Lösung zur Aufgabe 119-62:

Eine neunstellige Dezimalzahl lässt sich in allgemeiner Form mit der nachfolgenden Summenformel beschreiben:

(1) $$\sum_{n=1}^{9} x_n 10^{9-n} \qquad x_n \in \{0, ..., 9\} \quad ; \quad x_1 \neq 0$$

Dabei bezeichnet x_n die n-Stelle bzw. Ziffer der gesuchten Zahl.

Wegen der geforderten Teilbarkeit durch zwei ist die gesuchte Zahl auf jeden Fall gerade.
Da diese Zahl auch durch fünf teilbar sein soll, muss diese demnach auch durch

(2) $$2 \cdot 5 = 10$$

teilbar sein.
Die geforderte Teilbarkeit durch vier setzt nun voraus, dass die letzten beiden Stellen der Zahl auch durch vier teilbar sein müssen. Wegen (2) endet folglich die gesuchte Dezimalzahl auf …00, …20, …40, …60, oder …80. Es ist also:

(3) $$x_8 = \{0, 2, 4, 6, 8\}$$

(4) $$x_9 = \{0\}$$

Die in der Aufgabenstellung genannte Streichung der zweiten, vierten bzw. fünften Stelle der gesuchten Dezimalzahl ändert dabei am Aufbau der beiden Endziffern dieser Zahl und damit auch an ihrer Parität nichts.

Weiterhin ist eine beliebige Zahl durch drei teilbar, wenn ihre Quersumme ebenfalls durch drei teilbar ist. Im nominierten Beispiel bedeutet das unter Berücksichtigung der Streichung der dritten Stelle dieser Zahl:

(5) $$3 \mid \sum_{n=1, n\neq 3}^{9} x_n$$

Eine Zahl ist durch neun teilbar, wenn ihre Quersumme ebenfalls durch neun teilbar ist.
Für uns bedeutet das unter Berücksichtigung der Streichung der neunten Stelle der Zahl:

(6) $$9 \mid \sum_{n=1}^{8} x_n$$

Neun ist ein Vielfaches von drei, daher kann jede durch neun teilbare Zahl auch durch drei geteilt werden. Daher ergibt sich aus (6):

(7) $$3 \mid \sum_{n=1}^{8} x_n$$

Weiterhin gilt für die Quersumme der gesamten neunstelligen Zahl:

(8) $$\sum_{n=1}^{9} x_n = \sum_{n=1}^{8} x_n + x_9$$

Wie bereits oben in (4) hergeleitet, ist $x_9 = 0$, mithin ist

$$\sum_{n=1}^{9} x_n = \sum_{n=1}^{8} x_n + x_9 \qquad | \, x_9 = 0 \text{ , siehe (4)}$$

(9) $$\sum_{n=1}^{9} x_n = \sum_{n=1}^{8} x_n + 0 \qquad | \, \text{zusammenfassen}$$

$$\sum_{n=1}^{9} x_n = \sum_{n=1}^{8} x_n$$

und wegen (7) und (9) folglich auch:

(10) $$3 \mid \sum_{n=1}^{9} x_n$$

Die dritte Stelle der neunstelligen Dezimalzahl wird durch

(11) $$x_3 = \sum_{n=1}^{9} x_n - \sum_{n=1, n\neq 3}^{9} x_n$$

festgelegt.
Teilt nun eine Zahl sowohl den Minuenden als auch den Subtrahenden einer Differenz, so ist diese Zahl ebenfalls ein Teiler der Differenz dieser beiden Zahlen..
Wegen (5), (10) und (11) ist demnach x_3 durch drei teilbar:

(12) $$3 \mid x_3$$

Somit kommen für die dritte Stelle der gesuchten neunstelligen Zahl nur Vielfache von drei bzw. die Ziffer null in Frage. Es ist:

(13) $$x_3 = \{0, 3, 6, 9\}$$

Betrachten wir nun die geforderte Eigenschaft der gesuchten Dezimalzahl nach der Streichung ihrer sechsten Stelle durch sechs teilbar zu sein. Entsprechend den allgemein bekannten Teilbarkeitsregeln ist eine Zahl genau dann durch sechs teilbar, wenn sie auch durch drei und durch zwei teilbar ist.
Wie bereits oben festgellt, endet die gesuchte Zahl immer auf null. Damit ist ihre Parität stets gerade und somit auch durch zwei teilbar. Die Teilbarkeit durch drei setzt voraus, dass die Quersumme der restlichen Ziffern durch drei teilbar ist, also:

(14) $$3 \mid \sum_{n=1, n\neq 6}^{9} x_n$$

Die sechste Stelle der neunstelligen Dezimalzahl wird durch

(15) $$x_6 = \sum_{n=1}^{9} x_n - \sum_{n=1, n\neq 6}^{9} x_n$$

bestimmt.
Auch hier gilt das bereits oben unter dem Ausdruck (11) gesagte, bezügliche der Teilbarkeit der einzelnen Glieder einer Differenz.

