Ein Dialog zwischen Analyx und Algebrix zur lokalen Stetigkeit

von Ulrich Warnecke im Februar 1980, überarbeitete Fassung August 2019

Stetigkeit führt zu Gottes Zeitvertreib

ANALYX: Guten Tag, Algebrix! Was führt dich zu mir?
ALGEBRIX: 'n Tag, Analyx! Das mit der Stetigkeit finde ich besch... ; ich komme damit nicht klar!
ANALYX: Na, na! Stetigkeit ist doch eine hehre Tugend und bei Funktionen eine stets willkommene Eigenschaft.
ALGEBRIX: Das findest du!
ANALYX: Ich werd's dir beweisen. Lass uns einfach mal anfangen! Die Definition von „f heißt stetig bei a" ist dir schon bekannt und geläufig?
ALGEBRIX: Ja, schon – aber nur stur auswendig gelernt! (*Er schreibt an die Tafel:)*

$$a \in \mathscr{D}_f \wedge \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x\in\mathscr{D}_f} \big(|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon\big)$$

ANALYX: Na fein! Wenn du das schon sicher weißt, hast du Grund unter den Füßen, und ich kann dir weiterhelfen. Ich möchte dich allerdings analytisch nicht überfordern. Lass uns darum ein konkretes Beispiel betrachten, sodass du algebraisch arbeiten kannst.
ALGEBRIX: Aber fahr' bitte nicht gleich so heiße Sachen auf!
ANALYX: Nein, nein! Ich nehme eine ganz-rationale Funktion. Dann kannst du nämlich mit dem von dir so geschätzten HORNER-Schema eine Menge anfangen – sozusagen stetig arbeiten! Die Funktion sei (*Er schreibt an die Tafel:)*

$$f = (x \mapsto x^3 - 3x^2 - 22x + 24)$$

und wir knacken jetzt gemeinsam den Beweis dafür, dass f z. B. an der Stelle 3 – dafür werde ich kurz „bei 3" sagen – stetig ist. Für den Beweisbeginn kannst du mir etwas schon sofort sagen, nämlich?
ALGEBRIX: Ich bin zu dämlich! – Tschuldigung, mich reizte gerade nur der Reim! Ich weiß schon, was du meinst, Analyx:

$$3 \in \mathscr{D}_f = \mathbb{R},$$

wobei ich die von dir gern benutzte Kurzform für

$$3 \in \mathscr{D}_f \wedge \mathscr{D}_f = \mathbb{R}$$

übernehme.
ANALYX: Na prima! Damit ist die schwierige Hürde des Anfangens schon genommen. Aber kannst du mir sagen, weshalb diese Feststellung überhaupt wichtig ist?
ALGEBRIX: Ich glaub' schon; denn wäre $3 \notin \mathscr{D}_f$, dann hieße das: f ist bei 3 gar nicht definiert, und an einer Stelle, an der eine Funktion nicht definiert ist, kann sie vernünftigerweise auch keine halbwegs anständige Eigenschaft haben außer der, eben bei 3 bzw. allgemein an der Stelle nicht definiert zu sein.
ANALYX: Ich staune. Wer so denken kann, dem kann Stetigkeit am Ende kein böhmisches Dorf bleiben. Drum wirst du sehen: du schnallst das schon!
Was ist jetzt zu tun? Was sagt die Definition der Stetigkeit?
ALGEBRIX: Ja das, was an der Tafel steht: $\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \dots$.
ANALYX: Was heißt das auf Hochdeutsch?
ALGEBRIX: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, sodass ... .
ANALYX: Du könntest – vielleicht etwas verständlicher! – auch formulieren: Für jedes vorgegebene $\varepsilon > 0$ kann ein $\delta > 0$ gefunden werden, sodass ... .
ALGEBRIX: Gut und schön! Aber wie??!!
ANALYX: Indem wir einen kleinen Gedankensprung vorwärts machen!
ALGEBRIX: ?????
ANALYX: Einen Gedankensprung! Singen und Springen sind doch immer ein Ausdruck von Fröhlichkeit, und Mathematik soll doch Spaß machen!

