1 Vorschule

Lösung 100-11

Teil A hat die Nummer 10.
Teil C hat die Nummer 5.
Teil D hat die Nummer 11.
Teil B gibt es rechts nicht.

Lösung 100-12

a) 18

b) 12

2 Klassen 1 und 2

Lösung 100-21

Anzahl Beine	**Anzahl Tiere**	**Gesamtzahl Beine**
2	9	18
4	10	40
8	2	16

Insgesamt sind es $18 + 40 + 16 = 74$ Beine.

Lösung 100-22

Man kann alle möglichen Zahlen durchprobieren. Die erste Ziffer kann eine 0, eine 1, eine 2 und eine 3 sein. Ab 4 geht es nicht mehr, weil die dritte Ziffer höchstens eine 9 sein darf. Es sind also 036, 147, 258 und 369 möglich. Nur bei 258 ist die Summe der Ziffern gleich 15.

Lisas Geheimzahl ist die 258.

Lösung 100-23

Beide Flächen sind gleich groß. Man kann in der rechten Figur unten ein Dreieck abschneiden, das genau in die Lücke oben in der rechten Figur passt. Dann sieht die rechte Figur genauso aus wie die linke

Lösung 100-24

Sohn	**Mutter**	**Vater**	**Tochter**
links			rechts

Lösung 100-25

Colin hat $17 + 8 = 25$ Pflaumen gepflückt. Nick hat $22 + 8 = 30$ Pflaumen gepflückt. Zusammen haben sie $25 + 30 = 55$ Pflaumen gepflückt.

Lösung 100-26

30: Im Dach steht die Summe der 4 Zahlen, also $12 + 8 + 3 + 7 = 30$.

Lösung 100-27

Sie muss die 32 durch 29 ersetzen. Dann ist das Ergebnis überall 87.

Lösung 100-28

Es gibt 2 mögliche Aufteilungen:

Variante 1:

4-Bett-Zimmer: Erika, Erwin, Resi, Linda

3-Bett-Zimmer: Anke, Alex, Emmi

3-Bett-Zimmer: Carola, Conrad, Lea

2-Bett-Zimmer: Georg, Theodor

Variante 2:

4-Bett-Zimmer: Anke, Alex, Resi, Linda

3-Bett-Zimmer: Erika, Erwin, Emmi

3-Bett-Zimmer: Carola, Conrad, Lea

2-Bett-Zimmer: Georg, Theodor

3 Klassen 3 und 4

Lösung 100-31

15 Kinder mögen sowohl Mathe als auch Kunst.

Begründung: Da 10 Kinder keines der beiden Fächer mögen, mögen $40 = 50 - 10$ mindestens eins der beiden Fächer. $40 - 20$ Kinder mögen folglich Kunst, aber nicht Mathematik. Da 35 Kinder sagen, dass sie Kunst mögen und 20 Kinder Kunst mögen, aber nicht Mathematik, müssen also $35 - 20 = 15$ Kinder beide Fächer mögen.

Lösung 100-32

1a) 2375486

b) 130016

c) 100111

d) 2123

2a) 1 Strick, 2 Bügel, 5 Zählfinger

b) 3 Lotosblumen, 7 Bügel, 5 Zählfinger

c) 6 Götter der Unendlichkeit, 2 Kaulquappen

Lösung 100-33

$$(987 : 3 - 29) : 100 + 7 = 10$$

Lösung 100-34

Die Mädchen heißen Charlotte Peters, Luise Segner, Hannah Köster und Dorothea Martens.

Begründung 1 (kurz):

Aus (b) und (d) folgt sofort, dass Charlotte und Luise gleich alt sind und Charlotte Peters heißt und Luise Segner. Aus (a) und (c) folgt dann, dass Hannah Köster heißen muss und Dorothea Martens.

Um auch nicht so einfach zu duchschauende Logicals lösen zu können, bietet sich folgendes formalistische Vorgehen an:

Begründung 2 (formalistisch):

Wir wählen folgende Abkürzungen:

Vornamen: H, C, D, L

Nachnamen: p, s, k, m

=, falls Vorname zu Nachname passt

≠, falls Vorname nicht zu Nachname passt.

