1 Vorschule

Lösung 104-11

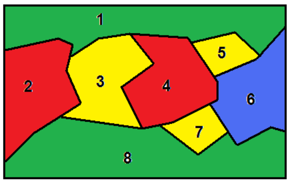
beim zweiten Versuch: $500 > 25$.

Lösung 104-12

Es fehlt Teil 7.

Lösung 104-13

Eine mögliche Färbung ist diese:



Weniger als 4 Farben reichen nicht.

Lösung 104-14

1) Haustiere, denn außer Kühen gibt es noch Hunde, Katzen, ... und das sind alles Haustiere.

2) Insekten, denn außer Feuerwanzen und Marienkäfer gibt es noch viele andere Insektenarten (Bienen, Hummeln, Maikäfer, ...)

3) Zahlen zwischen 1 und 10.

4) Kinder in allen 4 Gruppen des Kindergartens Rübenberg, denn die Eichhörnchengruppe ist nur eine von diesen.

5) Sterne.

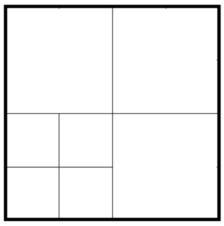
2 Klassen 1 und 2

Lösung 104-21

$$\begin{aligned} 15 : 3 &= 5 \\ 5 + 5 &= 10 \end{aligned}$$

5 weiße und 10 braune Müslistücke sind in meiner Tasse.

Lösung 104-22



Wenn Anton das Papier wieder auseinander faltet, sieht es so wie in der Zeichnung aus. Anton hat die Länge der Seite eines der kleinsten Quadrate gemessen. Die Seite des großen Quadrats ist viermal so lang wie die Seite eines kleinen Quadrats. Das quadratische Papier hatte also die Seitenlänge 16 cm.

Lösung 104-23

JORIS

Lösung 104-24

Anna	Kira	Pia
gelb	blau	rot

Kira hat eine blaue Schleife, denn Anna sagt nicht die Wahrheit. Pia hat keine gelbe Schleife, denn Kira sagt nicht die Wahrheit. Also kann Pia nur die rote Schleife haben. Also hat Anna die gelbe Schleife.

Lösung 104-25

In 2 Jahren werden Felix und seine Schwester zusammen 4 Jahre älter. Sie sind also jetzt zusammen $10 - 4 = 6$ Jahre alt. Felix ist jetzt 4 Jahre alt, seine Schwester 2 Jahre.

Lösung 104-26

Dreieck

Lösung 104-27

$\clubsuit$	$\square$	$\spadesuit$	$\otimes$	$\heartsuit$	$\mho$	$\diamond$	$\triangle$
5	3	10	7	4	9	1	2

Lösung 104-28

B4, D4, B2, D2.

3 Klassen 3 und 4

Lösung 104-31

Die Anzahl Zweier ist immer die Hälfte der Zahl:

4: 2 Zweier
8: 4 Zweier
16: 8 Zweier
Man braucht also 1024 Zweier für eine 2048.

Lösung 104-32

9	1000	2000	50	500	222	1500	60	60	1000	55
+	+	+	+	+	+	-	+	+	+	+
1000	1000	2000	2	1000	878	500	50	40	3000	55
+	-	-	+	-	+	+	-	-	-	-
100	500	1000	100	500	1000	400	10	50	2000	10
+	+	+	-	+	+	-	+	+	+	+
2000	40	1000	5	1000	1200	300	100	40	1000	90
+	+	-	+	-	+	+	-	-	+	−
3000	60	3000	200	500	1300	900	50	30	5000	200
=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=
6109	**1600**	**1000**	**347**	**1500**	**4600**	**2000**	**150**	**60**	**8000**	**170**

Das Lösungswort ist **SCHILDKRÖTE**.

Lösung 104-33

Es wurden 34 Kästen verkauft. Die Einnahmen betragen also $34 \cdot 6$ € $= 204$ € .

Probe: Es bleiben $84 - 34 = 50$ Kästen übrig. Das sind 16 mehr als verkauft wurden.