Wir nehmen an, wir hätten zu einem $\varepsilon > 0$ schon ein dazu passendes $\delta > 0$ gefunden. Dann müssen wir doch irgendwie überprüfen können, ob das δ tatsächlich richtig gefunden worden ist. Was soll denn nach Definition weiter der Fall sein?

ALGEBRIX: $\bigwedge\limits_{x\in\mathscr{D}_f} \big(|x-a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x)-f(a)| < \varepsilon\big)$.

ANALYX: Auf Hochdeutsch?

ALGEBRIX: Für *alle* $x \in \mathscr{D}_f$ gilt: *wenn* $|x-a| < \delta$, *dann* $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$.

ANALYX: Und wenn *nicht*?

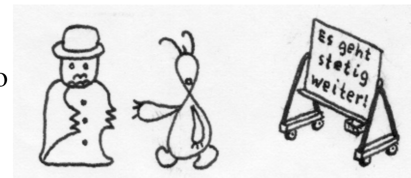
ALGEBRIX: Dann lässt sich eben *nichts* darüber aussagen, ob $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$ gilt oder nicht gilt.

ANALYX: Man sollte dir den Titel `Doctor artis logicae h.c.` verleihen – falls du ihn nicht überhaupt schon hast!

ALGEBRIX: Willst du mich verschei... ?

ANALYX: Das war nur die Revanche für deine Reaktion auf „nämlich". Wo bleibt dein Humor?

ALGEBRIX: Komm nicht ans Schwafeln. Stetig weiter!!



ANALYX: Sei vorsichtig, ich kann auch anders! Aber nun denn! Du sagtest: *wenn* $|x-a| < \delta$, dann muss jedenfalls $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$ gelten. Ehe wir aber sagen können, *ob* $|f(x)-f(a)|$ *kleiner* als ε ist, müssen wir zunächst herausfinden, was $|f(x)-f(a)|$ *überhaupt ist*. Das gehört in dein Metier, Algebrix!

ALGEBRIX: (*schreibt an die Tafel*:)

$$\text{NR}: f(a) = f(3) = -42; \quad \text{also} \quad |f(x)-f(a)| = |x^3-3x^2-22x+24-(-42)| = |x^3-3x^2-22x+66|$$

ANALYX: Na gut! Aber nimm einmal an, es wäre $\varepsilon = \frac{1}{1000}$. Könntest du dann *sehen*, ob $|x^3-3x^2-22x+66| < \frac{1}{1000}$ gilt?

ALGEBRIX: Schlecht, schlecht! Wie sollte ich?!

ANALYX: *Jetzt musst du daran denken*, dass der Term $|x^3-3x^2-22x+66|$ ja *nur für solche x* kleiner als $\frac{1}{1000}$ sein muss, für die $|x-a| < \delta$, d. h. $|x-3| < \delta$ gilt. Deshalb gebe ich dir einen guten Tipp: *Faktorisiere* den Term:

$$|x^3-3x^2-22x+66| = |x-3| \cdot |\ldots|.$$

ALGEBRIX: Aber wie soll ich das denn machen? Da stehen doch die blöden Betragstriche!

ANALYX: Na und? Du kennst doch den **Zerlegungssatz**?

ALGEBRIX: Blöde Frage! Natürlich!

ANALYX: Ja gut! Wenn jeder ganz-rationale Term ...

ALGEBRIX: Ist das dasselbe wie „Polynom"?

ANALYX: Ganz recht! Wenn also jeder ganz-rationale Term in der Form (*er schreibt hin:*)

$$f(x) = f(a) + (x-a) \cdot f_1(x)$$

geschrieben werden kann, dann müsstest du doch jetzt sehen, wie man zumindest $x^3-3x^2-22x+66$ faktorisieren kann; dieser Term ist doch nichts anderes als $|f(x)-f(3)|$.