Vorgehen zum Finden der Lösung: Wir leiten aus den Aussagen (a) bis (d) Folgerungen ab und markieren dies in einer Tabelle: − bedeutet, dass Vorname und Nachname nicht zusammen gehören, + bedeutet, sie gehören zusammen. Wir nutzen die Tatsache aus, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte genau ein + stehen muss. Die Zahlen in Klammern beziehen sich auf die Nummer in der Liste, die die Reihenfolge unserer logischen Schlüsse zeigt.

1. aus (b) und (d) folgt $C = p$ und $L = s$, also ein + bei (p, C) und bei (s, L), sowie ein − bei $(p, H), (s, H), (p, D)$, $(s, D), (p, L)$ und (s, L) in der Tabelle.

	H	C	D	L
p	− (1.)	+ (1.)	− (1.)	− (1.)
s	− (1.)	− (1.)	− (1.)	+ (1.)
k	+ (3.)	− (1.)	− (2.)	− (1.)
m	− (2.)	− (1.)	+ (2.)	− (1.)

2. aus (c) und (1.) folgt $D = m$ und damit $D \neq k$ und $H \neq m$

3. damit bleibt nur noch $H = k$.

Lösung 100-35

Es ist Würfel b.

Die Seite mit dem Kreuz und die schwarze Seite müssen einander gegenüber liegen. Daher scheidet Würfel a aus, bei dem sich diese Seiten berühren. Bei Würfel c passt die Orientierung der Seite mit den zwei parallelen Linien in Bezug auf die Seite mit dem schwarzen Kreis nicht zum Netz. Bleibt also nur Würfel b.

Lösung 100-36

Die in Frage kommenden Quadratzahlen sind 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 und 121. Wäre Alex 0 Jahre alt, so wären der Vater und der Großvater zusammen 139 Jahre alt. Es gibt keine zwei Quadratzahlen, die diese Summe haben (man muss nur solche probieren, die auf 5 und 4 oder auf 0 und 9 enden)

Wäre Alex 1 Jahr alt, ginge das nur, wenn sein Vater und sein Großvater gleichalt wären, nämlich 64. Das ist unmöglich.

Wäre Alex 4 Jahre alt, so müssten sein Vater und sein Großvater zusammen 135 Jahre alt sein. Das Alter des Vaters und des Großvaters müssten auf 6 und 9 (oder umgekehrt) enden, damit die Summe auf 5 endet. Mögliche Zahlen wären 36 und 49, aber die sind zusammen deutlich kleiner als 135. Für das Alter 4 gibt es also keine Lösung.

Angenommen, Alex ist 9 Jahre alt. Dann sind sein Vater und sein Großvater zusammen 130 Jahre alt. Das Alter des Vaters und des Großvaters sollten dann auf 1 und 9 enden, damit die Summe auf 0 endet. Dies gilt für 49 und 81. Tatsächlich ist $49 + 81 = 130$. Alex kann 9, sein Vater 49 und sein Großvater 81 Jahre alt sein.

Wäre Alex 16 Jahre alt, so müssten sein Vater und sein Großvater zusammen 123 Jahre alt sein. Es gibt keine zwei Quadratzahlen, deren Summe auf 3 endet. 16 Jahre ist also nicht möglich.

Wäre Alex 25 Jahre alt, so müssten sein Vater und sein Großvater zusammen 114 Jahre alt sein. Dafür gibt es keine Lösung. Ebenso gibt es für 36 keine Lösung und älter kann Alex kaum sein, weil dann sein Vater jünger wäre als er.

Das Alter der 3 lässt sich also eindeutig bestimmen: **Alex ist 9, sein Vater 49 und sein Großvater 81.**

Lösung 100-37

Anzahl 62 ct	**Anzahl 55 ct**	**Anzahl 45 ct**	**Gesamtwert (Euro)**
4			2,48
3	**1**		**2,41**
2		3	2,59
1		4	2,42
	2	3	2,45

Chiara muss drei Briefmarken zu 62 ct und eine Briefmarke zu 55 ct auf den Brief kleben.

Lösung 100-38

Für Leon, Natascha und Katja ist heute Mittwoch. Für Hannah ist heute Donnerstag. Für Jonas ist heute Freitag. Damit sagen 3 Kinder, es sei Mittwoch, zwei Kinder sagen es sei nicht Mittwoch. Da drei Kinder Recht haben, ist heute Mittwoch. Hannah und Jonas haben sich geirrt.

