# 1 Vorschule

### Lösung 103-11

Es stehen noch 8 Autos da:

$$9 - 1 = 8$$

### Lösung 103-12

Die Nachbarzahlen von 2 sind 1 und 3. Die beiden anderen Schweinchen haben die Startnummern 1 und 3.

### Lösung 103-13

a) Anton ist der schwerste der 3 Jungen.
b) ja, Tim ist leichter als Benni.
c) Tim links, Anton rechts.

### Lösung 103-14

Lampe B

### Lösung 103-15

Es sind 12 Verstecke.

# 2 Klassen 1 und 2

### Lösung 103-21

Schale Nummer 5.

### Lösung 103-22

Das ist der 20. April.

21. März + 31 = 21. April. Aber der 21. ist schon der 1. im nächsten Tierkreiszeichen, also muss es der 20. April sein.

### Lösung 103-23

Wir schreiben in eine Tabelle die mögliche Anzahl Kätzchen:

| **links** | **Mitte** | **rechts** | **zusammen** |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 2 | 3 |
| 2 | 1 | 4 | 7 |
| 3 | x | 6 | $\geq 9$ |

Nur die Zeile, die mit 2 beginnt, gibt eine korrekte Verteilung der Kätzchen an.

Im linken Korb sitzen 2 Kätzchen, im mittleren Korb sitzt 1 Kätzchen, im rechten Korb sitzen 4 Kätzchen.

**Lösung 103-24**

Aus „Das Mädchen, dass 8 Osternester gefunden hat und Anna gehen in die gleiche Klasse“ sowie „Anna hat nicht die wenigsten Osternester gefunden.“ folgt, dass Anna nicht 8 und nicht 5 Osternester gefunden hat. Also hat Anna 7 Osternester gefunden.

Aus „Das Mädchen, das 5 Osternester gefunden hat, und Charlie sind zusammen im Schulchor.“ und der Tatsache, dass Anna 7 Osternester gefunden hat, folgt, dass Charlie 8 Osternester gefunden hat.

Jetzt folgt, dass Kira 5 Osternester gefunden hat.

| 5 Osternester | 7 Osternester | 8 Osternester |
|---|---|---|
| Kira | Anna | Charlie |

**Lösung 103-25**

**Oksana Gu., 8 Jahre, Klasse 2**

Oksana hat 3 Lösungen gefunden, bei denen nicht nur die Zeilensummen gleich 18 sind, sondern auch die Spaltensummen:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | 8 | 2 | 1 |
| 1 | 2 | 8 | 7 |
| 4 | 3 | 5 | 6 |
| 6 | 5 | 3 | 4 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | 2 | 8 | 1 |
| 1 | 8 | 7 | 2 |
| 4 | 5 | 3 | 6 |
| 6 | 3 | 5 | 4 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | 2 | 8 | 1 |
| 4 | 5 | 3 | 6 |
| 1 | 8 | 2 | 7 |
| 6 | 3 | 5 | 4 |

**Lösung 103-26**

**Oksana Gu., 8 Jahre, Klasse 2**

Wenn Großmutter 10 Mal so alt wie Max ist, hat Großmutters Zahl eine 0 am Ende. Die einzige Zahl zwischen 78 und 83 mit einer 0 am Ende ist 80.

Wenn Großmutter 80 Jahre alt ist, ist Max 8.

8 : 2 = 4 Also ist seine Schwester 4.

**Lösung 103-27**

**a)** $5 \cdot 0,60$ € $+ 4 \cdot 0,50$ € $+ 8 \cdot 0,20$ € $+ 12 \cdot 0,10$ € $= 3$ € $+ 2$ € $+ 1,60$ € $+ 1,20$ € $=$ $7,80$ € . Anne muss 7,80 € bezahlen.

