1 Vorschule

Lösung 105-11

1) Einer ging weiter: $2 - 1 = 1$.

2) Es waren 5 Monster: $1 + 4 = 5$.

Lösung 105-12

meiste Plätzchen	Michel
zweitmeiste Plätzchen	Leonie
drittmeiste Plätzchen	Jana
viertmeiste Plätzchen	Paul
wenigste Plätzchen	Kira

Lösung 105-13

1	2	3
2	3	1
3	1	2

Lösung 105-14

A4 und B1 enthalten die gleichen Zeichen.

2 Klassen 1 und 2

Lösung 105-21

Es sind $15 + 15 = 30$ Kerzen. Die Kinder finden insgesamt 23 Batterien. Es fehlen noch $30 - 23 = 7$ Batterien.

Ort	**Anzahl Batterien**
Papas Schrank	12
Mamas Schrank	2
angefangenes Päckchen	24 - 15 = 9
	12 + 2 + 9 = 23

Lösung 105-22

a) $12 + 9 + 7 + 13 = 41$

b) $7 + 13 + 11 + 6 = 37$

c) $11 + 6 = 17$

d) $12 + 9 = 21$

e) $7 + 13 = 20$

Lösung 105-23

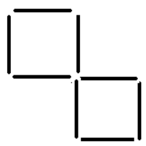
Erik We., Klasse 2:

Anton war es nicht, weil er lügt, denn er behauptet, dass es Benjamin war, und wenn er es gewesen wäre, hätte er es zugegeben. Benjamin war es also nicht und deshalb kann es nur Conrad gewesen sein.

Jenny No., Klasse 2:

Conrad hat das Fenster getroffen. Der Junge, der das gewesen ist, muss sagen: ich wars. Wenn Benjamin das sagen würde, hätten 2 Kinder die Wahrheit gesagt.

Lösung 105-24



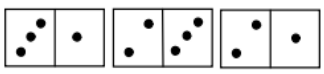
Lösung 105-25

Tom Na., 8 Jahre, Klasse 2:

20 Monde + 17 Glocken + 18 Tannen + 15 Sterne = 70 Plätzchen. 70 : 2 = 35 Plätzchen für Mädchen und Jungen.

Klaus hat 18 Tannen gebacken, 1 Plätzchen mehr als Tom, der 17 Glocken gebacken hat, und 2 weniger als Sarah, die 20 Monde gebacken hat. Melina hat gebummelt und nur 15 Sterne.

Lösung 105-26



Lösung 105-27

Edward Franz, Klasse 2

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$
$$49 - 21 = 28$$
$$28 : 7 = 4$$

Das erste Kaninchen hat also 4 Karotten gefressen.

Lösung 105-28

Die Klasse hat 28 Kinder. Ein Viertel der Kinder sind 28 : 4 = 7 Kinder. Insgesamt kaufen 14 Kinder Popcorn (zweimal ein Viertel der Kinder). Sie geben zusammen 14 € für Popcorn aus.

3 Klassen 3 und 4

Lösung 105-31

In der angegebenen Reihenfolge können die Einnahmen berechnet werden. (Erklärung unter der Tabelle)

Standnummer	**Einnahmen in €**
4	0
6	209
1	273
5	276
2	270
3	282

Am Stand 1 wurden 273 € eingenommen:

$$83 + 59 \cdot 0,5 + 107 \cdot 1,5 = 273$$

Eine Brezel, ein Becher Kinderpunsch und 1 Glas Apfelwein kosten zusammen 3 € .

Wenn am Stand 5 von allen 3 Dingen je eins mehr verkauft wurde als am Stand 1, so wurden am Stand 5 3 Euro mehr eingenommen als am Stand 1.

Wenn von allen 3 Dingen am Stand 2 je zwei weniger verkauft wurden, als am Stand 5, dann wurden am Stand 2 insgesamt 6 € weniger eingenommen als am Stand 5.

Wenn am Stand 3 von allen 3 Dingen je 3 mehr verkauft wurden, als am Stand 1, so wurden am Stand 3 insgesamt 9 € mehr eingenommen als am Stand 1.

a) Am Stand 1 wurden 273 € eingenommen.

b) Das meiste Geld hat Stand 3 eingenommen.

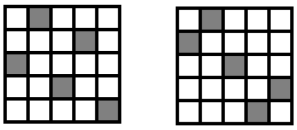
c) Insgesamt wurden beim Silvesterfest 1310 € eingenommen.

Lösung 105-32

mittags: $5 \cdot 11 = 55$

Mitternacht: $55 \cdot 11 = 605$

Lösung 105-33



Lösung 105-34

Antwort: Sie fährt 805 km.

$$388 \text{ km} + 388 \text{ km} + 29 \text{ km} = 805 \text{ km}$$

Lösung 105-35

1) nein, wenn man nur natürliche Zahlen zulässt, ja, wenn man z.B. auch gebrochene Zahlen zulässt.

2) ja, 0 und 2.

3) ja, denn sie hat **mindestens** 7 Teiler, nämlich 1,2,3,4,6,8,12,24.

4) nein. Die Summe zweier gerader Zahlen ist immer gerade.