4 Klassen 5 und 6

Lösung 100-41

Selina hat recht, denn die Anzahl der Parkflächen muss durch 3 teilbar sein, was für 370 nicht zutrifft.

Lösung 100-42

Angenommen, es sind x 5-Bett-Zimmer und y 6-Bett-Zimmer mit $x, y \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$5x + 6y = 83$$

bzw.

$$\begin{aligned} 6y &= 78 + 5 - 5x \\ y &= 13 - 5 \cdot \frac{x-1}{6} \end{aligned}$$

Der Term $5 \cdot \frac{x-1}{6}$ ist nur für $x \in \{7, 13\}$ ganzzahlig und nicht größer als 13. Falls er größer als 13 wäre, wäre der Term auf der rechten Seite der letzten Gleichung negativ, was ausgeschlossen ist, da y die Anzahl von Zimmern ist. Für $x = 7$ ist $y = 8$, für $x = 13$ ist $y = 3$. Da es mehr als vier 6-Bett-Zimmer gibt, müssen es genau acht 6-Bettzimmer und sieben 5-Bett-Zimmer sein.

Die Jugendherberge hat sieben 5-Bett-Zimmer und acht 6-Bett-Zimmer.

Lösung 100-43

Der Bus hat 45 Sitzplätze.

Hier gibt es verschiedene Lösugsstrategien.

Variante 1 - Chiara Franz (elegant): Wenn ein Drittel des Busses mit Kindern besetzt ist und das zweite Drittel mit Erwachsenen, bleiben noch 6 Erwachsene und 9 freie Plätze für das dritte Drittel. In einem Drittel sitzen also $6+9 = 15$ Personen, im gesamten Bus damit $3 \cdot 15 = 45$ Personen.

Variante 2 - Aron Szedö (elegant):

Kinder	Kinder	+6 +9

$6 + 9 = 15$, $15 \cdot 3 = 45$. Der Autobus hat 45 Plätze.

Variante 3: Gleichung aufstellen, lösen und Probe: Angenommen, der Bus habe $n \in \mathbb{N}$ Plätze. Dann sind $\frac{n}{3}$ Plätze von Kindern besetzt, $\frac{n}{3} + 6$ Plätze von Erwachsenen und 9 Plätze frei. Es muss also gelten

$$\begin{aligned} n &= \frac{n}{3} + \frac{n}{3} + 6 + 9 \iff \\ n &= \frac{2n}{3} + 15 \iff \\ 3n &= 2n + 45 \iff \\ n &= 45 \end{aligned}$$

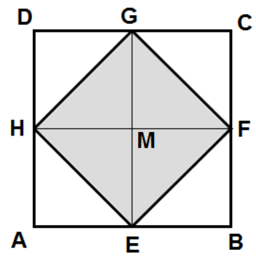
Alle Umformungsschritte sind äquivalent. Wenn es eine Lösung der gegebenen Gleichung gibt, kann dies also nur $n = 45$ sein.

Probe am Text: Wenn der Bus 45 Sitzplätze hat, dann sind 15 Sitzplätze von Kindern belegt, $15+6 = 21$ Sitzplätze von Erwachsenen und 9 Sitzplätze frei. Dies sind insgesamt $15+21+9 = 45$ Plätze.

Variante 4: systematisches Probieren mit Hilfe einer Tabelle. Aufgepasst: hier muss man auch begründen, dass es genau eine Lösung gibt.

Lösung 100-44

Verbindet man die gegenüberliegenden Seitenmittelpunkte, so sieht man, dass der Flächeninhalt des Quadrats $ABCD$ genau doppelt so groß ist wie der des Quadrats $EFGH$, also 100cm^2. Die Seitenlänge des Quadrats beträgt somit 10cm.



Lösung 100-45

(1) und (3) schließen einander aus. Daher muss eine dieser Aussagen die falsche sein. Also muss (2) richtig sein. Dann kann aber (3) nicht richtig sein, da die kleinste durch 4 **und** durch 6 teilbare natürliche Zahl nicht einstellig ist. Also müssen (1) und (2) wahr und (3) falsch sein. Die einzige Zahl, die (1) und (2) erfüllt, ist 4.