**b)** $10 € - 7,80 € = 2,20 €$ . Sie hat noch 2,20 € für Bonbons übrig.

**c)** Sie kann 22 Bonbons kaufen. Anne und ihr Bruder bekommen je 11 Bonbons.

**Lösung 103-28**

$R$ kann man sofort ausrechnen: $R = 18 : 2 = 9$. Damit kann man $O$ und $E$ bestimmen: $O = 15 - R = 15 - 9 = 6$, $E = 17 - R = 17 - 9 = 8$. Knifflig wird es für $S, T$ und $N$. $S$ kann gleich 0 oder 2 oder 4 sein. Für $S = 0$ wäre $T = 0$. Das geht nicht, weil jeder Buchstabe für eine andere Ziffer steht. Für $S = 2$ folgt $T = 1$ und $N = 10$, Aber alle Ziffern sind kleiner als 10. Also geht $S = 2$ nicht. Es bliebt nur noch $S = 4$. Dann ist $T = 2$ und $N = 7$. Ergebnis:

$$O + S + T + E + R + N = 6 + 4 + 2 + 8 + 9 + 7 = 36$$

# 3 Klassen 3 und 4

**Lösung 103-31**

Für die Antworten habe ich

$$2 \cdot 15 = 30$$

Punkte bekommen. Vorher hatte ich

$$6175 - 30 = 6145$$

Punkte.

**Lösung 103-32**

Die Eltern haben eine Tochter mehr als Söhne:

Aus Felix' Sicht sieht es so aus:

1. Falls Felix keinen Bruder hat, hat er 2 Schwestern S1 und S2.
2. Falls Felix einen Bruder (B1) hat, hat er 3 Schwestern S1, S2 und S3.
3. Falls Felix zwei Brüder (B1 und B2) hat, hat er 4 Schwestern S1, S2, S3 und S4.
4. ...

Aus der Sicht von Felix' Eltern sieht es so aus:

1. 1 Sohn = Felix, 2 Töchter: Felix 2 Schwestern S1 und S2. Das ist eine Tochter mehr als Söhne.
2. 2 Söhne = Felix und Felix Bruder B1, 3 Töchter: Felix 3 Schwestern S1, S2 und S3. Das ist eine Tochter mehr als Söhne.

3. 3 Söhne = Felix und Felix Brüder B1 und B2, 4 Töchter: Felix 3 Schwestern S1, S2, S3 und S4. Das ist eine Tochter mehr als Söhne.
4. ...

Die Söhne der Eltern sind Felix und seine Brüder. Die Töchter der Eltern sind Felix' Schwestern. Zu den Söhnen kommt aus der Elternsicht also nur noch Felix als Sohn hinzu. Daher ist es eine Tochter mehr als Söhne.

**Lösung 103-33**

| Klasse von | Aufgabe: | kg | Platz |
|---|---|---|---|
| Sara | 123 kg | 123 kg | 1. |
| Leonie | 100 kg + 2500 g | 102,5 kg | 2. |
| Lars | 98000 g | 98 kg | 3. |
| Julian | 114000 g − 25 kg | 89 kg | 4. |

**Lösung 103-34**

1 Bus hat $512 : 16 = 32$ Plätze. $180 = 5 \cdot 32 + 20$.

Es werden 6 Busse benötigt.

**Lösung 103-35**

Es sind insgesamt 9 Vögel, von jeder Art genau 3.

**Lösung 103-36**

Da der zweite Kunde 2 Meter mehr kaufte, als der erste, kosten 2 Meter Stoff 20 € , also 1 Meter kostet 10 € .

**1.Kunde:** 30 €

**2.Kunde:** 50 €

**3.Kunde:** 90 €

**Lösung 103-37**

Der Floh muss insgesamt 2 lange Sprünge nach vorn und 3 kurze Sprünge zurück machen. Das kann er in beliebiger Reihenfolge tun:

$$2 \cdot 12 - 3 \cdot 7 = 3$$

**Lösung 103-38**

Er muss $4 \cdot 4 + 1 = 17$ Socken ziehen. Im ungünstigsten Fall zieht er zuerst 4 mal hintereinander je eine der 4 Farben. Beim nächsten Versuch wird ein Fünferpack voll.

# 4 Klassen 5 und 6

**Lösung 103-41**

Angenommen, Zahnrad 1 dreht sich im Uhrzeigersinn. Dann dreht sich Zahlnrad 2 entgegen dem Uhrzeigersinn, Zahnrad 3 mit dem Uhrzeigersinn, ..., Zahnrad 10 engegen dem Uhrzeigersinn, Zahnrad 11 mit dem Uhrzeigersinn, was nicht möglich ist, weil Zahnrad 11 sich nicht in der gleichen Richtung drehen kann wie Zahnrad 1.

Es können sich nie alle Zahnräder gleichzeitig drehen.