ALGEBRIX: Jau, Deibel noch mal! Klasse! Sapi! Das ist ja heiß! (*Er schreibt voller Begeisterung und denkt laut dazu:*)

$$\begin{aligned} & f(x) = f(a) + (x-a) \cdot f_1(x) \\ \Leftrightarrow\quad & f(x) - f(a) = (x-a) \cdot f_1(x) \\ \Leftrightarrow\quad & \end{aligned}$$

ANALYX: Vorsicht! Hier genügt ja „$\Rightarrow$".

ALGEBRIX: (*schreibt unbeirrt weiter, nachdem er „$\Leftrightarrow$" in „$\Rightarrow$" korrigiert hat:*)

$$|f(x)-f(a)| = |x-a| \cdot |f_1(x)| \tag{1}$$

ANALYX: Und wie kriegst du die Zerlegung von $f(x)$ im vorliegenden Fall $f(x) = x^3-3x^2-22x+24$ hin?

ALGEBRIX: Sei mal still! Natürlich mit dem HORNER-Schema:

$$\begin{array}{r|rrr|r}
 & 1 & -3 & -22 & 24 \\
3 & & 3 & 0 & -66 \\
\hline
 & 1 & 0 & -22 & -42
\end{array} \quad = f(3)$$

also

$$\underbrace{x^3-3x^2-22x+24}_{f(x)} = \underbrace{-42}_{f(3)} + (x-3)\cdot\underbrace{(x^2+0x-22)}_{f_1(x)}$$

oder nach obigem Ergebnis (1)

$$|x^3-3x^2-22x+66| = |x-3|\cdot|x^2-22|$$

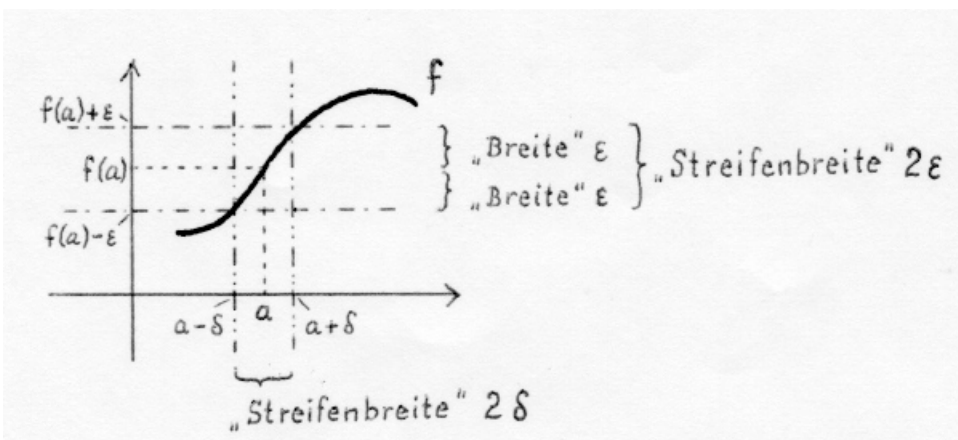
ANALYX: Wozu das HORNER-Schema doch überall gut ist! Das Herzstück des Stetigkeitsnachweises haben wir jetzt.
ALGEBRIX: Wieso? Jetzt weiß ich doch wegen $|x-3|<\delta$ höchstens, dass

$$|x^3-3x^2-22x+66| < \delta\cdot|x^2-22|$$

aber noch nicht, dass

$$|x^3-3x^2-22x+66| < \varepsilon$$

ANALYX: Nun ja, wenn du schon zu mir kommst, dann erwartest du doch sicher auch dieses Mal wieder einen kleinen **Trick** von mir. Ich will dich nicht enttäuschen. Schließlich sollst du nicht im Frust von mir gehen!
Der Trick besteht in folgender Überlegung: (*er zeichnet an die Tafel und erläutert dazu:*)