Lösung 104-34

Das Einzelzimmer für den Lehrer ziehen wir gleich ab. Es bleiben 12 Zimmer.

Nr.	Dreibettzimmer	Zweibettzimmer	Anzahl Zimmer
1.	2	4	6
2.	3	6	9
3.	4	8	12
4.	5	10	15

Von Schritt zu Schritt kommen in der letzten Spalte 3 Zimmer hinzu. Daher ist Zeile 3 die einzige Möglichkeit. Es sind insgesamt $4 \cdot 3 + 8 \cdot 2 = 12 + 16 = 28$ Kinder. Die Mädchen buchen 2 Zweibettzimmer und 2 Dreibettzimmer. Es sind insgesamt $2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 4 + 6 = 10$ Mädchen.

Lösung 104-35

Lösung von Thekla Hamm, 8 Jahre, Klasse 3:

Wenn man wissen will, wieviele Würfel in einem Quader sind, muss man Länge · Breite · Höhe rechnen. Ich muss mir also überlegen, wie ich die Zahl als Malaufgabe aus drei Zahlen aufschreiben kann.

a) Bei 36 habe ich 8 Möglichkeiten gefunden:

$$
\begin{aligned}
2 \cdot 2 \cdot 9 \\
2 \cdot 3 \cdot 6 \\
3 \cdot 3 \cdot 4 \\
4 \cdot 9 \cdot 1 \\
6 \cdot 6 \cdot 1 \\
12 \cdot 3 \cdot 1 \\
18 \cdot 2 \cdot 1 \\
36 \cdot 1 \cdot 1
\end{aligned}
$$

b) Bei 7 gibt es nur eine Möglichkeit:

$$7 \cdot 1 \cdot 1$$

c) Bei 25 habe ich 2 Möglichkeiten:

$$
\begin{aligned}
5 \cdot 5 \cdot 1 \\
25 \cdot 1 \cdot 1
\end{aligned}
$$

Lösung 104-36

a) Zeilen- oder spaltenweise ist das dritte Quadrat immer die „Summe“ des ersten und des zweiten Quadrats.

b) Zeilenweise ist das dritte Quadrat immer die „Differenz“ des ersten und des zweiten Quadrats.

Lösung 104-37

5000.

Lösung 104-38

Für die erste Zahl kommen in Frage

$$12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96$$

Da bereits $4 \cdot 30 = 120$ nicht mehr zweistellig ist, kann die erste Zahl nur entweder 12 oder 18 oder 24 sein. Die gesuchten Paare sind also 12 und 48, 18 und 72 sowie 24 und 96. Das schreibt man auch so: $(12, 48), (18, 72), (24, 96)$.

4 Klassen 5 und 6

Lösung 104-41

Sei x die ursprüngliche Anzahl Äpfel imKorb. Dann gilt

$$x - 6 - \frac{x-6}{3} - 6 = \frac{x}{2}$$

Diese Gleichung hat die einzige Lösung $x = 60$.

Im Korb lagen ursprünglich 60 Äpfel.

Lösung 104-42

Es sei x die Maßzahl der Länge des Tunnels in Metern. Der Zug hat den Tunnel vollständig passiert, wenn die Spitze des Zuges $x + 185$ Meter gefahren ist. Der ICE fährt $18\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = \frac{180000\mathrm{m}}{3600\mathrm{S}} = 50\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Da die Tunneldurchfahrt 330 s dauerte, ist die Spitze des Zuges $50 \cdot 330\mathrm{m} = 16500\mathrm{m}$ gefahren. Der Tunnel ist also $16500 - 185 = 16315$ Meter oder 16,315 km lang.