**Lösung 103-42**

(1) ⇒ Andrea und Beate heißen nicht Hofmann. (2) ⇒ Christine heißt ebenfalls nicht Hofmann. Daher heißt **Doris Hofmann.**
(3) ⇒ Andrea und Christine heißen nicht Ilgen. Da auch Doris nicht Ilgen heißt, muss **Beate Ilgen** heißen.
(4) ⇒ Andrea heißt nicht Grohmann. Christine heißt also Grohmann. Bleibt für Andrea nur noch der Nachname Fischer. Die beiden Mädchen heißen also **Christine Grohmann** und **Andrea Fischer**.

**Lösung 103-43**

Der Radfahrer braucht für den Weg exakt die Zeit, die der Fußgänger mit Pausen verbringt. Da er 6 Stunden nach dem Fußgänger losfährt und gleichzeitig mit dem Fußgänger eintrifft, muss der Fußgänger insgesamt 6 Stunden gelaufen sein. Der Waldsee ist also

$$6\text{h} \cdot 5\frac{\text{km}}{\text{h}} = 30\text{km}$$

vom Jagdschloss entfernt.

Damit beträgt die Durchschnittsgeschwindigkeit des Radfahrers

$$\frac{30\text{km}}{2\text{h}} = 15\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

**Lösung 103-44**

Sohn 9, Tochter 18, Mutter 36, Vater 45. Gesamtalter 108.

**Lösung 103-45**

**Variante 1: (Leo Gitin, 8 Jahre, Klasse 3)**

Es müssen (genau, H.W.) 2 Nullen sein, weil 10 eine 0 ergibt und $2 \cdot 5$ eine Null ergibt. Da 62270298 nicht durch 4 teilbar ist, ist auch die dritte Zahl ungleich 13!.

**Variante 2:**

Die Primfaktorzerlegung von 13! ergibt

$$13! = 2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$$

Eine Zahl endet genau dann auf 0, wenn sie durch $10 = 2 \cdot 5$ teilbar ist. 13! enthält genau zweimal den Faktor 5 und zehnmal den Faktor 2. Folglich endet sie auf genau zwei Nullen. Ritas und Svens Ergebnis ist daher falsch. Bleibt noch, Tonis Ergebnis zu überprüfen. Da der Faktor 2 zehnmal enthalten ist, muss 13! auf jeden Fall durch 16 teilbar sein. Wegen

$$6227029800 = 10000 \cdot 62270 + 29800$$

und $16 \mid 10000$ genügt es, die Teilbarkeit von 29800 auf 16 zu überprüfen. Es gilt $29800 = 2^3 \cdot 3725$. 29800 ist daher nicht durch 16 teilbar und somit die von Toni berechnete Zahl ebenfalls nicht.

**Lösung 103-46**

Angenommen, es haben zu Beginn $x$ Kartoffelpuffer auf dem Teller gelegen. Dann gilt

$$\begin{aligned} 2\,(2(2x-8)-8)-8 &= 0 \,|: 2 \\ 2(2x-8)-8-4 &= 0 \\ 2(2x-8)-12 &= 0 \,|: 2 \\ 2x-8-6 &= 0 \\ 2x &= 14 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Zu Beginn lagen 7 Kartoffelpuffer auf dem Teller.

**Lösung 103-47**

Der Punkt $A$ liegt auf der Geraden durch $B$ und $C$ zwischen $B$ und $C$.

**Lösung 103-48**

Damit die Zahl so groß wie möglich wird, nehmen wir zunächst an, die Telefonnummer beginne mit 2. Die zweite Stelle kann dann nicht 1 und nicht 3 sein. Um wiederum die nun mögliche größte Zahl zu bekommen, nehmen wir an, die Tausenderstelle sei die 5. Für die Hunderter- bis Einerziffer sind dann noch 1, 3 und 4 möglich. 3 und 4 dürfen nicht nebeneinander stehen. Die Zehnerstelle muss somit die 1 sein. Die Hunderterstelle darf nicht die 4 sein. Die drei letzten Ziffern können also nur 314 in dieser Reihenfolge sein. Die Telefonnummer 25314 ist aber gerade. Also kann die Telefonnummer nicht mit 25 beginnen.

Angenommen, sie beginne mit 24. Dann bleiben für die Hunderter- bis Einerstelle noch die Ziffern 1, 3 und 5. 3 und 5 sind als Hunderterziffer nicht möglich, denn dann stünden aufeinanderfolgende Zahlen nebeneinander. Die Hunderterziffer ist somit zwingend die 1. Da sowohl 3 als auch 5 ungerade sind, die gesuchte Telefonnummer aber so groß wie möglich sein muss, muss die Zehnerziffer die 5, die Einerziffer die 3 sein.