Wegen (10), (14), und (15) ist nun auch x_6 durch 3 teilbar. Mithin ist:

(16) $$x_6 = \{0, 3, 6, 9\}$$

Kommen wir jetzt zu der in der Aufgabenstellung geforderte Teilbarkeit durch 8, der neunstelligen Dezimalzahl, wenn ihre achte Stelle gestrichen wird. Nach den allgemein bekannten Teilbarkeitsregeln ist eine beliebige Zahl genau dann durch acht teilbar, wenn ihre letzten drei Ziffern eine durch acht teilbare Zahl bilden.
Für unser konkretes Beispiel bedeutet dieses:

(17) $$8 \mid x_6 x_7 x_9$$

Die Wertigkeit der Stelle x_9 wurde in (4) schon eindeutig definiert, daher ist:

(18) $$8 \mid x_6 x_7 0$$

Für die Ziffer x_6 gilt das in (16) gesagte. Damit bleiben für die Ziffernfolge $x_6 x_7 x_9$ genau $4 \cdot 10 \cdot 1 = 40$ verschiedene Möglichkeiten bestehen. Bei jedem Vielfachen von acht, welches auf null endet, ist die vorletzte Ziffer stets gerade ($\ldots 040$, $\ldots 080$, $\ldots 120$), so dass auch hier die Stelle x_7 gerade sein muss. Diese Tatsache halbiert nun noch einmal die in Frage kommenden Varianten für $x_6 x_7 x_9$. Somit bleiben noch 20 mögliche Kombinationen übrig. Diese 20 Kombinationen werden nun manuell auf die Teilbarkeit durch acht überprüft, wobei sich die mögliche Anzahl erneut halbiert. Damit ist:

(19) $$x_6 x_7 x_9 = \{000, 040, 080, 320, 360, 600, 640, 680, 920, 960\}$$

Versuchen wir nun noch einige Einschränkungen zur ersten Stelle x_1 der gesuchten Dezimalzahl zu finden. Diese muss wegen (1) größer als null sein. Außerdem ist sie so zu wählen, dass die Bedingung (6) erfüllt wird. Da die Endziffer der Dezimalzahl sowieso auf Null endet (siehe (4)), kann die Quersumme auch über die gesamte neunstellige Zahl gebildet werden, ohne dass sich am Betrag der Quersumme etwas ändert:

$$9 \mid \sum_{n=1}^{8} x_n \qquad \mid \text{siehe (6), außerdem, da } x_9 = 0 \text{ (siehe (4))}$$

$$9 \mid \sum_{n=1}^{8} x_n + 0 \qquad \mid x_9 = 0$$

(20)

$$9 \mid \sum_{n=1}^{8} x_n + x_9 \qquad \mid \text{zusammenfassen}$$

$$9 \mid \sum_{n=1}^{9} x_n$$

Da nun für x_1 der gesuchten Zahl genau neun Ziffern zur Verfügung stehen (siehe (1)) und die Quersumme dieser Zahl ein Vielfaches von neun sein muss, kann es pro Ziffernfolge $x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8x_9$ nur eine einzige Ziffer geben, die für die erste Stelle der gesuchten Zahl zur Erfüllung der Teilbarkeit durch neun in Frage kommt.

Für die restlichen Stellen x_2, x_4 und x_5 der gesuchten Zahl können keine weiteren einschränkenden Aussagen getroffen werden. Auch kann aus der geforderten Teilbarkeit durch sieben nach Streichung der siebten Stelle der Zahl keine weitere Eingrenzung der Möglichkeiten erfolgen.

Fassen wir nun noch einmal die gefundenen Regeln für den Aufbau der gesuchten Dezimalzahl zusammen:

1. Die Endziffer der Zahl ist Null (siehe (4)):
   $x_9 = \{0\}$
2. Die vorletzte Stelle der Zahl ist gerade (siehe (3)):
   $x_8 = \{0, 2, 4, 6, 8\}$
3. Die dritt- und viertletzte Stelle der Zahl entspricht einer der folgenden zehn Möglichkeiten (siehe (19)):
   $x_6x_7 = \{00, 04, 08, 32, 36, 60, 64, 68, 92, 96\}$
4. Für die vierte und fünfte Stelle der Zahl gibt es keine Beschränkungen:
   $x_5 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

   $x_4 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

5. Die dritte Ziffer der Zahl ist null, drei, sechs oder neun (siehe (13)):
   $x_3 = \{0, 3, 6, 9\}$
6. Für die zweite Stelle der Zahl gibt es keine Beschränkungen:
   $x_2 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
7. Die Ziffer der ersten Stelle der Zahl muss nun so gewählt werden, dass die Quersumme der ersten acht Stellen dieser Zahl bzw. die Quersumme der gesamten Zahl durch neun teilbar ist. Wie bereits oben erwähnt, kommt dafür genau eine Ziffer im Intervall von eins bis neun in Frage.

