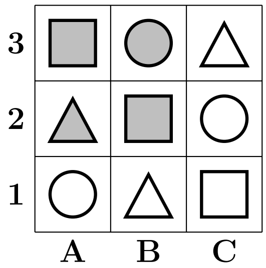
1 Vorschule

Lösung 101-11



Lösung 101-12

Die Froschgruppe hat die meisten Plätzchen gebacken.

Lösung 101-13

Schatten A zu Uhr 3
Schatten B zu Uhr 4
Schatten C zu Uhr 9

2 Klassen 1 und 2

Lösung 101-21

	Baum 1	Baum 2	Baum 3
Sterne:	12	25	35
andere Anhänger:	$60 - 12 = 48$	$60 - 25 = 35$	$60 - 35 = 25$

Insgesamt hängen

$$48 + 35 + 25 = 108$$

andere Anhänger an den drei Bäumen.

Lösung 101-22

Die Mutter hat $7 + 11 = 18$ Plätzchen gebacken. Jedes Kind bekommt 6 Plätzchen. Tim muss ein Plätzchen zurück legen.

Lösung 101-23

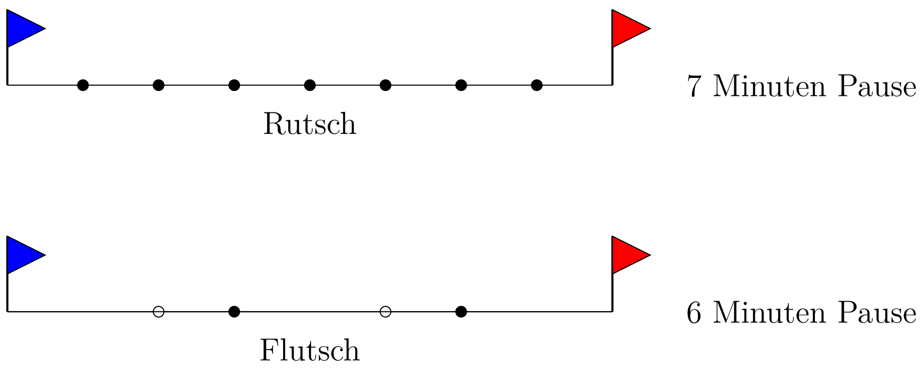
RUN**DREI**SE, TANNEN**ZWEI**G, KL**EINS**TADT, KLA**VIER**STUNDE

Lösung 101-24

Wenn die Diagonale aus 10 Pralinen besteht, sind es insgesamt 10 Zeilen und 10 Spalten. Das sind insgesamt 100 Pralinen.

Lösung 101-25

Flutsch gewinnt und muss 1 Minute warten.



schwarze Kreise = 1 Minute, weiße Kreise = 2 Minuten

Lösung 101-26

A = 6	**B** = 5	**C** = 2
D = 3	**E** = 1	**F** = 4

Lösung 101-27

C5

Lösung 101-28

Es sind jetzt 7 Haufen Schnee.

3 Klassen 3 und 4

Lösung 101-31

AT kann nur 10 sein, denn A ist nicht 0 und A und T sind verschieden und AT ist kleiner als 12.

Dann kann DV nur 23 sein, denn 1 und 0 sind schon vergeben, D und V stehen für verschiedene Ziffern und DV ist kleiner als 24.

Dann kann EN nur noch 45 sein, denn 0, 1, 2 und 3 sind schon vergeben, E und N stehen für verschiedene Ziffern und EN ist kleiner als 46.

Es folgt

$$AD + VE + NT = 12 + 34 + 50 = 96$$

Lösung 101-32

Lösung 101-33

In beiden Termen kommt 2016 vor. Wir können also so rechnen:

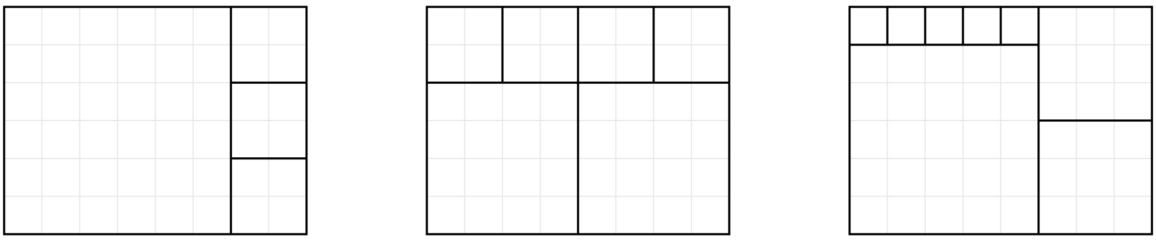
$$\begin{aligned} 2015 - 2014 &= 1 \\ 1 \cdot 2016 &= 2016 \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist 2016.