Damit ist gezeigt, dass sich die gesuchte Zahl aus den Angaben eindeutig ermitteln lässt. Es ist die 4.

Lösung 100-46

Es sitzt gar kein Lügner im Zimmer.

Begründung: Da es nur 5 Menschen sind, sagt die fünfte Person sicher die Wahrheit, denn es können nicht 6 Lügner sein.

Dann sind aber höchstens 4 der Personen Lügner. D.h. die vierte Person sagt ebenfalls die Wahrheit.

Dann können es aber höchstens 3 Lügner sein. D.h. die dritte Person sagt die Wahrheit.

Dann können es aber höchstens 2 Lügner sein. D.h. die zweite Person sagt die Wahrheit.

Dann kann es aber höchstens 1 Lügner sein. D.h. die erste Person sagt die Wahreit.

Somit sagen alle die Wahrheit.

Lösung 100-47

In einem Monat kann es höchstens 5 Sonntage geben. Wenn 3 davon gerade sind, muss der 2. des Monats ein Sonntag sein. Der 4. des Monats kann kein Sonntag sein, weil es sonst einen Sonntag mit Datum 32 geben müsste. Wenn der 2. des Monats ein Sonntag ist, dann ist der 23. des Monats ebenfalls ein Sonntag, der 27. folglich ein Donnerstag.

Lösung 100-48

Der Minutezeiger wandert in einer Minute um 1/60 eines vollen Kreisumfangs weiter, der Stundenzeiger um $\frac{1}{12 \cdot 60}$. Der Minutenzeiger eilt nach 12 Uhr dem Stundenzeiger folglich um den

$$\frac{1}{60} - \frac{1}{12 \cdot 60} = \frac{11}{720}$$

Teil eines vollen Kreisumfangs voraus. Die Zeiger stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn der Winkel zwischen ihnen 1/4 des vollen Kreises beträgt. Dies geschieht nach

$$\frac{1}{4} : \frac{11}{720} = \frac{180}{11} = 16\frac{4}{11}$$

Minuten bzw. um 12 Uhr, 16 Minuten und $21\frac{9}{11}$ Sekunden.

5 Klassen 7 und 8

Lösung 100-51

x	x	x	x		x		x		x
					x		x		x
x	x	x	x		x		x		x
					x		x		x
x	x	x	x						
						x	x	x	x
x		x		x					
x		x		x		x	x	x	x
x		x		x					
x		x		x		x	x	x	x

Lösung 100-52

Die Winkel α bilden zusammen einen Winkel der Größe 180°. Daher gilt

$$\alpha = \frac{180°}{3} = 60°$$

Nach Innenwinkelsatz im rechtwinkligen Dreieck DCE folgt

$$\angle DCE = 90° - \alpha = 30°$$

Wegen $2 \cdot \beta + \angle DCE = 180°$ folgt

$$\beta = \frac{1}{2}(180° - 30°) = 75°$$

Nach Innenwinkelsatz im rechtwinkligen Dreieck DMC gilt

$$\angle DMC = 90° - 75° = 15°$$

und schließlich nach Innenwinkelsatz im gleichschenkligen Dreieck MAB

$$\gamma = \frac{1}{2}(180° - \angle DMC) = \frac{1}{2}(180° - 15°) = 82,5°$$

Lösung 100-53

Als Hilfsaussage zeigen wir zunächst, dass sich außer $(3, 5)$ jedes Primzahlzwillingspaar in der Form $(6n - 1, 6n + 1)$ mit einer natürlichen Zahl n darstellen lässt.

Beweis. Jede natürliche Zahl kann man (nicht notwendig eindeutig) darstellen als $6n-2$, $6n-1$, $6n$, $6n+1$, $6n+2$ oder $6n+3$ mit einer passend gewählten Zahl $n \in \mathbb{N}$. Die Zahlen $6n-2$, $6n$, $6n+2$ sind als gerade Zahlen keine Primzahlen. Die Zahl $6n+3$ ist durch 3 teilbar, also ebenfalls keine Primzahl. Daher können höchstens $6n-1$ oder $6n+1$ Primzahlzwillinge sein.

