Lösung zur Aufgabe 115-63:

Vorüberlegung:

Im nominierten Beispiel sollen die Zahlen 1, 2, …, 64 entsprechend den Vorgaben in die Zellen eines 8 x 8 – Gitters eingetragen werden.

Verallgemeinert man diese Aufgabenstellung, so sind die Zellen eines k x k - Gitters mit den Werten k, $k+1$, …, k^2 zu befüllen. Da nun die Zahlen in der Hauptdiagonale des Gitters eine möglichst große Summe bilden sollen, müssen große Zahlenwerte in die Felder der Hauptdiagonalen geschrieben werden. Die größte zur Verfügung stehende Zahl ist k^2, die nächst kleinere dann k^2-1, usw.

Lösung:

Für die Lösungsversuche verwenden wir zunächst ein kleineres 4 x 4 – Gitter.

Eine der bestmöglichsten Anordnung ist scheinbar die nachstehend gezeigte Variante:

16	1	2	3
15	14	13	4
10	11	12	5
9	8	7	6

Nun versuchen wir diesen Lösungsansatz in ein größeres Gitter zu übertragen.

Dabei stellen wir allerdings fest, dass diese Strategie nur bei k x k - Gittern mit geraden Werten von k funktioniert. Für das 8 x 8 – Gitter erhalten wir demnach:

64	1	2	3	4	5	6	7
63	62	61	12	11	10	9	8
38	39	60	13	14	15	16	17
37	40	59	58	57	20	19	18
36	41	46	47	56	21	22	23
35	42	45	48	55	54	53	24
34	43	44	49	50	51	52	25
33	32	31	30	29	28	27	26

Jetzt wollen wir eine allgemein gültige Aussage zur Befüllung von belieben k x k - Gittern mit geraden k finden. Wie in den beiden Beispielen oben ersichtlich, steht in der äußerst rechten Ecke stets die größte Zahl, nämlich k^2. Die nächsten Zellen der Hauptdiagonale sind dann stets um zwei vermindert (mit Ausnahme der letzten Zelle). So erhalten wir für das zweite Feld der Hauptdiagonale $k^2 - 2$, im übernächsten Feld dann $k^2 - 4$ usw.
Die letzte Zelle (unten rechts) der jeweiligen Hauptdiagonalen enthält scheinbar immer die Hälfte des Wertes der vorletzten Zelle der Diagonalen. Dieses rührt daher, weil ja die restlichen Zahlen noch im jeweiligen durch die Diagonale geteilten Bereiches des Gitters aufgefüllt werden müssen und die Diagonale dabei nur noch ein einziges Mal überquert werden darf.
Die folgende Abbildung soll den eben gezeigten Zusammenhang noch einmal verdeutlichen:

k^2	1						
	$k^2 - 2$						
		$k^2 - 4$					
			...				
				...			
					...		
						$k^2-(k-2)*2$	
							$\frac{k^2-(k-2)*2}{2}$

Bilden wir nun die Diagonalensumme S im oben stehenden Gitter.

Wir erhalten:

(1) $$S = k^2 + (k^2 - 2) + (k^2 - 4) + \ ... \ + \left(k^2 - (k-2) \bullet 2\right) + \left(\frac{k^2 - (k-2) \bullet 2}{2}\right)$$

Nun fassen wir den soeben erhaltenen Ausdruck weiter zusammen und erhalten mithin:

$$S = k^2 + (k^2-2) + (k^2-4) + \ldots + \left(k^2-(k-2)\bullet 2\right) + \left(\frac{k^2-(k-2)\bullet 2}{2}\right)$$

| Klammern auflösen

$$S = k^2 + k^2 - 2 + k^2 - 4 + \ldots + k^2 - (k-2)\bullet 2 + \left(\frac{k^2-(k-2)\bullet 2}{2}\right)$$

| "k" zusammenfassen

$$S = (k-1)\bullet k^2 - 2 - 4 - \ldots - (k-2)\bullet 2 + \left(\frac{k^2-(k-2)\bullet 2}{2}\right)$$

| Vorzeichen in der vorletzen Zelle tauschen

$$S = (k-1)\bullet k^2 - 2 - 4 - \ldots + (k-2)\bullet(-2) + \left(\frac{k^2-(k-2)\bullet 2}{2}\right)$$

| Elemente für Summenformel vorbereiten

(2)

$$S = (k-1)\bullet k^2 + (-2) + (-4) + \ldots + (k-2)\bullet(-2) + \left(\frac{k^2-(k-2)\bullet 2}{2}\right)$$

