durch geeignete Terme *alle* Tripel liierter Zahlen zu erfassen.

Rechenbeispiel

Für $k = 1$ ist $m = 184$ und $n = 198$. Damit errechnet man jetzt:

$$\begin{aligned} 1\,536\,875\,208 &= (198^2-1)^2 - 1 = (184 \cdot 198)^2 + (3 \cdot 198)^3 = 1\,327\,290\,624 + 209\,584\,584 \\ 1\,536\,875\,209 &= (198^2-1)^2 \phantom{{}-1} = (196^2-1)^2 + (2 \cdot 197)^3 = 1\,475\,712\,225 + 61\,162\,984 \\ 1\,536\,875\,210 &= (198^2-1)^2 + 1 = (198^2-1)^2 + 1^3 = 1\,536\,875\,209 + 1 \end{aligned}$$

Kult-Ur-Satz

A

Im Schreiben manifestiert sich unser Denken, das seinerseits durch das Lesen von Geschriebenem neu befruchtet wird. Schreiben gehört somit zu den humansten aller Kulturtätigkeiten, und zu diesen zählt als reinste Form des Denkens überhaupt die Beschäftigung mit **Mathematik**.

Z

ULRICH WARNECKE (geb. 1942)