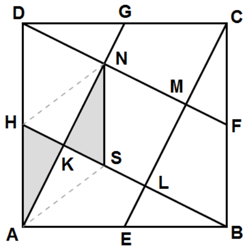
Da die Nummer systematisch mit den größtmöglichen Zehntausender- und Tausenderstelle aufgebaut wurde, kann es keine größere fünfstellige Zahl geben, die allen von Herrn Mathe genannten Bedingungen genügt.

Die gesuchte Telefonnummer ist die 0345-24153.

# 5 Klassen 7 und 8

### Lösung 103-51

Mittels Kongruenzsatz *sws* angewendet auf die Dreiecke $\triangle AGD$ und $\triangle DFC$ und Innenwinkelsatz, angewendet auf $\triangle AGD$ bzw. $\triangle DNG$ zeigt man zunächst, dass $\angle MNK = 90°$ ist und analog, dass auch alle anderen Winkel im Viereck $KLMN$ rechte Winkel sind. (Dies wurde in einer früheren Aufgabe bereits ausführlich bewiesen). Weiter gilt: nach Konstruktion sind die Strecken $DF$ und $HB$ parallel (Kongruenz der Winkel $\angle ABH$ und $\angle CDF$ folgt aus Kongruenz der Dreiecke $\triangle ABH$ und $\triangle FCD$). Es ist also




$$| AK |:| AN |=| AH |:| AD |$$

Da $H$ der Mittelpunkt der Strecke $AD$ ist, folgt $| AK |=| KN |$.

Damit stehen in dem Viereck $ASNH$ die Diagonalen senkrecht aufeinander und $K$ ist der Mittelpunkt der Diagonale $AN$. Das einzige Viereck, in dem diese beiden Bedingungen erfüllt sind, ist die Raute (Rhombus). $ASNH$ ist also ein Rhombus, woraus die behauptete Kongruenz der Dreiecke $\triangle HAK$ und $SNK$ folgt (z.B. Kongruenzsatz *ssw*).

### Lösung 103-52

**Leo Gitin, 9 Jahre, Klasse 5:**

Jedes $z \in \mathbb{Z}$ kann man so darstellen:

$$z = 7k + p, k \in \mathbb{Z}, p = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$z^3 = (7k + p)^3 = (7k)^3 + 3(7k)^2 p + 3 \cdot 7kp^2 + p^3$$

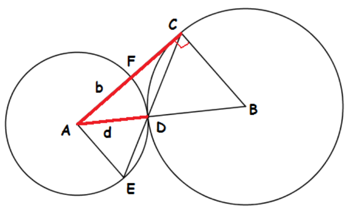
Also hängt die Teilbarkeit durch 7 von $p^3$ bzw. $p^3 - 1$ bzw. $p^3 + 1$ ab.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $p = 0$ | $z^3 \mid 7$ | | |
| $p = 1$ | $p^3 = 1$ | $p^3 - 1 = 0$ | $(z^3 - 1) \mid 7$ |
| $p = 2$ | $p^3 = 8$ | $p^3 - 1 = 7$ | $(z^3 - 1) \mid 7$ |
| $p = 3$ | $p^3 = 27$ | $p^3 + 1 = 28$ | $(z^3 + 1) \mid 7$ |
| $p = 4$ | $p^3 = 64$ | $p^3 - 1 = 63$ | $(z^3 - 1) \mid 7$ |
| $p = 5$ | $p^3 = 125$ | $p^3 + 1 = 126$ | $(z^3 + 1) \mid 7$ |
| $p = 6$ | $p^3 = 216$ | $p^3 + 1 = 217$ | $(z^3 + 1) \mid 7$ |

### Lösung 103-53

*Analyse:*

Es sei $ABC$ das gesuchte Dreieck. Die gegebenen Teile sind in der Skizze rot markiert. Die Kreise um $B$ mit Radius $a =| BC |$ und um $A$ mit Radius $d = c - a$ berühren einander im Punkt $D$ auf der Seite $AB$. $E$ sei der Schnittpunkt des Strahls von $C$ durch $D$ mit dem Kreis um $A$. Die Dreiecke $\triangle BCD$ und $\triangle AED$ sind