Somit können unter Berücksichtigung der oben stehenden Punkte eins bis sieben für die Stellen

$$x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8x_9$$

der gesuchten neunstelligen Dezimalzahl genau

$$1 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 1 = 200.000$$

verschiedene Varianten gebildet werden.
Allerdings wurde bisher noch nicht die geforderte Teilbarkeit durch sieben berücksichtigt, wenn die siebte Stelle der gesuchten Zahl gestrichen wird. Bei der Division einer ganzen Zahl durch sieben, sind genau sieben Restklassen, nämlich von null bis sechs möglich. Demnach wird diese Forderung nur auf ungefähr ein Siebtel der 200.000 Varianten zutreffen.

Mit folgendem Algorithmus kann gemäß den oben aufgestellten Regeln eine entsprechend der Aufgabenstellung gesuchte neunstellige Dezimalzahl mit den einzelnen Stellen $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8x_9$ gebildet werden:

1. letzte Stelle der Zahl (Endziffer bzw. x_9) mit Null belegen
2. achte Stelle der Zahl (x_8) mit einer geraden Ziffer oder Null besetzen
3. für die sechste und siebte Stelle der Zahl (x_6 und x_7) eine der Kombinationen 00, 04, 08, 32, 36, 60, 64, 68, 92 oder 96 auswählen
4. die zweite, vierte und fünfte Stelle der Zahl (x_2, x_4 und x_5) mit einer beliebigen Ziffer versehen
5. für die dritte Stelle der Zahl (x_3) eine der Ziffern 0, 3, 6 oder 9 verwenden
6. nun wird die erste Stelle der Zahl (x_1) so belegt, dass die Quersumme der gesamten Zahl neun ergibt

7. Schlussendlich ist noch zu überprüfen, ob die Ziffernfolge $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_8x_9$ der Zahl durch sieben teilbar ist. Wenn auch diese Bedingung erfüllt wird, haben wir eine neunstellige Dezimalzahl gefunden, die den geforderten Eigenschaften genügt.

Um nun die oben gemachten theoretischen Aussagen und empirischen Herleitungen zu bestätigen, wurde ein kleines VBA-Modul geschrieben, welches nachfolgend gelistet ist. Dieses Programm überprüft alle neunstelligen Dezimalzahlen auf die geforderten Eigenschaften und schreibt danach, falls alle Bedingungen erfüllt sind, diese in eine externe Datei. Dieses Programm findet genau 28573 neunstellige Dezimalzahlen, die den eingangs gestellten Bedingungen genügen.
Weitere neunstellige Dezimalzahlen mit den geforderten Eigenschaften gibt es nicht.

```
Sub Aufgabe__119_62()
 Dim Anfang As Date
 Anfang = Now
 Dim Zahl(2 To 9) As Long
 Dim i, Anzahl, Start, Ende As Long
 Dim j As Integer
 Const trenn = ";"
 Datei = "ausgabe.txt"

 Start = 100000000
 Ende = 999999999

 Anzahl = 0
 Open (Datei) For Output As #1
 For i = Start To Ende

   For j = 2 To 9
     Zahl(j) = Ausschneiden(Trim(Str(i)), j)
   Next j

   If Zahl(9) / 9 = Int(Zahl(9) / 9) Then
     If Zahl(8) / 8 = Int(Zahl(8) / 8) Then
       If Zahl(7) / 7 = Int(Zahl(7) / 7) Then
         If Zahl(6) / 6 = Int(Zahl(6) / 6) Then
           If Zahl(5) / 5 = Int(Zahl(5) / 5) Then
             If Zahl(4) / 4 = Int(Zahl(4) / 4) Then
               If Zahl(3) / 3 = Int(Zahl(3) / 3) Then
                 If Zahl(2) / 2 = Int(Zahl(2) / 2) Then

                   Print #1, i & trenn & Zahl(2) & trenn & Zahl(3) & trenn & Zahl(4) &
                                 trenn & Zahl(5) & trenn & Zahl(6) & trenn & Zahl(7) &
                                 trenn & Zahl(8) & trenn & Zahl(9)
                   Anzahl = Anzahl + 1
```

```
                  End If
                End If
              End If
            End If
          End If
        End If
      End If
    End If

  Next i

  Print #1, ""
  Print #1, "Anzahl: " & Anzahl
  Print #1, ""
  Print #1, ""
  Print #1, "Startzeit: " & Format(Anfang, "hh:mm:ss") & " Uhr"
  Print #1, "Endzeit  : " & Format(Now, "hh:mm:ss") & " Uhr"
  Print #1, ""
  Print #1, "Laufzeit : " & Format(Now - Anfang, "hh:mm:ss") & " [hh:min:ss]"
  Close #1
  MsgBox ("Anzahl der Werte: " & Anzahl)
End Sub


Function Ausschneiden(x_str As String, Stelle As Integer) As Long
  Ausschneiden = 0
  If (Stelle <= Len(x_str)) And (Stelle > 0) Then
    Ausschneiden = Val((Left(x_str, Stelle - 1)) + (Right(x_str, Len(x_str) - Stelle)))
  End If
End Function
```

Es gibt insgesamt genau 28.573 neunstellige Dezimalzahlen, welche die in der Aufgabenstellung geforderten Eigenschaften erfüllen.
Die kleinste dieser Zahlen ist die 100.006.020, die größte ist die 999.993.240.