| als Summenformel schreiben

$$S = (k-1)\bullet k^2 + \sum_{l=0}^{k-2}(-2\bullet l) + \left(\frac{k^2-(k-2)\bullet 2}{2}\right)$$

| Klammern im letzten Summanden auflösen

$$S = (k-1)\bullet k^2 + \sum_{l=0}^{k-2}(-2\bullet l) + \frac{k^2-(k-2)\bullet 2}{2}$$ | Summenformel vereinfachen

$$S = (k-1)\bullet k^2 + (-2)\bullet\sum_{l=0}^{k-2} l + \frac{k^2-(k-2)\bullet 2}{2}$$ | Klammern auflösen

$$S = (k-1)\bullet k^2 - 2\bullet\sum_{l=0}^{k-2} l + \frac{k^2-(k-2)\bullet 2}{2}$$ | Summenformel auflösen

$$S = (k-1)\bullet k^2 - 2\bullet\frac{(k-2)\bullet(k-2+1)}{2} + \frac{k^2-(k-2)\bullet 2}{2}$$ | vereinfachen

$$S = (k-1) \cdot k^2 - 2 \cdot \frac{(k-2) \cdot (k-1)}{2} + \frac{k^2 - (k-2) \cdot 2}{2} \qquad |\text{ausmultiplizieren}$$

$$S = (k-1) \cdot k^2 - 2 \cdot \frac{k^2 - 3 \cdot k + 2}{2} + \frac{k^2 - (2 \cdot k - 4)}{2} \qquad |\text{Vorzeichen tauschen}$$

$$S = (k-1) \cdot k^2 - 2 \cdot \frac{k^2 - 3 \cdot k + 2}{2} + \frac{k^2 - 2 \cdot k + 4}{2} \qquad |\text{Produkt vereinfachen}$$

$$S = (k-1) \cdot k^2 - \frac{2 \cdot k^2 - 6 \cdot k + 4}{2} + \frac{k^2 - 2 \cdot k + 4}{2} \qquad |\text{Vorzeichen tauschen}$$

$$S = (k-1) \cdot k^2 + \frac{-2 \cdot k^2 + 6 \cdot k - 4}{2} + \frac{k^2 - 2 \cdot k + 4}{2} \qquad |\text{langen Bruchstrich}$$

$$S = (k-1) \cdot k^2 + \frac{-2 \cdot k^2 + 6 \cdot k - 4 + k^2 - 2 \cdot k + 4}{2} \qquad |\text{zusammenfassen}$$

$$S = (k-1) \cdot k^2 + \frac{-k^2 + 4 \cdot k}{2} \qquad |\text{rechts ordnen}$$

$$S = (k-1) \cdot k^2 + \frac{4 \cdot k - k^2}{2} \qquad |\text{links ausmultiplizieren}$$

$$S = k^3 - k^2 + \frac{4 \cdot k - k^2}{2} \qquad |\text{Bruch einzeln schreiben}$$

$$S = k^3 - k^2 + \frac{4 \cdot k}{2} - \frac{k^2}{2} \qquad |\text{kürzen}$$

$$S = k^3 - k^2 + 2 \cdot k - \frac{k^2}{2} \qquad |\text{"}-k^2\text{" als Bruch schreiben}$$

$$S = k^3 - \frac{2 \cdot k^2}{2} + 2 \cdot k - \frac{k^2}{2} \qquad |\text{"}k^2\text{" zusammenfassen}$$

$$S = k^3 - \frac{3 \cdot k^2}{2} + 2 \cdot k \qquad |\text{Bruch umformen}$$

$$\underline{\underline{S = k^3 - \frac{3}{2} k^2 + 2k}}$$

Mit der soeben hergeleiteten Gleichung sind wir jetzt in der Lage die Summe der Hauptdiagonalen eines jeden beliebigen k x k - Gittern mit geraden k zu berechnen.
Für ein 8 x 8 - Gitter setzen wir dazu in (2) für die Variable k die Ziffer acht ein und erhalten:

$$S = k^3 - \frac{3}{2}k^2 + 2k \qquad | \, k = 8$$

$$S = 8^3 - \frac{3}{2} \bullet 8^2 + 2 \bullet 8$$

$$S = 512 - \frac{3}{2} \bullet 64 + 16$$

$$S = 512 - 96 + 16$$

$$\underline{\underline{S = 432}}$$

Die größte mögliche Summe der acht Zellen einer Hauptdiagonale eines 8 x 8 – Gitters mit den geforderten Eigenschaften beträgt demnach 432.