Zunächst erhält man durch Umformung

$$|x-3|<\delta \;\Leftrightarrow\; 3-\delta<x<3+\delta \quad \text{und} \quad |f(x)-f(3)|<\varepsilon \;\Leftrightarrow\; f(3)-\varepsilon<f(x)<f(3)+\varepsilon$$

Wenn ich von a aus höchstens um eine Schrittlänge δ nach links oder rechts abweiche, dann weichen die zugehörigen Funktionswerte um höchstens eine Schrittlänge ε von $f(a)$ ab, oder anders formuliert: der im „δ-Streifen“ befindliche Teil des Graphen von f liegt dann auch ganz im „ε-Streifen“ drin[1].
Wenn ich statt des δ-Streifens einen *schmaleren* δ^*-Streifen – also $0<\delta^*<\delta$ – wähle, dann liegt *erst recht* der erwähnte Teil des Funktionsgraphen im ε-Streifen.
Daher kann ich – egal, wie groß am Ende das gefundene δ sein wird – die Breite des δ-Streifens von vornherein 2 Einheiten breit wählen, d. h. von a aus höchstens 1 Schritt nach links oder rechts. Das bedeutet für die Wahl der

[1] Ergänzung von Analyx: Man definiert als δ-Umgebung von a die Menge $U_\delta(a)=\{x\in\mathbb{R}\,\big|\,|x-a|<\delta\}$ und als ε-Umgebung von $f(a)$ die Menge $V_\varepsilon(f(a))=\{y\in\mathbb{R}\,\big|\,|y-f(a)|<\varepsilon\}$. Dann kann man die (lokale) Stetigkeitsdefinition auch so formulieren: f heißt stetig bei a genau dann, wenn

$$a\in\mathscr{D}_f \wedge \bigwedge_{\varepsilon>0}\bigvee_{\delta>0} f\big(U_\delta(a)\cap\mathscr{D}_f\big)\subset V_\delta(f(a))$$

x-Werte: *auf jeden Fall wird* $|x-a| \leq 1$ *vorausgesetzt*[2]; breitere Streifen werden gänzlich außer Betracht gelassen.
ALGEBRIX: Das muss einem aber erst einmal gesagt werden!
ANALYX: Deshalb bist du ja hier. – Ach übrigens: darf ich dir einen Schnaps anbieten?
ALGEBRIX: Danke, jetzt noch nicht; Dienst ist Dienst, und Schnaps ist Schnaps.
ANALYX: Und Schnaps im Dienst ist Dienst am Schnaps. Aber ich habe volles Verständnis.
ALGEBRIX: Wie soll's nun weitergehen?
ANALYX: Stetig, wie folgt! Wenn in unserem Beispiel von vornherein $|x-3| \leq 1$ vorausgesetzt wird, dann kann der Term $|x^2-22|$ nicht mehr beliebig große Werte annehmen; er muss *nach oben beschränkt* sein. Wie groß sein Wert höchstens noch werden kann, wollen wir jetzt untersuchen. Ich nenne das „*nach oben abschätzen*". Schaff doch erst mal die von dir nicht geliebten Betragstriche in $|x-3| \leq 1$ fort!
ALGEBRIX: (*schreibt:*)

$$\begin{aligned} & |x-3| \leq 1 \\ \Leftrightarrow \quad & -1 \leq x-3 \leq 1 \quad \Big| +3 \\ \Leftrightarrow \quad & 2 \leq x \leq 4 \end{aligned}$$