Daraus folgt unmittelbar, dass ab $(5, 7)$ jedes Primzahlzwillingspaar eine durch 6 teilbare Zahl einschließt. Aufeinanderfolgende Primzahlzwillingspaare schließen also höchstens aufeinanderfolgende durch 6 teilbare Zahlen ein. Deren Abstand beträgt mindestens 6, also beträgt der Abstand aufeinanderfolgender Primzahlzwillingspaare mindestens 4, w.z.b.w.

Lösung 100-54

Die Einerziffer der Summe $11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16$ ist 1. Folglich endet jede Potenz der Summe auf 1.

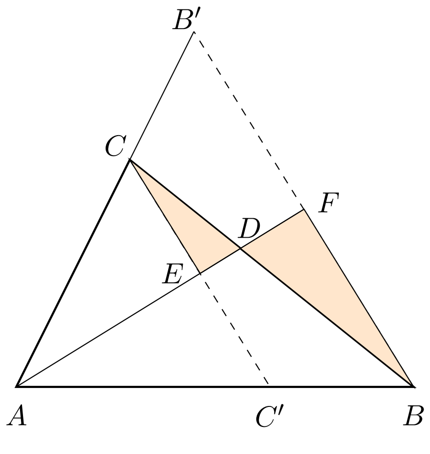
Lösung 100-55

Da alle Zahlenangaben verschieden sind, müssen mindestens 3 Wesen lügen. 4 Wesen können nicht lügen, denn dann hätten alle 4 Arme und das Wesen mit dem blauen Mantel hätte die Wahrheit gesagt, obwohl es 4 Arme hätte. Also lügen genau 3 Wesen. Diese 3 haben zusammen 12 Arme. Das vierte Wesen hat dann entweder 3 Arme oder 5 Arme. Hätte es 5 Arme, dann hätten alle zusammen 19 Arme. Also muss das vierte Wesen 3 Arme haben. Alle zusammen haben 15 Arme. Das Wesen im grünen Mantel hat also (genau) 3 Arme, alle anderen haben (genau) 4.

Lösung 100-56

Es seien D der Schnittpunkt der Halbierenden des Winkels $\angle CAB$ mit BC, B' das Spiegelbild von B bei Spiegelung an der Winkelhalbierenden AD, C' das Spiegelbild von C bei Spiegelung an der Winkelhalbierenden AD.
Wegen $\angle BAD = \angle DAC$ liegt C' auf der Geraden durch A und B und B' auf der Geraden durch A und C.
Mit E bezeichnen wir den Schnittpunkt von CC' mit AD und mit F den Schnittpunkt von BB' mit der Verlängerung der Winkelhalbierenden AD.
Die Dreiecke CDE und DBF sind ähnlich, denn sie sind rechtwinklig und haben einen gleichen Winkel bei D. Daraus folgt

$$\frac{\mid BF \mid}{\mid CE \mid} = \frac{\mid DB \mid}{\mid CD \mid} \tag{1}$$



Die Dreiecke $AC'E$ und ABF sind ähnlich (rechtwinklige Dreiecke mit gemeinsamem Winkel bei A). Die Dreiecke $AC'E$ und AEC sind kongruent nach Konstruktion von C'. Aus diesen beiden Tatsachen folgt

$$\frac{\mid AB \mid}{\mid BF \mid} = \frac{\mid AC' \mid}{\mid C'E \mid} = \frac{\mid AC \mid}{\mid CE \mid}$$

bzw.

$$\frac{\mid AB \mid}{\mid AC \mid} = \frac{\mid BF \mid}{\mid CE \mid} \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt die Behauptung.

Lösung 100-57

Sei $(x;y)$ mit $x \leq y$ ein Lösungspaar. Umformung liefert

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{xy} \leq \frac{2}{x} - \frac{1}{xy} = \frac{2y-1}{xy} < \frac{2y}{xy} = \frac{2}{x},$$

und hieraus entnimmt man $x < 6$. Für $x \in \{1;2;3\}$ existiert keine Lösung. Wenn $x = 4$, so $y = 9$, und wenn $x = 5$, so $y = 6$.
Falls $x \geq y$, argumentiert man analog. Man findet so insgesamt $(4;9)$; $(5;6)$; $(6;5)$; $(9;4)$ als einzige Lösungspaare.