Lösung 101-34

1 =	Kegel	**2** =	Würfel	**3** =	Rad aus Holzbaukasten
4 =	Pyramide	**5** =	Ball	**6** =	leerer Blumentopf

Lösung 101-35



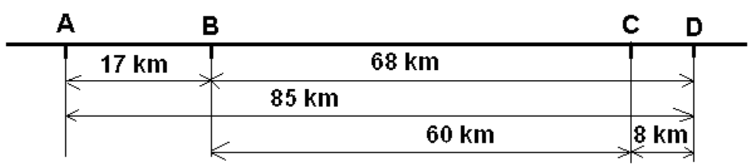
Lösung 101-36

1. Anton
2. Leon
3. Max
4. Julius

Lösung 101-37

$$
\begin{aligned}
39 + 16 &= 55 & (1)\\
9 \cdot 4 : 6 &= 6 & (2)\\
4 \cdot 15 - 60 &= 0 & (3)\\
(63 + 27) : 9 &= 10 & (4)
\end{aligned}
$$

Lösung 101-38



Nacheinander berechnet man folgende Abstände:

A-B: 17 km

B-D: 68 km ($4 \cdot 17 = 68$)

A-D: 85 km ($17 + 68 = 85$)

B-C: 60 km ($85 - 25 = 60$)

C-D: 8 km ($68 - 60 = 8$)

4 Klassen 5 und 6

Lösung 101-41

Aus (5) und (7) folgt, dass der Sieger nur Christian sein kann. (Sieger ist größer als Bernd, Axel ist kleiner als Bernd und damit kleiner als der Sieger).

Daher hat Christian auch blondes Haar.

Da der Sieger Christian ist, gilt die Negation von (4), d.h., Axel hat kein schwarzes Haar. Wegen (5) hat Axel auch kein blondes Haar. Axel hat damit brünettes Haar und Bernd hat schwarzes Haar.

Daraus und aus (6) folgt, dass Bernd Dritter wurde und Axel Zweiter wurde.

Aus der nunmehr bekannten Plazierung und (5) und (7) folgt, dass Axel der Kleinste, Bernd der Zweitgrößte und Christian der Größte sein muss.

Aufteilung:

1. Christian, blond, 165cm

2. Axel, brünett, 162cm

3. Bernd, schwarz, 164cm

Lösung 101-42

Angenommen, in den Schalen 2 und 3 liegen anfangs x Äpfel. Dann liegen in Schale 1 anfangs $x/2$ Äpfel. Nun können wir die schrittweise Verteilung als Tabelle aufschreiben:

	Schale 1	**Schale 2**	**Schale 3**
Start:	$\frac{x}{2}$	x	x
Schritt 1:	$\frac{x}{2}-2$	$x+2$	x
Schritt 2:	$\frac{x}{2}-2$	$x-2$	$x+4$
Schritt 3:	$\frac{x}{2}+4$	$x-2$	$x-2$

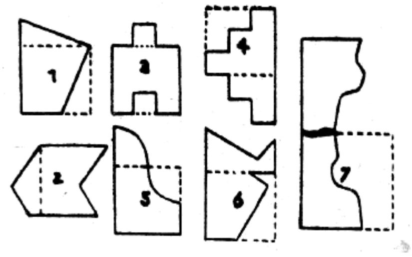
Nach dem dritten Schritt liegen in allen Schalen gleich viele Äpfel. Es gilt also

$$\begin{aligned} \frac{x}{2}+4 &= x-2 \\ x+8 &= 2x-4 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

In der ersten Schale lagen anfangs 6 Äpfel, in den beiden anderen Schalen jeweils 12 Äpfel.