5) ja, jede Zahl, die auf 0 endet, ist durch 5 teilbar. Jede Zahl, die durch 10 teilbar ist, endet auf 0.

6) nein. Gegenbeispiel ist 9 oder 15 (allgemein, alle ungeraden durch 3 teilbaren Zahlen)

7) nein. Die Straße kann auch nass sein, wenn jemand einen Eimer Wasser darauf gekippt hat.

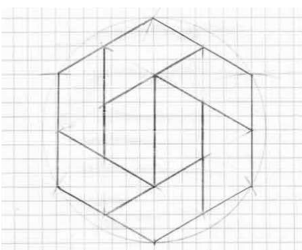
8) nein: heute ist dann Donnerstag und vorgestern Dienstag.

9) nein, denn 60 Stunden später ist es Mitternacht.

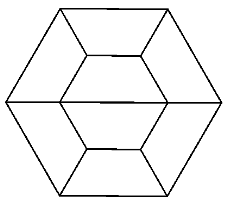
10) ja: man kann ein Sechseck in 8 Trapeze teilen.

Das geht so:

Leo Gitin, 9 Jahre, Klasse 5:



oder so:



Lösung 105-36

$A = 3, B = 9, C = 6, D = 12, E = 5$

Lösung 105-37

a) $1101 = 2 \cdot 550 + 1$

b) $1101 = 2 \cdot 551 - 1$

c) $1101 = 2 \cdot 384 + 333$

Lösung 105-38

$2016 : 3 = 672$. Frau Schmol verkauft am Samstag 672 Schokoäpfel, am Freitag 671 und am Sonntag 673:

$$671 + 672 + 673 = 2016$$

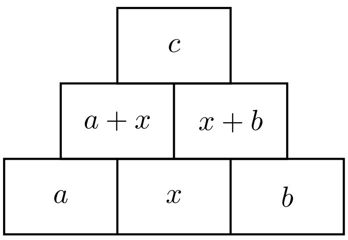
4 Klassen 5 und 6

Lösung 105-41

Ursel Willrett

$$\begin{aligned}
2016 &= (11-1-1)(1+1)\cdot(111+1)\\
2016 &= \left(222+2\cdot\frac{2}{2}\right)\left(\frac{22}{2}-2\right)\\
2016 &= 333\cdot 3+333\cdot 3+3(3+3)\\
2016 &= 44\cdot 44+4\cdot 4\cdot\left(4+\frac{4}{4}\right)\\
2016 &= 55\cdot 55-555-555+5\cdot 5\cdot\left(5-\frac{5}{5}\right)\\
2016 &= 666+666+666+6\cdot\left(\frac{6}{6}+\frac{6}{6}+\frac{6}{6}\right)\\
2016 &= 777+777+7\cdot 77-77\\
2016 &= 888+888+88+88+8\cdot 8\\
2016 &= 999+999+9+9
\end{aligned}$$

Lösung 105-42



Also ist

$$\begin{aligned} a+x+x+b &= c \\ a+b+2\cdot x &= c \\ 2\cdot x &= c-a-b \\ x &= \frac{c-a-b}{2} \end{aligned}$$

Lösung 105-43

Ilja Rozhko, 10 Jahre, Klasse 5:

Zuerst können wir versuchen herauszufinden, was die letzte Zahl der multiplizierten Handynummer ist: Es könnte 0 oder 5 sein, weil die Handynummer mit 5 multipliziert wird. Aber 0 kann man ausschließen, weil ja nur die Zahlen 1-9 verwendet werden. Um die Handynummer wiederherzustellen, sollte man die multiplizierte Handynummer durch 5 teilen. Dies kann man aber durch Division durch 10 und Muliplikation mit 2 ersetzen. Das bringt Folgendes: es kann kein höherer Übertrag als 1 sein beim Multiplizieren mit 2. Jetzt probieren wir mit den Ziffern 1-9: $1\cdot 2 = 2, 2\cdot 2 = 4, \ldots, 9\cdot 2 = 18$ Egal in welcher Reihenfolge die Ziffern stehen, der Übertrag wird nie höher als 1 sein. Die Summe von dem höchsten Übertrag + geraden Zahlen kann bei einer Rechnung höchstens 9 ergeben, also die 10 nicht zu überschreiten. Also können wir ganz einfach rechnen:

$$2+4+6+8+1+1+2+1+4+1+6+1+8 = 45$$

Als wir oben feststellten, dass die letzte Stelle von der multiplizierten Handynummer 5 war, bei der Multiplikation mit 2 ergab dies eine Null am Ende. Wenn wir aber 10 teilen fällt die 0 weg. Also ist die Quersumme=45.

Variante 2:

Sei n meine Handynummer. Die Zahl $10n$ hat dann die gleiche Quersumme, wie meine Handynummer. In $5n$ kommt jede Ziffer genau einmal vor. Multipiziert man $5n$ mit 2, dann trägt die 1 zur Quersumme von $10n$ und damit zur Quersumme meiner Handynummer 2 bei. Die 2 trägt 4 bei, die 3 trägt 6 bei, die 4 trägt 8 bei. Die 5 trägt 1 bei, die 6 trägt 3 bei, die 7 trägt 5 bei, die 8 trägt 7 bei und die 9 trägt 9 bei. $10n$ hat also die Quersumme $1+2+\cdots+8+9 = 45$.