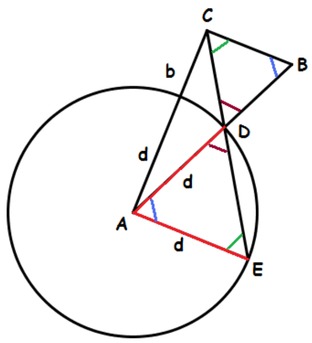
gleichschenklig mit den Schenkeln $BC$ und $BD$ bzw. $AE$ und $AD$. Die Winkel $\angle BCD$, $\angle CDB$ bzw. $\angle AED$, $\angle EDA$ sind folglich paarweise gleich. Da $\angle EDA$ und $\angle CDB$ als Scheitelwinkel ebenfalls kongruent sind, sind alle vier genannten Winkel kongruent. Folglich sind die Strecken $AE$ und $BC$ Parallel. Hieraus lässt sich folgende Konstruktion des gesuchten Dreiecks ableiten:

*Konstruktion:*

Man konstruiert die Strecke $AC$ der Länge $b$, einen Kreis um $A$ mit Radius $d = c - a$, sowie die Senkrechten zu $AC$ durch $A$ und $C$. Die Senkrechte durch $A$ schneidet den Kreis um $A$ im Punkt $E$. Man konstruiert die Strecke $EC$. Der Schnittpunkt dieser Strecke mit dem Kreis um $A$ heiße $D$. Die Gerade durch $AD$ schneidet die Senkrechte zu $AC$ durch $C$ im gesuchten Punkt $B$.

*Beweis:* Nun muss noch bewiesen werden, dass das so konstruierte Dreieck tatsächlich das gesuchte ist:

Nach Konstruktion hat $AC$ die gegebene Länge $b$ und ist $\angle BCA$ ein rechter. Weiter sind die Strecken $AE$ und $BC$ parallel. Daher sind die Dreiecke $\triangle AED$ und $\triangle BCD$ ähnlich (kongruente Gegenwinkel an geschnittenen Parallelen bzw. kongruente Scheitelwinkel. Folglich sind die Strecken $AE$ und $BC$ bzw. $AD$ und $BD$ paarweise ähnlich. Da $D$ und $E$ auf einem Kreis mit Mittelpunkt $A$ liegen, gilt $\mid AE \mid = \mid AD \mid$ und folglich auch $\mid BC \mid = \mid BD \mid = b$ und somit $\mid AD \mid = c - a = d$.




*Determination:*

Der wesentliche Schritt bei der angegebenen Konstruktion ist die Erzeugung des Punktes $D$ als Schnittpunkt der Strecke $EC$ mit dem Kreis um $A$. Wegen der Dreiecksungleichung $c < a + b$ gilt stets $d = c - a < b$. Daher liegt der Schnittpunkt des Kreises um $A$ mit Radius $d$ mit Strecke $AC$ stets im Inneren der Strecke $AC$. Folglich lässt sich der Punkt $D$ stets eindeutig konstruieren. Wenn es also ein Dreieck mit den gegebenen Teilen gibt, dann ist es eindeutig bestimmt und wie im Schritt 2 konstruierbar.

**Lösung 103-54**

Angenommen, dass Schiff habe $x$ Dreierkabinen, $y$ Zweierkabinen und $z$ Einerkabinen. Dann gilt nach Aussage von Herrn Schmidt $x = z - 5$, also für die Bettenzahl

$$3(z - 5) + 2y + z = 4z + 2y - 15 = 2(2z + y) - 15$$

Der Term auf der rechten Seite dieser Gleichung ist ungerade. Daher kann Herr Müller mit seiner Behauptung, es wären insgesamt 100 Betten, nicht recht haben. Folglich hat tatsächlich Herr Schmidt recht.

**Lösung 103-55**

Man kann es nicht eindeutig ermitteln: es gibt mindestens 2 verschiedene Lösungen.