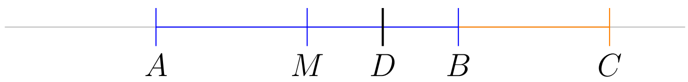
	Schale 1	**Schale 2**	**Schale 3**
Start:	6	12	12
Schritt 1:	4	14	12
Schritt 2:	4	10	16
Schritt 3:	10	10	10

Lösung 101-43



Lösung 101-44

Wir bezeichnen die Endpunkte der gegebenen Strecke mit A und B. Mit Zirkel und Lineal konstruieren wir den Mittelpunkt M der Strecke AB. Nun zeichnen wir den Kreis um B mit Radius MB. Dieser schneidet die Verlängerung von AB über B hinaus in einem Punkt C. Die Strecke AC hat die Länge 1 dm. Die gesuchte Strecke AD der Länge 1/2 dm erhalten wir, indem wir den Mittelpunkt D der Strecke AC konstruieren.



Lösung 101-45

Aron Szedö, Klasse 4

Die Summe kann nicht 99 ergeben, weil es immer 10 gerade und 10 ungerade Zahlen gibt. Die Summe von 10 geraden Zahle ist gerade und die Summe von 10 ungeraden Zahlen wird gerade. So kann das Ergebnis nicht ungerade sein, also nicht 99.

Musterlösung: Angenommen, die Teller seien im Uhrzeigersinn durchnummeriert. Legt man auf Teller 1 eine ungerade Anzahl Plätzchen, dann liegt auf Teller 2 eine gerade Anzahl, auf Teller 3 wieder eine ungerade Anzahl usw. bis auf Teller 19 schließlich eine ungerade Anzahl plätzchen liegt. Auf 10 Tellern liegt jetzt eine gerade Anzahl Plätzchen, auf 10 Tellern eine ungerade Anzahl. Die Summe ist auf jeden Fall gerade. Das gilt auch, wenn man zunächst auf Teller 1 eine gerade Anzahl Plätzchen legt. Bei keiner Verteilung der Plätzchen, die den Bedingungen der Aufgabe genügt, kann die Gesamtzahl der Plätzchen ungerade sein, also auch nicht 99.

Lösung 101-46

Das Quadrat hat die Seitenlänge $108 : 4 = 27$ cm, also einen Flächeninhalt von 729 cm^2. Der Flächeninhalt des Quadrats $EFGH$ beträgt dann $729 - 648 = 81$ cm^2. Es hat eine Kantenlänge von 9 cm, also einen Umfang von 36 cm.

Lösung 101-47

Da 41 eine Primzahl ist, muss stets einer der beiden Faktoren 1 sein, der andere 41.

a) Für $x = 1$ folgt aus $x + y = 41$, dass $y = 40$ ist. Für $x = 41$ gibt es keine natürliche Zahl y, so dass $x + y = 1$ ist. Das einzige Paar, das a) zu einer wahren Aussage macht, ist also $(1, 40)$.

b) Für $x = 1$ gibt es keine natürliche Zahl y, so dass $x - y = 41$ gilt. Für $x = 41$ ergibt sich aus $x - y = 41$, dass $y = 40$ ist. Das einzige Paar, das b) zu einer wahren Aussage macht, ist also $(41, 40)$.

c) Mit $x = 1$ ergibt sich aus $y - x = 41$ $y = 42$. Mit $x = 41$ ergibt sich $y = 42$. Nur für die Paare $(1, 42)$ und $(41, 42)$ wird c) zu einer wahren Aussage.

Lösung 101-48

Die Gleichung wird richtig, wenn man überall die 2 gegen die 6 austauscht:

$$746582 + 869430 = 1616012$$

5 Klassen 7 und 8

Lösung 101-51

Die Dreiecke $\triangle AFD$ und $\triangle ECD$ sind nach Kongruenzsatz *sws* kongruent. Daher gilt

$$\begin{aligned} \mid \angle DEC \mid &= \mid \angle AFD \mid \\ \mid \angle DAF \mid &= \mid \angle CDE \mid \end{aligned}$$

Außerdem gilt nach Innenwinkelsatz im rechtwinkligen Dreieck $\triangle AFD$:

$$\mid \angle DAF \mid + \mid \angle AFD \mid = 90^\circ$$

Also gilt auch

$$\mid \angle CDE \mid + \mid \angle AFD \mid = 90^\circ$$

Dann muss aber nach Innenwinkelsatz im Dreieck $\triangle FDM$ gelten

$$\mid \angle DMF \mid = 108^\circ - (\mid \angle CDE \mid + \mid \angle AFD \mid) = 90^\circ$$

Die Strecken ED und AF schneiden einander tatsächlich in einem rechten Winkel.