Lösung 104-43

Ja, denn es ist

$$
\begin{aligned}
3^0 &= 01\\
3^1 &= 03\\
3^2 &= 09\\
3^3 &= 27\\
3^4 &= 81\\
3^5 &= 243\\
3^6 &= 729\\
3^7 &= 2187
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
3^8 &= 6561\\
3^9 &= 19683\\
3^{10} &= 59049\\
3^{11} &= 177147\\
3^{12} &= 531441\\
3^{13} &= 1594323\\
3^{14} &= 4782969
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
3^{15} &= 14348907\\
3^{16} &= 43046721\\
3^{17} &= 129140163\\
3^{18} &= 387420489\\
3^{19} &= 1162261467\\
3^{20} &= 3486784401\\
3^{21} &= 10460353203
\end{aligned}
$$

Die Folge der beiden letzten Ziffer der Potenzen der Zahl 3 ist also

$$01, 03, 09, 27, 81, 43, 29, 87, 61, 83, 49, 47, 41, 23, 69, 07, 21, 63, 89, 67, \cdots$$

wobei es ab 3^{20} wieder von vorn beginnt.

Lösung 104-44

a) Aus (2) folgt, Herr Müller unterrichtet Mathe und wegen (6) dann kein Chemie.

b) Aus (4) und (7) folgt, dass Herr Schulze Sport und Geo(grafie) unterrichtet.

c) Aus (1), (6) und (a) folgt, dass Herr Müller auch Physik unterrichtet.

d) Aus (1) folgt, dass Herr Maier Musik und Deutsch unterrichtet.

Wir haben also:

Herr Müller	:	Mathe und Physik
Herr Maier	:	Deutsch und Musik
Herr Schulze	:	Sport und Geografie
Herr Bauer	:	Bio und Chemie

Lösung 104-45

Der Bauer hat recht, denn für 2 Pferde, 2 Kühe und 2 Ziegen würde das Heu

$$1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{3} = \frac{25}{12}$$

Monate reichen, für Pferd, Kuh und Ziege zusammen $\frac{25}{24}$ Monate, also länger als nur für Pferd und Kuh.

Lösung 104-46

$>$ soll heißen „ist stärker als“ .

Aus

$$\begin{aligned} A+B &> C+D \\ A+D &= C+B \end{aligned}$$

folgt $B > D$.

Aus

$$\begin{aligned} B+D &> A+C \\ B+C &= A+D \end{aligned}$$

folgt $D > C$. Angenommen, C wäre stärker als A. Dann würde folgen

$$B + A < B + C = A + D$$

d.h. D wäre stärker als B. Das hatten wir bereits ausgeschlossen. Angenommen, A und C wären gleich stark. Dann würde aus $B+C = A+D$ folgen, dass B und D ebenfalls gleich stark wären. Das hatten wir ebenfalls ausgeschlossen. Bleibt nur $C > A$.

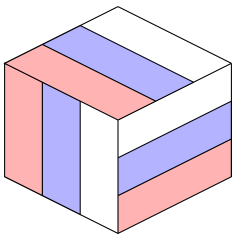
Somit ist B der Stärkste. Danach folgen D, A und C.

Lösung 104-47

Das richtige Ergebnis ist 81. Petja hatte 18 erhalten:

$$18 = 9 \cdot 2 \quad , \quad 9^2 = 81$$

Lösung 104-48



Auf der Rückseite analog, denn die Rechtecke stehen jeweils senkrecht aufeinander. Es grenzen an der Kanten daher nie 2 Rechtecke mit langen Seiten aneinander.

5 Klassen 7 und 8

Lösung 104-51

Nach Aufgabenstellung soll

$$\frac{4a-x}{5}+2>0$$

sein. Wir formen äquivalent um und erhalten

$$4a-x+10>0, a>\frac{x-10}{4}$$

Nun soll $a>-\frac{3}{4}$ sein, also

$$\begin{aligned} \frac{x-10}{4} &= -\frac{3}{4} \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Für alle $a>-\frac{3}{4}$ ist der Term $T(a,7)$ positiv.

Lösung 104-52

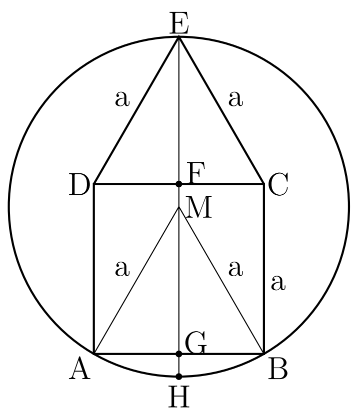
Die Anzahl der Fächer, in denen nach dem Spielen 3 Kugeln fehlen, sei gleich $x, 0 \leq x \leq 10$. Dann haben wir insgesamt

$$7x+9x+\frac{10-2x}{2}\cdot 6+\frac{10-2x}{2}\cdot 10=16x+16\cdot\frac{10-2x}{2}=16(x+5-x)=80$$

Kugeln nach dem Spielen.

