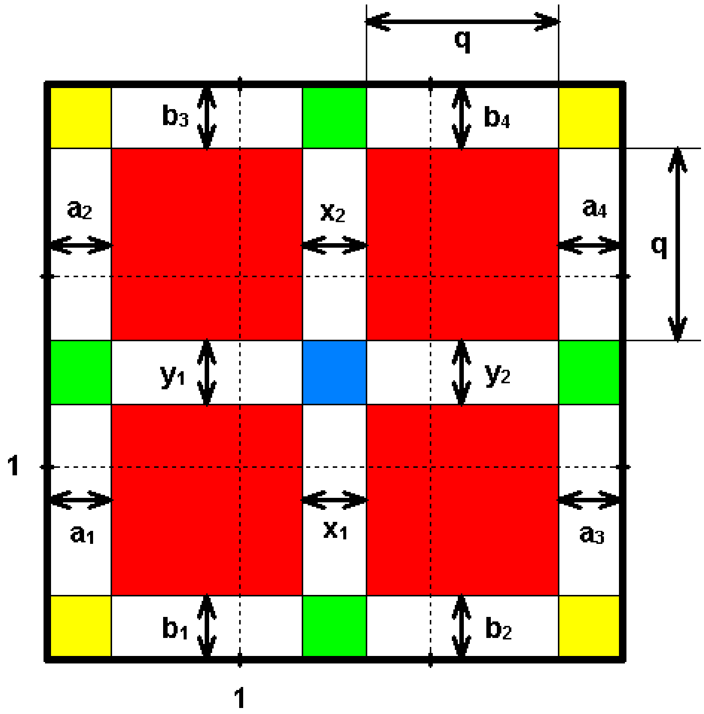
Lösung zur Aufgabe 119-64:

Eine Möglichkeit aus einem 3 x 3 großen Kuchen vier quadratische Stücke mit der Kantenlänge von eins (rote Quadrate in der nachstehenden Zeichnung) unter Berücksichtigung der in der Aufgabe gestellten Bedingungen (Kante der Stücke parallel zu den Seiten des Kuchens aber nicht notwendigerweise auf den Gitterlinien liegend) zu schneiden, zeigt nachfolgende Planskizze:



$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 =$
$b_1 = b_2 = b_3 = b_4 =$
$x_1 = x_2 = y_1 = y_2$

$q = 1$

Wie aus oben stehender Zeichnung ersichtlich gilt:

(1) $$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = x_1 = x_2 = y_1 = y_2$$

Demnach sind in dieser Anordnung die Seitenlängen und damit auch die Flächeninhalte der grünen, gelben und des blauen Quadrates gleich groß.
Jede Verschiebung eines oder mehrere roter Quadrate in waagerechter oder senkrechter Richtung führt nun entweder zur Vergrößerung des Flächeninhaltes des blauen Quadrates in der Mitte und damit zur Verkleinerung eines bzw. mehrere Quadrate an den Seiten des Kuchens oder umgekehrt zur Verkleinerung der Fläche des blauen Quadrates und damit verbunden mit der Vergrößerung eines oder mehrere seitlich angrenzender Quadrate.

Da nun gemäß der Aufgabenstellung das größte mögliche quadratische Reststück unabhängig von der Lage der einzelnen roten Quadrate gesucht wird, kann nur die oben in der Planskizze gezeigte Anordnung Verwendung finden, da hier die einzelnen Quadrate welche aus den Reststücken des Kuchens geschnitten werden können, flächengleich sind.
Somit ergibt sich unter Berücksichtigung der Seitenlängen der einzelnen Quadrate folgende Gleichung (siehe Planfigur):

$$a_2 + q + x_2 + q + a_4 = 3 \tag{2}$$

Die Seitenlänge q der großen roten Quadrate wurde in der Aufgabenstellung mit dem Wert eins festgelegt, folglich ist wegen (2):

$$\begin{aligned} a_2 + q + x_2 + q + a_4 &= 3 && |\ q = 1 \text{ (siehe Aufgabenstellung)} \\ a_2 + 1 + x_2 + 1 + a_4 &= 3 && |\ \text{links zusammenfassen} \\ a_2 + x_2 + 2 + a_4 &= 3 && |\ -2 \\ a_2 + x_2 + a_4 &= 1 \end{aligned} \tag{3}$$

In unseren nominierten Beispiel ist der Abstand der roten Quadrate untereinander und auch der Abstand der roten Quadrate zu den Seitenrändern des Kuchens gleich groß (siehe (1)). Somit ist wegen (3):

$$\begin{aligned} a_2 + x_2 + a_4 &= 1 && |\ a_2 = a_4 = x_2 \text{ (siehe (1))} \\ x_2 + x_2 + x_2 &= 1 && |\ \text{links zusamenfassen} \\ 3 \cdot x_2 &= 1 && |:3 \\ \underline{\underline{x_2 = \frac{1}{3}}} \end{aligned} \tag{4}$$

Der Flächeninhalt eines der kleinen Quadrate ist deshalb:

(5)

$$A_{kleines\ Quadrat} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \qquad |\ \text{potenzieren}$$

$$\underline{\underline{A_{kleines\ Quadrat} = \frac{1}{9}}}$$

Setzen wir nun noch die in (4) ermittelte Seitenlänge und den mit (5) berechneten Flächeninhalt der kleinen Quadrate ins Verhältnis zum gesamten Kuchen.
Wie in der Aufgabenstellung angegeben, besitzt der Kuchen die Form eines 3 x 3 großen quadratischen Gitters. Die Seitenlänge l des gesamten Kuchens beträgt also

(6) $$l = 3$$

und sein Flächeninhalt damit:

(7)

$$A_{kuchen} = l^2 = 3^2 \qquad |\ \text{potenzieren}$$

$$A_{kuchen} = 9$$

Das Verhältnis der Seitenlängen ist also

(8)

$$\frac{\text{Seitenlänge kleines Quadrat } (x_2)}{\text{Seitenlänge Kuchen } (l)} \qquad |\ x_2 = \frac{1}{3}, \text{ siehe (4) ; } l = 3, \text{ siehe (6)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{3} \qquad |\ \text{Doppelbruch auflösen}$$

$$= \frac{1}{3 \cdot 3} \qquad |\ \text{Produkt bilden}$$

$$\underline{\underline{= \frac{1}{9}}}$$

und das Verhältnis der Flächeninhalte mithin:

$$\frac{A_{kleines\ Quadrat}}{A_{Kuchen}} \qquad | \; A_{kleines\ Quadrat} = \frac{1}{9}, \text{ siehe } (5) \; ; \; A_{Kuchen} = 9, \text{ siehe } (7)$$

(9)

$$= \frac{\frac{1}{9}}{9} \qquad | \; \text{Doppelbruch auflösen}$$

$$= \frac{1}{9 \cdot 9} \qquad | \; \text{Produkt bilden}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{81}}}$$

Das größte Stück Kuchen in der Form eines Quadrates, welches sich B schneiden kann, egal wie A vorher seine vier Stücke geschnitten hat, besitzt eine Seitenlänge von 1/3 der Seitenlänge des Stückes, welches sich A vorher geschnitten hat bzw. eine Seitenlänge von 1/9 des gesamten Kuchens.
Der Flächeninhalt eines solchen quadratischen Reststückes beträgt demnach 1/9 der Fläche von einem der vier Kuchenstücke von A bzw. 1/81 der Fläche des gesamten Kuchens.