Lösung 101-52

Nach Reflexionsgesetz und Innenwinkelsatz im Dreieck gilt $\delta = 180^\circ - (\alpha + \beta)$.

Lösung 101-53

Ab 5! enden alle weiteren auf 0. Daher hat die Summe $1! + 2! + 3! + 4! + \ldots + 100!$ die gleiche Endziffer wie $1 + 2 + 6 + 24 = 33$. Sie endet auf 3.

Lösung 101-54

Schritt	Anzahl hinzukommender Punkte	Anzahl insgesamt
1	1	1
2	$4 = 4 \cdot 1$	$5 = 2^2 + 1^2$
3	$8 = 4 \cdot 2$	$13 = 3^2 + 2^2$
4	$12 = 4 \cdot 3$	$25 = 4^2 + 3^2$
5	$16 = 4 \cdot 4$	$41 = 5^2 + 4^2$
6	$20 = 4 \cdot 5$	$61 = 6^2 + 5^2$
...	...	...
n	$4 \cdot (n-1)$	$n^2 + (n-1)^2$

a) Siehe Tabelle

b) $a_n = a_{n-1} + 4 \cdot (n-1), n = 2, 3, \ldots$

c) $a_n = n^2 + (n-1)^2, n = 2, 3, \ldots$

d)

$$\begin{aligned} n^2 + (n-1)^2 &= 481 \\ 2n^2 + 2n + 1 &= 481 \\ 2n(n+1) &= 480 \\ n(n+1) &= 240 \end{aligned}$$

Wenn man noch keine quadratischen Gleichungen lösen kann, kann man die Lösung der letzten Gleichung z.B. mittels Primfaktorzerlegung von 240 bestimmen:

$$240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$$

Die beiden Faktoren müssen aufeinanderfolgende natürliche Zahlen sein. Also kommen nur $15 = 3 \cdot 5$ und $16 = 2^4$ in Frage. Das Muster besteht nach 16 Schritten aus 481 Punkten.

Lösung 101-55

Es seien $(m \mid n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ Paare natürlicher Zahlen mit der genannten Eigenschaft. Dnn gilt

$$\begin{aligned} m^2 - n^2 &= 4 \cdot \frac{m+n}{2} \\ (m+n)(m-n) &= 2(m+n) \end{aligned}$$

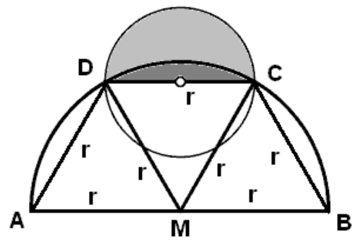
Wegen $m, n > 0$ ist $m + n > 0$, so das die letzte Gleichung äquivalent mit

$$m - n = 2$$

ist. Wenn m und n die gegebene Eigenschaft haben, so folgt, dass sie die Differenz 2 haben müssen. Umgekehrt gilt: haben $m, n \in \mathbb{N}$ die Differenz 2, dann ist die Differenz ihrer Quadrate gleich dem Vierfachen ihres arithmetischen Mittels (sieht man, indem man die obigen Umformungen rückwärts vollzieht.)

Alle Paare natürlicher Zahlen $n, n+2, n \in \mathbb{N}$ und nur diese haben die gegebene Eigenschaft.

Lösung 101-56



Nach Augenschein hat man vermutlich den Eindruck, das Trapez hätte einen größeren Flächeninhalt als die graue Fläche.
M sei der Mittelpunkt der Strecke AB, r sei der Radius des Halbkreises über AB. Der Flächeninhalt des Trapezes ist die Summe der Flächeninhalte dreier gleichseitiger Dreiecke mit Seitenlänge r.