Fertig!
ANALYX: Jetzt brauchen wir die **Dreiecksungleichung**. Kennst du die?
ALGEBRIX: Kommt bei dir ja alle naselang vor:

$$|a+b| \leq |a|+|b|$$

ANALYX: Wenn du diese Ungleichung auf $|x^2-22|$ anwendest, erhältst du – schreib mal hin! –

$$|x^2-22| = |x^2+(-22)| \leq |x^2|+|-22| = x^2+22$$

Da stets $x^2 \geq 0$, so ist $|x^2| = x^2$.
ALGEBRIX: Jau, wart' mal! Ich glaube, ich weiß jetzt allein weiter. x kann unter der Voraussetzung $|x-3| \leq 1$ höchstens den Wert 4 annehmen und daher $|x^2-22|$ höchstens den Wert $4^2+22 = 38$.
ANALYX: Siehst du, und damit weißt du jetzt, dass aus

$$|x^3-3x^2-22x+66| < \delta \cdot |x^2-22|$$

weiter folgt – schreib's auch hin, Algebrix! –

$$|x^3-3x^2-22x+66| < \delta \cdot 38$$

Damit $38 \cdot \delta$ nun kleiner als ε bleibt oder höchstens gleich ε wird, muss $\delta \leq \frac{\varepsilon}{38}$ gewählt werden.
Da der δ-Streifen außerdem von vornherein auf die Breite 2 (d. h. höchstens je 1 Schritt nach links oder rechts von der Stelle 3 aus) begrenzt sein sollte, haben wir zusätzlich $\delta \leq 1$. Sieh oben in der Zeichnung nach!
Beide Bedingungen $\delta \leq \frac{\varepsilon}{38}$ und $\delta \leq 1$ fassen wir zusammen, indem wir

$$\delta = \min(1; \frac{\varepsilon}{38})$$

setzen.
ALGEBRIX: Was heißt das? Kannst du mir dies erläutern?
ANALYX: Selbstverständlich, gern! Nimm an, zu $\varepsilon = \frac{1}{10}$ soll ein δ gefunden werden, sodass ... .
Weil $\frac{\varepsilon}{38} = \frac{\frac{1}{10}}{38} = \frac{1}{380}$ und $\frac{1}{380} \leq 1$, so heißt das: für δ ist $\frac{1}{380}$ zu nehmen.
Ist dagegen etwa $\varepsilon = 100$ vorgegeben und soll dazu ein passendes δ gefunden werden, so ist hier $\delta = 1$ zu nehmen,

[2]Nachtrag von Analyx: Es gibt Fälle – z. B. bei gebrochen-rationalen Funktionen – in denen hier statt 1 ein kleinerer Wert genommen werden muss, z. B. dann, wenn die Stetigkeitsstelle weniger als 1 Schritt vom Rand des Definitionsbereiches von f entfernt liegt.

da $\frac{\varepsilon}{38} = \frac{100}{38} = \frac{50}{19}$ und $\frac{50}{19} > 1$ ist.
$\min(1; \frac{\varepsilon}{38})$ bedeutet also: du sollst jeweils den *kleinsten* der beiden Werte 1 bzw. $\frac{\varepsilon}{38}$ nehmen.
ALGEBRIX: Ich hab's verstanden: min(Algebrix; Analyx) = Analyx.
ANALYX: Dreh dich mal um!
ALGEBRIX: Warum?
ANALYX: Damit ich dich dort hinein treten kann, wo momentan dein Hirn zu sein scheint. Aber wie sagt man doch: der Klügere gibt nach.
ALGEBRIX: Ha, ..., ha, ...
(*Kleine Pause. Dann besinnen sich beide wieder auf ihr Problem.*)
ALGEBRIX: Aber nun sag' mal: wie schreibt man den Beweis jetzt knapp und übersichtlich hin?
ANALYX: Dein ästhetisierender Formaltrieb imponiert mir immer wieder. Pass auf! Wir gehen genau so vor, wie es die Definition sagt:

$$a \in \mathscr{D}_f \wedge \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x\in\mathscr{D}_f} \big(|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon\big)$$