Lösung 104-53

Wir konstruieren ein gleichseitiges Dreieck ABM über der Seite AB des Quadrats $ABCD$ mit Scheitelpunkt M im Inneren des Quadrats. Die Dreiecke ABM und CDE sind kongruent. Es seien G der Fußpunkt der Höhe im Dreieck ABM, H der Schnittpunkt der verlängerten Höhe im Dreieck ABM mit dem Umkreis von ABE. Die Länge der Höhen von ABM und DCE sei h. Dann gilt $MG=h$ und $MH=a$, woraus $GH=a-h$ folgt. Damit haben wir $EH=EF+FG+GH=h+a+a-h=2a$, woraus $EM=MH=a$ folgt.
Der Radius des Umkreises um ABE hat die Länge a.



Lösung 104-54

Wir bezeichnen die Hunderter- und Einerziffer mit $a, 1 \leq a \leq 9$, die Zehnerziffer mit $b, 0 \leq b \leq 9$. Dann gilt

$$100a+10b+a+a+b+a=103a+11b=500$$

Die möglichen Ziffern für a reduzieren sich auf 1, 2, 3 und 4, denn bereits für $a = 5$ wäre die Summe in der Mitte größer als 500. Wegen

$$11b = 500 - 103a$$

muss $500 - 103a$ durch 11 teilbar sein, da es sonst keine Lösung für b gäbe. Dies ist nur für $a = 4$ der Fall: $500 - 105 \cdot 4 = 88$. Die gesuchte Zahl ist 484. Tatsächlich gilt $484 + 4 + 8 + 4 = 500$. 484 ist die einzige Lösung.

Lösung 104-55

Wegen

$$\frac{2n^2 - 1}{2n + 1} = \frac{2n^2 + n - n - 1}{2n + 1} = \frac{n(2n + 1) - (n + 1)}{2n + 1} = n - \frac{n + 1}{2n + 1}$$

kann der Bruch gekürzt werden genau dann, wenn Zähler und Nenner von $\frac{n+1}{2n+1}$ durch die gleiche von 1 verschiedene natürliche Zahl teilbar sind. Wegen

$$\frac{2n + 1}{n + 1} = 1 + \frac{n}{n + 1}$$

kann der Bruch gekürzt werden genau dann, wenn Zähler und Nenner von $\frac{n}{n+1}$ durch die gleiche von 1 verschiedene natürliche Zahl teilbar sind. Dies ist jedoch für keine natürliche Zahl n der Fall.

Lösung 104-56

Die Diamantenbrösel hätten als ganzes Stück den Wert

$$\frac{64}{100} = \frac{16}{25}$$

Das ist proportional zum Quadrat des Gewichts. D.h. die abgebrochenen Stücke wiegen zusammen $\frac{4}{5}$. Das größte Stück wiegt also noch $\frac{1}{5}$ des ursprünglichen Diamanten.

6 Klassen 9 bis 13

Lösung 104-61

a) Es gilt $a_n = 5^n - 4^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Nachweis mit vollständiger Induktion. Die Behauptung ist richtig für $n = 0$ und $n = 1$. Die Behauptung sei richtig für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Nach Definition ist

$$a_{n+1} = 9a_n - 20a_{n-1}$$

also

$$a_{n+1} = 9(5^n - 4^n) - 20(5^{n-1} - 4^{n-1}) = 5^{n-1} \cdot 5^2 - 4^{n-1} \cdot 4^2 = 5^{n+1} - 4^{n+1}$$

b) Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ durch 3 teilbar, also $n = 3k$ mit einer Zahl $k \in \mathbb{N}_0$. Behauptung: a_n ist durch 61 teilbar. $a_3 = 61$ ist durch 61 teilbar. Gelte dies für ein $n = 3m$- Dann ist

$$a_{3(m+1)} = 5^{3m+3} - 4^{3m+3} = 5^{3m} \cdot 5^3 - 4^{3m} \cdot 5^3 + 4^{3m} \cdot 5^3 - 4^{3m} \cdot 4^3 = a_{3m} \cdot 5^3 - 4^{3m} \cdot (125 - 64)$$

Beide Summanden sind durch 61 teilbar, der erste nach Induktionsvoraussetzung, der zweite wegen $125 - 64 = 61$.