Die dunkelgraue Fläche ist die Differenz der Fläche eines Sechstelkreises mit Radius r und der Fläche eines der genannten gleichseitigen Dreiecke. Bezeichnen wir den Flächeninhalt eines Dreiecks mit A_d, den eines Sechstelkreises mit A_{k6}, den eines Halbkreises mit Radius $\frac{r}{2}$ mit A_{k2}, den der dunkelgrauen Fläche mit A_g, den der hellgrauen Mondsichel mit A_m und den des Trapezes mit A_t, so gilt

$$\begin{aligned} A_t &= 3A_d \\ A_g &= A_{k6} - A_d \\ A_m &= A_{k2} - A_g \end{aligned} \qquad \text{also} \qquad \begin{aligned} A_m &= A_{k2} - A_{k6} + A_d \\ 3A_m &= A_t - 3(A_{k6} - A_{k2}) \end{aligned}$$

Es ist $A_{k6} = \frac{\pi r^2}{6}$ und $A_{k2} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{\pi r^2}{8}$, d.h.

$$A_{k6} - A_{k2} = \frac{\pi}{6}r^2 - \frac{\pi}{8}r^2 = \frac{\pi r^2}{24}$$

also $3(A_{k6} - A_{k2}) = \frac{\pi r^2}{8} = A_{k2}$. Folgende Gleichung gilt also:

$$A_t = 3A_m + A_{k2}$$

Die schwarze und die graue Fläche sind gleich groß.

Lösung 101-57

Der Fehler steckt in Zeile 1: Division durch $4 - x$ ist im Allgemeinen keine äquivalente Umformung. Man muss hier 3 Fälle unterscheiden:

1) $x = 4$ Dann ist $4 - x = 0$ und die gegebene Ungleichung reduziert sich zu $0 < 0$. Das ist ein Widerspruch. Also ist $x = 4$ keine Lösung.

2) $x < 4$, also $x \in \{1, 2, 3\}$. Dann ist $4 - x > 0$ und Division durch $4 - x$ ist eine äquivalente Umformung.

3) $x > 4$. Dann ist $4 - x < 0$ und bei Division durch $4 - x$ kehrt sich das Ungleichheitszeichen um.

zu 2) (Division durch $4 - x$)

$$\begin{aligned} x &< 5x - 24 \mid +24 \mid -x \\ 24 &< 4x \mid: 4 \\ 6 &< x \end{aligned}$$

Da andererseits $x < 4$ gilt, gibt es kein $x \in \mathbb{N}$, das beiden Bedingungen genügt. In diesem Fall hat die Ungleichung keine Lösung.

zu 3) (Division durch $4 - x < 0$)

$$\begin{aligned} x &> 5x - 24 \mid +24 \mid -x \\ 24 &> 4x \mid: 4 \\ 6 &> x \end{aligned}$$

Es muss also sowohl $x < 6$ als auch $x > 4$ und $x \in \mathbb{N}$ gelten. Nur $x = 5$ erfüllt alle drei Bedingungen.

Lösung 101-58

Für die Kundennummern sind 4 Varianten möglich:

V1) Sie bestehen aus 1 Ziffer (diese kommt 8 mal vor)

V2) Sie besteht aus 2 Ziffern (jede kommt viermal vor)

V3) Sie besteht aus 4 Ziffern (jede kommt zweimal vor)

V4) Sie besteht aus 8 Ziffern (jede kommt einmal vor)

Variante V1 ist für Ritas Nummer nicht möglich, denn laut Voraussetzung besteht sie nicht aus 8 Nullen und ist folglich nicht kleiner als 10000000. Ihr Quadrat wäre dann nicht 8stellig.

Variante V4 ist aus einem analogen Grnd nicht möglich. Auch dann wäre Ritas Nummer nicht kleiner als 10000000.

Falls Variante V3 zuträfe, dann könnte Ritas Kundennummer höchstens 2 Nullen enthalten, wäre also nicht kleiner als 100000. Das Quadrat einer solchen Zahl ist ebenfalls nicht 8stellig.

Folglich muss Ritas Nummer aus genau 2 Ziffern bestehen (Variante V2). Eine dieser Ziffern muss 0 sein, weil anderenfalls das Quadrat wieder zu groß würde. Alle Nullen müssen am Anfang der Kundennummer stehen (sonst wäre das Quadrat nicht 8stellig). Ritas Kundennummer hat also die Form $0000nnnn$ mit einer Ziffer $1 \leq n \leq 9$. Für die möglichen Ziffern $n \in \{1, \ldots, 9\}$ ergibt sich nur bei $n = 7$ eine Zahl, in der jede Ziffer genau gleich oft, nämlich genau einmal, vorkommt: 60481729

Rita hat die Kundennummer 00007777 und Gabi 60481729.