Die Beträge $A, B$ erfüllen folgende Gleichung:

$$100 \cdot A + B = AB \text{ bzw. } 100 \cdot A = B \cdot (A - 1)$$

Die Lösung $A = B = 0$ ist ausgeschlossen, da $A$ eine natürliche Zahl ist. Wir können also durch $A \neq 0$ teilen:

$$100 = (A - 1) \cdot \frac{B}{A} \tag{1}$$

Aus (1) folgt, für jeden Teiler $B/A$ der Zahl 100, also

$$\frac{B}{A} \in \{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$$

erhält man eine Lösung:

| | 1 | 2 | 4 | 5 | 10 | 20 | 25 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 101 | 51 | 26 | 21 | 11 | 6 | 5 | 3 | 2 |
| B | 101 | 102 | 104 | 105 | 110 | 120 | 125 | 150 | 200 |

**Lösung 103-56**

Die Frage kann man so formulieren: für jede natürliche Zahl $n$ ist

$$T_n := \frac{n(n+1) - 2}{n+2}$$

eine natürliche Zahl. Das gilt tatsächlich, denn wir können den Term wie folgt äquivalent umformen:

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{n^2 + n - 2}{n+2} \\ &= \frac{n^2 + n + 3n - 3n + 4 - 4 - 2}{n+2} \\ &= \frac{(n+2)^2 - 3n - 6}{n+2} \\ &= \frac{(n+2)^2 - 3(n+2)}{n+2} \\ &= n + 2 - 3 \\ &= n - 1 \end{aligned}$$

Es gilt also für jedes $n \in \mathbb{N}$

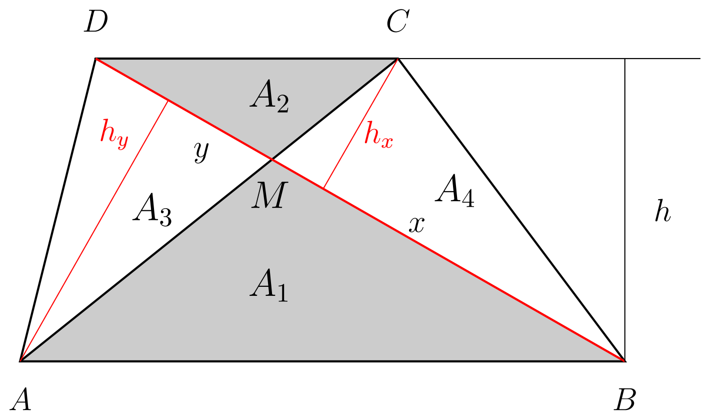
$$n(n+1) = (n-1)(n+2) + 2$$

d.h. $n(n+1)$ lässt bei Division durch $n+2$ den Rest 2.

# 6 Klassen 9 bis 13

**Lösung 103-61**

Das Trapez habe die Ecken $A, B, C, D$ und die Diagonalen mögen einander in $M$ schneiden. Die Höhe des Trapezes sei $h$. Die Flächeninhalte der nicht gefärbten Dreiecke seien $A_3$ und $A_4$. Die Diagnale $BD$ wird durch $M$ in 2 Teile mit den Längen $x$ und $y$ geteilt. Das Dreieck $\triangle MBA$ hat die Grundseite $y$ und die Höhe $h_y$. Das Dreieck $\triangle DMC$ hat die Grundseite $x$ und die Höhe $h_x$.




Der Flächeninhalt $A_{ABD}$ des Dreiecks $\triangle ABD = A_1 + A_3$ ist gleich $A_{ABD} = \frac{1}{2}h \mid AB \mid$, der Flächeninhalt $A_{ABC}$ des Dreiecks $\triangle ABC = A_1 + A_4$ ist gleich $A_{ABC} = \frac{1}{2}h \mid AB \mid$ woraus

$$A_3 = A_4 \tag{1}$$

folgt. Für $A_2$ gilt

$$A_2 = \frac{1}{2}yh_x \Leftrightarrow h_x = \frac{2A_2}{y} \tag{2}$$

Für $A_4$ gilt

$$A_4 = \frac{1}{2}xh_x \tag{3}$$

und aus (2) und (3) folgt

$$A_4 = \frac{x}{y}A_2 \tag{4}$$

Analog folgt für $A_1$ und $A_3$

$$A_3 = \frac{y}{x}A_1 \tag{5}$$

Aus (1), (4) und (5) folgt

$$A_3A_4 = A_3^2 = \frac{x}{y}A_2 \cdot \frac{y}{x}A_1 = A_1A_2$$

d.h.

$$A_3 = A_4 = \sqrt{A_1A_2} \tag{6}$$

Für den Flächeninhalt $A$ des Trapezes $ABCD$ ergibt sich damit

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = A_1 + 2\sqrt{A_1A_2} + A_2 = (\sqrt{A_1} + \sqrt{A_2})^2 \tag{7}$$

(6) und (7) sind die gesuchten Funktionen.