Es sei n nicht durch 3 teilbar. Dann ist a_n nicht durch 61 teilbar.

Es sei $n = 2m + 1$ mit einer geeigneten Zahl $m \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$a_{3m+1} = 5^{3m+1} - 4^{3m+1} = 5^{3m} \cdot 5 - 4^{3m} \cdot 5 + 4^{3m} \cdot 5 - 4^{3m} \cdot 4 = 5 \cdot (5^{3m} - 4^{3m}) + 2^{6m}$$

bzw.

$$a_{3m+2} = 5^{3m+2} - 4^{3m+2} = 5^{3m} \cdot 25 - 4^{3m} \cdot 25 + 4^{3m} \cdot 25 - 2^{6m} \cdot 2^4 = 25 \cdot (5^{3m} - 4^{3m}) + 2^{6m} \cdot 3^2$$

$5^{3m} - 4^{3m}$ ist wie zuvor gezeigt durch 61 teilbar. 61 ist weder in 2^{6m} noch in $2^{6m} \cdot 3^2$. als Faktor enthalten. Daher ist jeweils der zweite Summand und damit auch die Summe nicht durch 61 teilbar.

Lösung 104-62

Wir zeigen, dass es für keine **gerade** Zahl n möglich ist, dass irgendwann n Vögel auf dem gleichen Baum sitzen. Wir numerieren die Bäume im Uhrzeigersinn von 1 bis n. Mit $a_1, \ldots, a_n$ bezeichnen wir die Anzahl der Vögel, die zu einem bestimmten Zeitpunkt t auf dem Baum $1, \ldots, n$ sitzt. Wir untersuchen, wie sich die Summe

$$S_t = 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + \ldots + n \cdot a_n$$

von t zu $t + 1$ ändert, wenn 2 Vögel auf die jeweils benachbarten Bäume fliegen, der eine im Uhrzeigersinn, der andere entgegen dem Uhrzeigersinn.

Wenn ein Vogel von Baum $k < n$ im Uhrzeigersinn zum Nachbarbaum fliegt, gilt für den k-ten und den $(k + 1)$-ten Summanden:

$$k(a_k - 1) + (k + 1)(a_{k+1} + 1) = ka_k + (k + 1)a_{k+1} - k + k + 1 = ka_k + (k + 1)a_{k+1} + 1$$

Falls $k = n$ ist gilt für den ersten und den n-ten Summanden:

$$n(a_n - 1) + a_1 + 1 = a_1 + na_n - (n - 1)$$

Der zweite Vogel fliegt entgegen dem Uhrzeigersinn. In diesem Fall verringert sich die Summe entweder um 1 oder vergrößert sich um $n - 1$. Zusammen gilt folglich

$$S_{t+1} = S_t \text{ oder } S_{t+1} = S_t + n \text{ oder } S_{t+1} = S_t - n$$

Die Summe bleibt also entweder konstant oder ändert sich genau um n. Zu Beginn sitzt auf jedem Baum genau ein Vogel:

$$S_0 = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

D.h. nach t Schritten gilt

$$S_t = \frac{n(n+1)}{2} + np \text{ mit einem } p \in \mathbb{Z}$$

Sollen zu einem bestimmten Zeitpunkt alle Vögel auf dem Baum mit der Nummer q sitzen, dann ist die Summe gleich nq. D.h. es muss zu diesem Zeitpunkt gelten

$$\frac{n(n+1)}{2} + np = nq \text{ bzw. } n = 2(q-p) - 1$$

Links steht eine gerade Zahl, rechts eine ungerade. Dies ist nicht möglich. D.h. es gibt keinen Zeitpunkt, an dem alle Vögel gleichzeitig auf einem Baum sitzen.