6 Klassen 9 bis 13

Lösung 101-61

Zu zeigen ist, für jedes natürliche $k > 1$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$(n-k+1)^2+(n-k+2)^2+\ldots+(n-1)^2+n^2 = (n+1)^2+(n+2)^2+\ldots+(n+k-1)^2 \quad (1)$$

gilt. (1) lässt sich äquivalent umformen:

$$\begin{aligned}
n^2 &= \left[(n+1)^2-(n+1-k)^2\right]+\left[(n+2)^2-(n+2-k)^2\right]+\ldots+\left[(n-1+k)^2-(n-1)^2\right] \\
&= k\left\{[2n+(2-k)]+[2n+(4-k)]+\ldots+[2n+(2(k-1)-k)]\right\} \\
&= k\left\{2n(k-1)-k(k-1)+2\cdot\sum_{i=0}^{k-1} i\right\} \\
&= k\left\{2n(k-1)-k(k-1)+(k-1)k\right\} \\
&= 2n(k-1)k
\end{aligned}$$

Da $n > 0$ ist, folgt $n = 2k(k-1)$. Wegen $k > 1$ ist $2k(k-1)$ ebenfalls eine natürliche Zahl.

Lösung 101-62

Zunächst zeigen wir, dass es unter 5 verschiedenen natürlichen Zahlen, die alle zwischen 2 und 30 liegen, stets 2 gibt, für die die behauptete Ungleichung gilt. Dazu zerlegen wir die Menge $\{2,\ldots,30\}$ in 4 paarweise disjunkte Teilmengen $M_n, n = 1,2,3,4$ mit

$$\begin{aligned}
M_n &= \{2^n,\ldots,2^{n+1}-1\}, n \in \{1,2,3\} \\
M_4 &= \{16,\ldots,30\}
\end{aligned}$$

Fallen 2 der fünf Zahlen $b < a$ in die gleiche Menge M_n, so gilt für diese die Ungleichung:

$$2^n \leq b < a \leq 2^{n+1}-1 \Rightarrow 2^n \leq b < a < 2^{n+1} \Rightarrow 1 < \frac{a}{b} < \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 \;\forall n < 4$$

bzw.

$$1 < \frac{a}{b} \leq \frac{30}{16} < 2 \quad \text{für n} = 4$$

Da wir nur 4 Mengen haben, aber 5 Zahlen zwischen 2 und 30, müssen nach dem Dirichletschen Schubfachprinzip zwei der 5 Zahlen in der gleichen Menge liegen.

Nehmen wir nun 1 zu die Menge der möglichen Zahlen hinzu und wählen 1 als eine der 5 Zahlen, so können wir die übrigen 4 Zahlen aus je einer der Mengen $M_1,\ldots,M_4$ wählen. Der Quotient $k/l, l < k$ wird maximal, wenn k so groß wie möglich und l so klein wie möglich gewählt wird. Im ungünstigsten Fall wählen wir für die übrigen 4 Zahlen jeweils das Maximum aus M_n, also $\{1, 3, 7, 15, 30\}$. Für die beiden letzten möglichen Zahlen, 15 und 30, gilt die behauptete Ungleichung. Die Ungleichung gilt also auch in dem Fall, dass eine der fünf Zahlen die 1 ist.

Lösung 101-63

Für r und h gilt
$$h = -\frac{H}{R}r + H = H\left(1 - \frac{r}{R}\right) \tag{1}$$
Das Volumen des kleinen Kegels ist gleich

$$\begin{aligned} V_h(r) &= \frac{1}{3}\pi r^2 h \\ &= \frac{1}{3}\pi r^2 H\left(1 - \frac{r}{R}\right) \end{aligned}$$