### Lösung 103-62

Drei Strecken mit den Längen $a$ bzw. $b$ bzw. $c$ lassen sich genau dann zu einem Dreieck zusammenfügen, wenn $a+b>c,\ b+c>a,\ c+a>b$ gilt. Außerdem ist hier trivialerweise $a+b+c>0$. Damit findet man:

$$\begin{aligned}
& a+b>c \ \wedge\ b+c>a \ \wedge\ c+a>b \ \wedge\ a+b+c>0 \\
\Leftrightarrow\ & (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b+c) && >0 \\
\Leftrightarrow\ & -a^4+2a^2b^2+2a^2c^2-b^4+2b^2c^2-c^4 && >0 \\
\Leftrightarrow\ & 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) && >a^4+b^4+c^4 \\
\Leftrightarrow\ & a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2 && >2(a^4+b^4+c^4) \\
\Leftrightarrow\ & (a^2+b^2+c^2)^2 && >2(a^4+b^4+c^4).
\end{aligned}$$

### Lösung 103-63

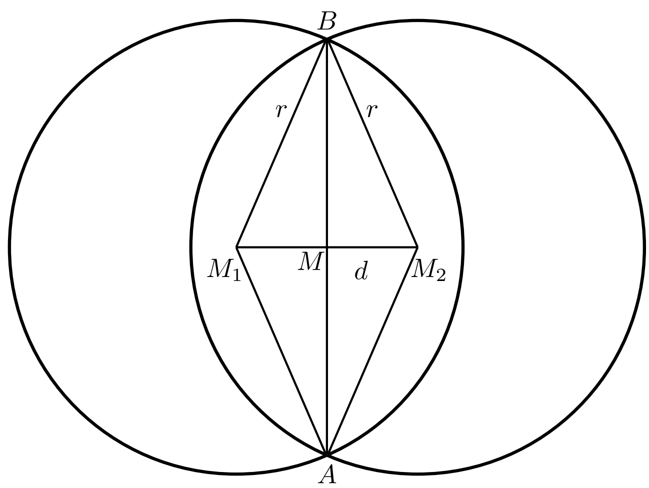
Aus der gegebenen Ungleichung erhalten wir durch äquivalente Umformung:

$$\begin{aligned}
4a^3+4b^3 &\geq (a+b)^3 \\
4(a^3+b^3) &\geq a^3+3a^2b+3ab^3+b^3 \\
3(a^3+b^3) &\geq 3ab(a+b) \\
a^3+b^3 &\geq ab(a+b) \\
a^3-a^2b-ab^2+b^3 &\geq 0 \\
a^2(a-b)-b^2(a-b) &\geq 0 \\
(a-b)^2(a+b) &\geq 0
\end{aligned}$$

Diese Ungleichung gilt genau dann, wenn $a+b\geq 0$ oder wenn $a=b$ ist.

### Lösung 103-64

Es seien $r$ der Radius, $d=\mid M_1M_2\mid$ der Abstand der Mittelpunkte sowie $A$ und $B$ die Schnittpunkte der beiden kongruenten Kreise. Sei $\alpha$ die Größe des Winkels $\angle AM_1B$, so gilt für den Flächeninhalt $A_S$ des zugehörigen Kreissegments über $AB$ (=Differenz des Flächeninhalts des Kreissektors mit Öffnungswinkel $\alpha$ und dem Flächeninhalt des gleichschenkligen Dreiecks $AM_2B$)




$$A_S=\frac{r^2}{2}\alpha-\frac{r^2}{2}-\sin\alpha=\frac{r^2}{2}(\alpha-\sin\alpha)$$

Dieses soll so groß wie ein Viertel der Kreisfläche sein, also

$$\begin{aligned} \frac{r^2}{2}(\alpha - \sin\alpha) &= \frac{\pi}{4}r^2 \\ \alpha - \sin\alpha &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Diese Gleichung lässt sich nur näherungsweise lösen: $\alpha \approx 2,30988$. Aus dem Kosinussatz im rechtwinkligen Dreieck $AMM_1$:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{d/2}{r} = \frac{d}{2r}$$

folgt für den gesuchten Abstand $d$:

$$d = 2r\cos\frac{\alpha}{2}$$

und mit dem Näherungswert für $\alpha$ folgt hieraus

$$d \approx 2r \cdot \frac{2}{5} \approx \frac{4}{5}r$$

D.h. schiebt man zwei kongruente Kreise um etwa 4/5 des Radius oder 2/5 des Durchmessers aufeinander, so ist die Überlappungsfläche so groß, wie eine halbe Kreisfläche.