Ich glaube, wir haben alle heuristischen Vorüberlegungen beisammmen. Sollte noch etwas fehlen, müssten wir es jetzt merken. Schreib' mal so, wie ich dir sage: (*Analyx diktiert, Algebrix schreibt:*)

Behauptung: Die Funktion $f = (x \mapsto x^3 - 3x^2 - 22x + 24)$ ist stetig bei 3.
Beweis: $3 \in \mathscr{D}_f = \mathbb{R}$. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben; dann gilt für alle $x \in \mathscr{D}_f$ mit $|x-3| < \delta$

$$\begin{aligned} |f(x)-f(3)| &= |x^3 - 3x^2 - 22x + 66| \\ &= |x-3| \cdot |x^2 - 22| \qquad \text{(Zerlegung mittels HORNER-Schema)} \\ &< \delta \cdot 38 \\ &\leq \varepsilon, \end{aligned}$$

falls $\delta = \min(1; \frac{\varepsilon}{38})$ gesetzt wird, q.e.d.

ALGEBRIX: Wie? Soll das schon der ganze Beweis sein? Der ist ja kürzer als manche Lösung einer Wurzelgleichung!
ANALYX: Algebrix, du weißt doch: In der Kürze liegt die Würze; getretener Quark wird breit – nicht stark.
Nenn' mir doch mal ein beliebiges $\varepsilon > 0$.
ALGEBRIX: $\varepsilon = \frac{1}{100}$.
ANALYX: Dann sage ich: Zu diesem ε existiert als ein passendes $\delta > 0$ z. B. $\delta = \frac{1}{3800}$.
ALGEBRIX: Und wie erkenne ich, dass dieser δ-Wert wirklich passend ist?
ANALYX: Indem du kontrollierst, ob für *alle* $x \in \mathscr{D}_f$ jetzt

$$\text{aus } |x-3| < \tfrac{1}{3800} \text{ folgt, dass } |f(x)-f(3)| < \tfrac{1}{100}.$$

ALGEBRIX: Das will ich mal sehen.
ANALYX: Dann los – für's Rechnen bist du zuständig.
ALGEBRIX: (*rechnet:*)

$$\begin{aligned} |f(x)-f(3)| &= |x^3 - 3x^2 - 22x + 66| \\ &= |x-3| \cdot |x^2 - 22| \\ &< \frac{1}{3800} \cdot 38 \qquad \text{(weil ja } \delta = \frac{1}{3800} \text{ genommen werden soll, wie du gesagt hast)} \\ &= \frac{1}{100} \end{aligned}$$

Tatsächlich! Aber wenn ich jetzt einfach mal $\varepsilon = \frac{76}{100001}$ vorgebe ...
ANALYX: Dann sage ich, dass dazu $\delta = \frac{2}{100001}$ gewählt werden kann, damit für alle $x \in \mathscr{D}_f$ jetzt aus $|x-3| < \frac{1}{3800}$ dann $|f(x) - f(3)| < \frac{1}{100}$ folgt.
ALGEBRIX: Ich will nochmal rechnen (*und er schreibt:*)

$$|f(x) - f(3)| = \ldots = |x-3| \cdot |x^2 - 22| < \frac{2}{100001} \cdot 38 = \frac{76}{100001}$$

ANALYX: Alles klar?
ALGEBRIX: Durchsichtig wie ein Haufen Kohle!

MATHEMATIK IST WAHRHAFT EIN GÖTTLICHER ZEITVERTREIB !

ANALYX: Wenn du mit dieser Einsicht heute von mir gehst, dann nimmst du das Schönste mit, was menschlicher Erkenntnis zugänglich ist.
Und findest du mal wieder nix, so komm nur wieder, Algebrix!
Tschüss!
ALGEBRIX: Tschüss und dankeschön!
ANALYX: Oh bitte, gern gescheh'n! Auf baldiges Wiederseh'n!