Für **ungerade** Zahlen $n > 1$ ist es immer möglich, dass n Vögel am Ende gemeinsam auf einem Baum sitzen. Aus Teil 1 sieht man, dass das möglich ist. Wir geben eine Möglichkeit an, mit der dies bewerkstelligt werden kann. Sei $n = 2k+1$. Wir nummerieren die Bäume wie folgt: ein Baum bekommmt die Nummer 0. Alle Bäume von Baum 0 aus im negativen Drehsinn bekommen die Nummern $-1, -2, \ldots, -k$, alle Bäume von Baum 0 aus im positiven Drehsinn werden bekommen die Nummern $1, 2, \ldots, k$. Der Vogel, der auf Baum 0 sitzt, bleibt die ganze Zeit sitzen. Vom Baum 0 sind immer genau 2 Bäume genau gleich weit entfernt, nämlich die Bäume $-l$ und l mit $1 \le l \le k$. Die Vögel, die auf diesen Bäumen sitzen, brauchen genau l Schritte, um zu Baum 0 zu fliegen. Wenn in jedem Schritt die Vögel, die gleich weit von Baum 0 entfernt sitzen, in Richtung Baum 0 fliegen, dann sind nach $\frac{k(k+1)}{2}$ Schritten alle Vögel auf Baum 0 versammelt.

Lösung 104-63

Für $n = 2$ gilt (1), denn es ist

$$\sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} < \frac{8}{3} < \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{2}{3}\sqrt{3} < \frac{4}{3} < \sqrt{2}$$

Wir beweisen zunächst die linke Ungleichung (1). Für $n \ge 3$ gilt

Bleibt noch die rechte Ungleichung. Wir bezeichnen den mittleren Term von (1) mit Q_n. Angenommen, die rechte Ungleichung (1) gilt für eine beliebige natürliche Zahl $n > 1$. Wir zeigen, dass daraus die Gültigkeit der rechten Ungleichung von (1) auch für $n+1$ folgt (vollständige Induktion).

Wegen

$$Q_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+1} Q_n$$

ist die rechte Ungleichung (1) äquivalent mit

$$Q_{n+1} < \frac{2n+2}{2n+1}\sqrt{4n}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
4n^2 + 4n &< 4n^2 + 4n + 1 \\
4n(n+1) &< (2n+1)^2 \\
\frac{4(n+1)^2}{(2n+1)^2} \cdot 4n &< 4(n+1) \\
\frac{2n+2}{2n+1}\sqrt{4n} &< \sqrt{4(n+1)}
\end{aligned}$$

D.h.

$$Q_{n+1} < \sqrt{4(n+1)} \tag{2}$$

(2) ist die rechte Ungleichung (1) für $n+1$. Damit ist gezeigt, dass die rechte Ungleichung (1) auch für $n+1$ gilt. Da sie für $n=2$ gilt, ist die Gültigkeit für alle $n \geq 2$ gezeigt.

Lösung 104-64

U.Warnecke: Sei $p > 5$ und p Primzahl, und sei angenommen, dass es doch ein solches k gibt. Umformung und Division der Gleichung $(p-1)! = p^k - 1$ durch $p-1$ liefert

$$(p-2)! = \frac{p^k - 1}{p-1}.$$

Da $(p-1) \,\Big|\, (p-2)!$ für $p > 5$, so auch $(p-1) \,\Big|\, \frac{p^k-1}{p-1}$. Dies ist aber nur möglich, wenn $(p-1) \,\Big|\, k$, und das heißt insbesondere $k \geq p-1 \geq 6$. Für $k = p-1$ z. B. errechnet man

$$\begin{aligned}
\frac{p^{p-1}-1}{p-1} &= \sum_{i=0}^{p-2} p^i = 1 + p + p^2 + \ldots + p^{p-2} \\
&= \sum_{i=0}^{p-2} ((p-1)+1)^i = 1 + ((p-1)+1) + ((p-1)+1)^2 + \ldots + ((p-1)+1)^{p-2} \\
&= \sum_{i=0}^{p-2} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (p-1)^j = 1 + ((p-1)+1) + \Big((p-1)^2 + 2(p-1) + 1\Big) + \ldots + 1
\end{aligned}$$