Lösung 100-58

Angenommen, die 7a hat a Euro eingenommen, die 7b b Euro und die 7c c Euro. Dann gilt

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}(b+c+52) \\ b &= \frac{1}{3}(a+c+52) \\ c &= \frac{1}{4}(a+b+52) \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} 2a-b-c &= 52 \qquad (1) \\ -a+3b-c &= 52 \qquad (2) \\ -a-b+4c &= 52 \qquad (3) \end{aligned}$$

Subtraktion von (2) und (1) sowie Multiplikation von (1) mit 4 und anschließende Addition zu (3) ergibt

$$\begin{aligned} 3a-4b &= 0 \qquad (4) \\ 7a-5b &= 5\cdot 52 \qquad (5) \end{aligned}$$

Gleichung (4) multipliziert man mit 5, Gleichung (5) mit 4 und addiert die so erhaltenen Gleichungen anschließend:

$$13a = 20\cdot 52 \text{ bzw. } a = 20\cdot 4 = 80$$

Aus (4) ergibt sich damit $b = 60$ und schließlich z.B. durch Einsetzen in (1) $c = 48$.

Die Klasse 7a nahm 80 Euro ein, die Klasse 7b nahm 60 Euro ein, die Klasse 7c nahm 48 Euro ein. Zusammen nahmen alle 4 Klassen 240 Euro ein.

Probe: Es ist $b+c+52 = 160$. Die 7a hat tatsächlich die Hälfte des Betrages der anderen Klassen eingenommen. Es ist $a+c+52 = 180$. Die 7b hat tatsächlich ein Drittel des Betrages der anderen Klassen eingenommen. Es ist $a+b+52 = 192 = 4\cdot 48$. Die 7c hat tatsächlich ein Viertel des Betrages der anderen Klassen eingenommen.

6 Klassen 9 bis 13

Lösung 100-61

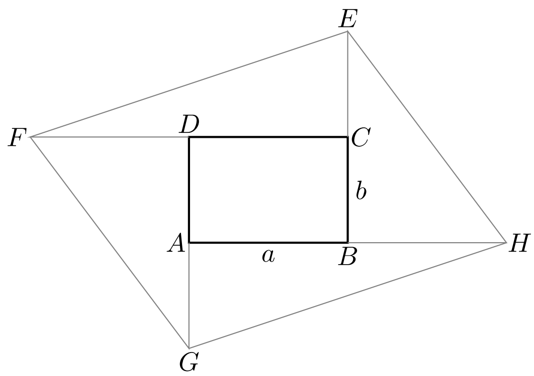
Offensichtlich muss hier $x > y$ sein. Anderenfalls hätte man $x \leq y$, d. h. $x < y+1$, und dies lieferte zusammen mit $x^3 = y^3 + 2y^2 + 1$

$$\begin{aligned} & y^3 + 2y^2 + 1 < (y+1)^3 \\ \Leftrightarrow\ & 0 \qquad\qquad\quad < y(y+3) \\ \Leftrightarrow\ & y < -3 \qquad\ \vee\ 0 < y, \end{aligned}$$

also einen unerfüllbaren Fall. Daher bleibt jetzt nur $-3 \leq y \leq 0$.
Direktes Nachrechnen ergibt nun $\{(-2;-3);\ (1;-2);\ (1;0)\}$ als Lösungsmenge.

Lösung 100-62

Wir nehmen o.B.d.A an, dass $a > b$ ist. Die Dreiecke $\triangle AGH$, $\triangle BHE$, $\triangle FCE$ und $\triangle GDF$ sind rechtwinklig. Nach Konstruktion und Kongruenzsatz *sws* sind die Dreiecke $\triangle AGH$ und $\triangle FCE$ sowie $\triangle BHE$ und $\triangle GDF$ kongruent. Es gilt also $GH = EF$ sowie $HE = FG$. Damit ist $EFGH$ ein Parallelogramm. Wäre es ein Rhombus, so gälte $GH = EF = HE = FG$ und folglich $a = b$ im Widerspruch zur Aufgabe.



Es handelt sich damit um ein Parallelogramm, das kein Rhombus also erst recht kein Quadrat ist.

Die Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle AGH$, $\triangle BHE$, $\triangle FCE$ und $\triangle GDF$ sowie des gegebenen Rechtecks $ABCD$ sind jeweils gleich $a \cdot b$. Somit beträgt der Flächeninhalt des Parallelogramms $EFGH$ das Fünffache des Flächeninhalts des Rechtecks $ABCD$.