Das Volumen hat ein Extremum bei r_0, wenn die erste Ableitung von V bei r_0 gleich 0 und die zweite Ableitung von V bei r_0 ungleich 0 ist. Notwendig ist folglich

$$0 = \frac{2}{3}\pi H r_0 - \frac{\pi}{R}H r_0^2$$

bzw.
$$r_0 = \frac{2}{3}R \tag{2}$$
Wegen
$$V''\left(\frac{2}{3}R\right) = -\frac{2}{3}\pi H < 0$$
handelt es sich für diesen Wert r_0 aus (2) um ein Maximum. Aus (1) folgt
$$h = H\left(1 - \frac{2}{3}r \cdot \frac{1}{R}\right) = \frac{1}{3}H$$
Das Volumen des kleinen Kegels ist maximal für

$$r = \frac{2}{3}R \text{ und } h = \frac{1}{3}H$$

Es ist dann gleich
$$V_{\text{max}} = \frac{4}{81}\pi R^2 H$$
Das Volumen des großen Kegels beträgt

$$V_G = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

Es gilt also
$$V_K : V_G = 4 : 27$$

Lösung 101-64

Uwe braucht für den Schulweg 5 Minuten. Aus (1) und (3) folgt, dass Uwe 12:59 die Schule verließ. Er kam also um 13:04 zu Hause an. Die Uhrzeit, die die Museumsuhr zeigt, benötigt man also gar nicht, aber zum Glück ergibt sich daraus und aus (2) kein Widerspruch.

Lösung 101-65

Da die Wurzel stets nichtnegativ ist, gilt $x \geq 0$. Ferner ist $\sqrt{a+x}$ wegen $a \in \mathbb{R}^+$ reell. Für $x \leq a(a-1)$ ist der Term $\sqrt{a-\sqrt{a+x}}$ reell. Wir erhalten also als Definitionsbereich für x das Intervall

$$0 \leq x \leq a(a-1) \tag{1}$$

Dieses ist nicht leer für $a \geq 1$. Für $0 < a < 1$ hat die Gleichung

$$\sqrt{a-\sqrt{a+x}} = x \tag{2}$$

keine reellen Lösungen. Wir setzen also im Folgenden voraus:

$$a \in \mathbb{R}, \quad a \geq 1 \tag{3}$$

Aus (2) folgt durch äquivalente Umformungen

$$\begin{aligned} a-\sqrt{a+x} &= x^2 \\ a-x^2 &= \sqrt{a+x} \\ (a-x^2)^2 &= a+x \\ x^4-2ax^2-x+a(a-1) &= 0 \\ (x^2+x-a+1)(x^2-x-a) &= 0 \end{aligned}$$

Das Produkt auf der linken Seite ist gleich 0 genau dann wenn einer der beiden Faktoren gleich 0 ist. Betrachten wir den ersten Faktor. Falls es nichtnegative reelle Zahlen x gibt, für die er gleich 0 wird, so können das nur

$$x_{1|2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{a-\frac{3}{4}}$$

sein. Wegen (3) ist die Wurzel reell. Lösung x_2 entfällt, da sie negativ ist. Lösung x_1 ist nichtnegativ gdw.

$$a-\frac{3}{4} \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow a \geq 1$$

und dies ist nach (3) stets der Fall. x_1 ist also für jedes zulässige a Lösung von (2).

Betrachten wir nun den zweiten Faktor. Falls es nichtnegative reelle Zahlen x gibt, für die er gleich 0 wird, so können das nur

$$x_{3|4} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{4a+1}\right)$$

sein. Für $a \geq 1$ ist die Wurzel auf der rechten Seite stets reell. x_4 ist für $a \geq 1$ kleiner als 0. Daher ist x_4 keine Lösung von (2). Ferner gilt wegen

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{4a+1}\right) &< \sqrt{a+\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{4a+1}\right)} \\ a-\sqrt{a+\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{4a+1}\right)} &< \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{4a+1}+2a\right) \\ \sqrt{a-\sqrt{a+\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{4a+1}\right)}} &< \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{4a+1}\right) \end{aligned}$$

Für x_3 gilt folglich (2) für kein $a \geq 1$.

(2) hat für kein $0 < a < 1$ reelle Lösungen und für jedes $a \in \mathbb{R}, a \geq 1$ genau 1 Lösung:

$$x_1 = -\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{4a - 3}\right)$$

Lösung 101-66

Für $n = 0$ ist $a = 1$ und $b = 0$ und 0 und 1 sind teilerfremd. Für $n \neq 0$ ist

$$a \equiv 1 \mod 2n \quad , \quad b \equiv 0 \mod 2n,$$

woraus die Teilerfremdheit von a und b folgt.