und die letzte Summe enthält $(p-1)$ Einsen, die sich zu $p-1$ addieren, und deshalb ist die ganze Summe, also auch $\frac{p^{p-1}-1}{p-1}$ durch $p-1$ teilbar, wie behauptet. Die Teilbarkeit durch $p-1$ bleibt offensichtlich auch dann erhalten, wenn k ein Vielfaches von $p-1$ ist. Damit ergibt sich aber

$$\begin{aligned}
& \frac{p^k-1}{p-1} \geq \frac{p^{p-1}-1}{p-1} > (p-2)! \\
\Leftrightarrow \quad & p^k - 1 \geq p^{p-1} - 1 > (p-1)!
\end{aligned}$$

im Widerspruch zur Gleichung $(p-1)! = p^k - 1$. Diese wird also für Primzahlen $p > 5$ für keine positive ganze Zahl k erfüllt.

Nachbemerkung: Für die Primzahlen 2; 3 und 5 dagegen gibt es sehr wohl ein jeweils dazu passendes k:

$$\begin{aligned}
1! = 2^k - 1 \;&\Leftrightarrow\; k = 1; \\
2! = 3^k - 1 \;&\Leftrightarrow\; k = 1; \\
4! = 5^k - 1 \;&\Leftrightarrow\; k = 2.
\end{aligned}$$

Lösung 104-65

Angenommen, für ein m und ein n gilt

$$m(m+1) = n(n+1)(n+2)(n+3)$$

Dann folgt

$$m^2 + m + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$$

Das ist aber nicht möglich, denn es gilt

$$m^2 < m^2 + m + 1 < (m+1)^2$$

Eine Quadratzahl zwischen den aufeinanderfolgenden Quadratzahlen m^2 und $(m+1)^2$ gibt es nicht. Daher ist die Annahme falsch.

Lösung 104-66

Vorüberlegungen: Es sei

$$y_i = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_i}{i}$$

mit $i = 1, \ldots, n$. Wenn man zu jedem x_i die gleiche reelle Zahl a addiert, erhält man statt y_i $y_i + a$. Die kleinstmögliche und größtmögliche Differenz aus $\{y_i\}$ und $\{y_i + a\}$ sind gleich. Daher können wir annehmen, dass $0 \leq x_1, \ldots, x_n \leq 1$ ist.

Analog gilt: ersetzen wir x_i durch $1 - x_i$, so wird y_i auf $1 - y_i$ abgebildet. Man kann von $\{x_i\}$ zu $\{1 - x_i\}$ übergehen, ohne die maximale und die minimale Differenz zu ändern (die maximale und minimale Differenz aus $\{y_i\}$ und $\{1 - y_i\}$ sind gleich).

a) Es seien y_k das Minimum, y_l das Maximum von $\{y_i\}$. Falls $k < l$ ist, so gilt

$$y_l - y_k = \frac{ky_k}{l} + \frac{x_{k+1} + \cdots + x_l}{l} - y_k = \frac{x_{k+1} + \cdots + x_l}{l} - \frac{l-k}{l} y_k \leq \frac{x_{k+1} + \cdots + x_l}{l} \leq \frac{l-k}{l} \leq 1 - \frac{1}{n}$$

Falls $k < l$ gilt so folgt

$$y_l - y_k = \frac{k-l}{k} y_l - \frac{x_{l+1} + \cdots + x_k}{k} \leq 1 - \frac{1}{k} \leq 1 - \frac{1}{n}$$

Die größtmögliche aller Differenzen aus $\{y_i\}$ ist daher nicht größer als $1 - \frac{1}{n}$. Eine Menge $\{x_i\}$ mit dieser Differenz ist $x_1 = 0, x_2 = x_3 \cdots = x_n = 1$.

b) Lösung in kvant (3) 1974, S. 38, Aufgabe M208