Lösung 100-63

Die Summe der 7 Elemente liegt zwischen 0 und 119, kann also höchstens 120 verschiedene Werte annehmen. Eine 7-elementige Menge hat $2^7 = 128$ Teilmengen (einschließlich der leeren Menge). Nach dem Dirichletschen Schubfachprinzip gibt es daher 2 verschiedene Teilmengen mit der gleichen Elementsumme. Falls der Durchschnitt dieser Teilmengen nicht leer ist, entfernt man alle Elemente des Durchschnitts der beiden Teilmengen. An der Gleichheit der Summen ändert dies nichts. Die reduzierten Mengen sind dann elementfremd.

Lösung 100-64

Wir schreiben n als Summe aus Einsen. Die 4 Summanden ergeben sich, indem wir aus den $n-1$ Additionszeichen genau 3 auswählen

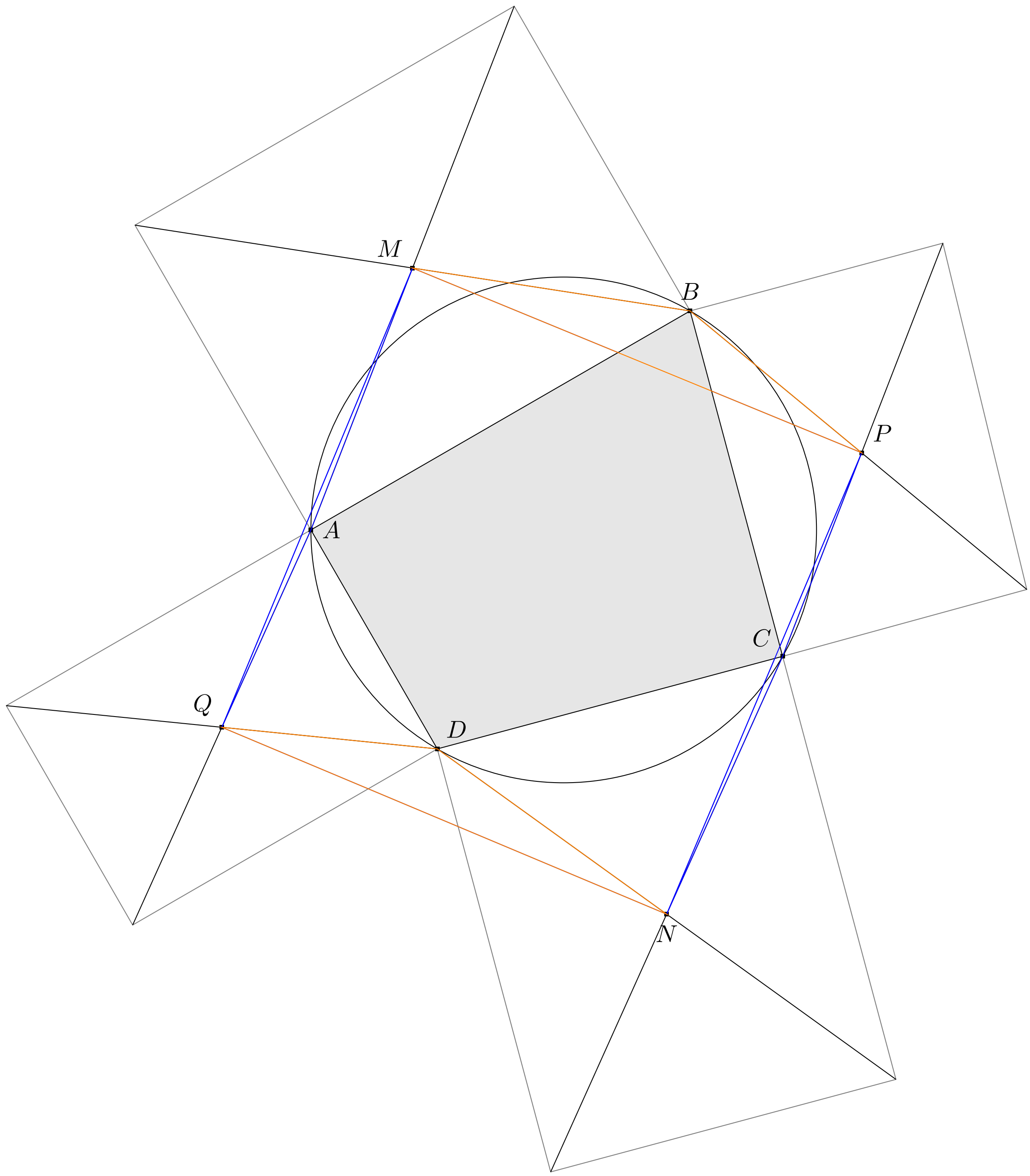
$$n = (1 + \cdots + 1) + (1 + \cdots + 1) + (1 + \cdots + 1) + (1 + \cdots + 1)$$