**Lösung 103-65**

Statt der Folge der Primzahlen betrachten wir eine allgemeinere Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen mit

$$p_1 = 2, p_2 \geq 3, p_{n+1} - p_n \geq 2, n = 3, 4, \ldots$$

Offensichtlich erfüllt die Folge der Primzahlen diese Bedingung. Wir zeigen, dass für die Folge der Partialsummen von $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$S_n := p_1 + p_2 + \cdots + p_n$$

die Behauptung gilt. D.h. für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es zwischen $S_n$ und $S_{n+1}$ mindestens eine Quadratzahl. Angenommen, das sei nicht der Fall, d.h. es gibt eine natürliche Zahl $m$, für die zwischen $S_m$ und $S_{m+1}$ keine Quadratzahl liegt. D.h. es gibt eine natürliche Zahl $k$, so dass gilt

$$k^2 \leq S_m < S_{m+1} \leq (k+1)^2 \tag{1}$$

Dann folgt

$$p_{m+1} = S_{m+1} - S_m \leq (k+1)^2 - k^2 = 2k + 1$$

und wegen $2 + p_m \leq p_{m+1}$ folgt für dieses $m$:

$$p_m \leq 2k - 1$$

Analog folgt

$$p_{m-1} \leq 2k - 3, p_{m_2} \leq 2k - 5 \ldots, p_2 = 3 \leq x, p_1 = 2 \leq x - 1 \tag{2}$$

mit einer geeigneten natürlichen Zahl $x$.

Falls $x = 3$ ist, folgt $p_2 = 3$, $3+2 \leq p_3 \leq 3+2$, also $p_3 = 5$ usw., d.h. in allen Ungleichungen (2) gilt das Gleichheitszeichen. Folglich ist $k = m$ und somit

$$S_{m+1} = 2 + p_2 + \ldots p_{m+1} > 1 + 3 + \ldots (2m+1) = (m+1)^2$$

im Widerspruch zur rechten Ungleichung (1). Falls $x \geq 5$ ist, so ist $x - 2 \geq 3$ und folglich

$$S_m = 2 + p_2 + \ldots p_m < 1 + 3 + \ldots (2k-1) = k^2$$

im Widerspruch zur linken Ungleichung (1). Damit ist (1) widerlegt und die allgemeinere Behauptung bewiesen.

**Lösung 103-66**

Es ist $x, y \geq 0$ (sonst negative Wurzeln). Bei allen Lösungen muss sowohl $x$ als auch $y$ kleiner oder gleich 2016 sein. Sonst wäre $\sqrt{x} + \sqrt{y} > \sqrt{2016}$. Äquivalente Umformung der gegebenen Gleichung ergibt

$$\begin{aligned} \sqrt{y} &= \sqrt{2016} - \sqrt{x} \\ y &= 2016 + x + 2\sqrt{x \cdot 2^5 \cdot 7 \cdot 3^2} \end{aligned}$$

$y$ ist genau dann ganzzahlig, wenn

$$x \cdot 2^5 \cdot 7 \cdot 3^2 = x \cdot 2 \cdot 7 \cdot (2^2 \cdot 3)^2 = x \cdot 14 \cdot 12^2$$

eine Quadratzahl ist, d.h., wenn es eine Quadratzahl $k \leq 144$ gibt, so dass $x = 14k$ gilt. Für jede Quadratzahl $k \leq 144$ erhält man so ganzzahlige Lösungen der gegebenen Gleichung:

| **x** | **y** | **k** |
|---|---|---|
| 0 | 2016 | 0 |
| 14 | 1694 | 1 |
| 56 | 1400 | 4 |
| 126 | 1134 | 9 |
| 224 | 896 | 16 |

| **x** | **y** | **k** |
|---|---|---|
| 350 | 686 | 25 |
| 504 | 504 | 36 |
| 686 | 350 | 49 |
| 896 | 224 | 64 |

| **x** | **y** | **k** |
|---|---|---|
| 1134 | 126 | 81 |
| 1400 | 56 | 100 |
| 1694 | 14 | 121 |
| 2016 | 0 | 144 |