und die Teilsummen in den Klammern zu je einem Summanden zusammenfassen. Dies ergibt insgesamt

$$\binom{n-1}{3} = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$$

Möglichkeiten.

Lösung 100-65



a) Es seien M, P, N und Q die Mittelunkte der Rechtecke über den Seiten AB, BC, CD bzw. DA des Sehnenvierecks $ABCD$. Da in jedem Sehnenviereck die Summe der Größen gegenüberliegender Winkel gleich 180° ist und die Rechtecke über den gegenüberliegenden Vierecksseiten paarweise kongruent sind, sind die Winkel $\angle MBP$ und $\angle NDQ$ bzw. $\angle NCP$ und $\angle MAQ$ kongruent. Folglich gilt $\triangle MBP \cong \triangle NDC$ und $\triangle MCP \cong \triangle MAQ$. Daraus folgt $\mid MP \mid = \mid NQ \mid$ und $\mid NP \mid = \mid MQ \mid$ und das bedeutet, $MPNQ$ ist ein Parallelogramm.

b) Aus $\angle BPM = \angle DQN$ und $\angle CPN = \angle AQM$ folgt $\angle BPC + \angle DQA = \angle MPN + \angle NQA$. Da die Rechtecke über BC und AD kongruent sind, folgt $\angle BPC + \angle DQA = 180°$ und damit auch

$\angle MPN + \angle NQA = 180°$. Damit ist $MPNQ$ ein Parallelogramm, dessen gegenüberliegende Winkelsumme 180° beträgt und folglich sogar ein Rechteck.

Lösung 100-66

Falls es einen Leistungskurs gäbe, den alle Schüler des Jahrgangs 11 belegen, ist die Behauptung wahr. Daher nehmen wir an, dass es keinen solchen Leistungskurs gibt.

Es sei L_1 einer der Leistungskurse und A ein Schüler, der diesen belegt. Da L_1 nicht von allen Schülern belegt wird, gibt es einen Schüler B, der L_1 nicht belegt. Er belegt aber mit A gemeinsam einen Leistungskurs. Diesen nennen wir L_2. Den anderen Leistungskurs, den B belegt, bezeichnen wir mit L_3. Da auch L_2 nicht von allen Schülern belegt wird, gibt es einen dritten Schüler C, der L_2 nicht belegt. Da er aber sowohl mit A als auch mit B einen Kurs gemeinam belegt, belegt C die Leistungskurse L_1 und L_3. Die Aufteilung sieht also nun so aus:

L_1	L_2	L_3
A,C	A,B	B,C

Falls es keinen weiteren Schüler gäbe, wären wir fertig. Es sei D ein vierter Schüler. Würde D weder L_1 noch L_2 belegen, so gäbe es keinen Leistungskurs, den D mit A gemeinsam belegte. Analoges gilt für L_2, L_3 und Schüler B bzw. L_1, L_3 und Schüler C. Daher gilt für je drei Leistungskurse, dass jeder Schüler des Jahrgangs zwei von diesen belegt. Seien l_1, l_2 und l_3 die Anzahl der Schüler des Jahrgangs, die den Leistungskurs L_1, L_2 bzw. L_3 belegen und l die Gesamtzahl der Schüler des Jahrgangs, so folgt hieraus

$$l_1 + l_2 + l_3 = 2l$$

Daher gilt für $l_i, i \in \{1, 2, 3\}$:

$$l_i \geq \frac{2}{3}l$$