Meine Handynummer hat die Quersumme 45.

Lösung 105-44

Die Anzahl der Vierecke muss eine ungerade durch 3 teilbare Zahl größer als 3 sein. Das gilt für 9, 15, 21 usw.

Angenommen, es sind 15 Vierecke. Dann wären es 5 Rechtecke, also mehr als 4 Parallelogramme. Es können daher nicht mehr als 9 Vierecke sein.

Wenn es 9 Vierecke sind, dann müssen es 3 Rechtecke sein (wegen (3)). Wegen (1) sind dies ein Quadrat und 2 echte (also nichtquadratische) Rechtecke. Wegen (2) ist noch ein echtes (d.h. nicht rechteckiges) Parallelogramm an der Tafel. Die anderen 5 Vierecke sind keine Parallelogramme. Die Anzahl der Vierecke ist durch die Aussagen (1) bis (4) eindeutig bestimmt.

An die Tafel sind genau 9 Vierecke gezeichnet.

Lösung 105-45

1) Die 22 passt nicht: der Abstand zwischen benachbarten Zahlen beträgt immer 6.

2) Die 6 passt nicht: die Zahlen werden in jedem Schritt halbiert.

3) Die 0,6 passt nicht: die Zahlen werden in jedem Schritt verdreifacht.

4) Die 33 passt nicht: es wird erst 8, dann 9, dann 10, dann 11 addiert, wenn man die 33 weglässt.

5) Die 2 passt nicht: es wird erst 5, dann 4, dann 3 und dann 2 subtrahiert.

6) 9/12 passt nicht: in jedem Schritt wird der Zähler um 4 vergrößert, der Nenner halbiert.

Lösung 105-46

Angenommen, vor dem Spiel hatten Anton $3n$, Bastian $4n$ und Clemens $5n$ Karten, nach dem Spiel Anton m, Bastian $3m$ und Clemens $4m$ Karten. Daraus folgt

$$12n = 8m \tag{1}$$

Es ist kgV(12;8) = 24. Die kleinsten natürlichen Zahlen n, m, für die (1) gilt, sind $n = 2$ und $m = 3$. Für diese m und n ergibt sich *zunächst* folgende Verteilung:

	Anton	Bastian	Clemens	Anzahl aller Karten
Spielbeginn	6	8	10	24
Spielende	3	9	12	24

Hiernach hätte Anton 1 Karte an Bastian und 2 Karten an Clemens, zusammen also nur 3 Karten verloren. Da er aber tatsächlich 6 Karten verloren hat, müssen die Werte in der Tabelle verdoppelt werden:

	Anton	Bastian	Clemens	Anzahl aller Karten
Spielbeginn	12	16	20	48
Spielende	6	18	24	48

Hiernach verlor Anton 2 Karten an Bastian, 4 Karten an Clemens, zusammen also 6 Karten. Hätte die Gesamtzahl der Karten vor dem Spiel $s = 48t$ mit $t \geq 2$ betragen, so hätte sich der Verlust von Anton ver-t-facht. Da Anton aber genau 6 Karten verloren hat, müssen insgesamt 48 Karten im Spiel gewesen sein.

Lösung 105-47

a) Tim könnte höchstens 3 Schokomünzen oder 4 Gummibärchen kaufen. Daher können wir ausprobieren, ob Tim für genau 23ct Gummibärchen oder Schokomünzen kaufen könnte: bei keiner Wahl der Anzahl der Schokomünzen von 0 bis 3 gibt es eine Anzahl von Gummibärchen, so dass sich der Gesamtpreis auf 23ct ergänzt. Bei 0 Schokomünzen bleiben 23ct für Gummibärchen, bei 1 Schokomünze bleiben 16ct für Gummibärchen, bei 2 Schokomünzen bleiben 11ct für Gummibärchen und bei 3 Schokomünzen bleiben 2ct für Gummibärchen.

b) Wegen

$$5 = 5 - 0 = 6 - 1 = 7 - 2 = 8 - 3 = 9 - 4$$

Kann man ab 24ct mit dem Kauf von 0, 1, 2, 3 oder 4 Schokomünzen stets erreichen, dass der Restpreis durch 5 teilbar ist:

- Endet der Betrag auf 0 oder 5, dann kann man 0 Schokomünzen kaufen und für den Rest des Geldes Gummibärchen.
- Endet der Betrag auf 1 oder 6, dann kann man 3 Schokomünzen kaufen und für den Rest des Geldes Gummibärchen.
- Endet der Betrag auf 2 oder 7, dann kann man 1 Schokomünze kaufen und für den Rest des Geldes Gummibärchen.
- Endet der Betrag auf 3 oder 8, dann kann man 4 Schokomünzen kaufen und für den Rest des Geldes Gummibärchen.
- Endet der Betrag auf 4 oder 9, dann kann man 2 Schokomünzen kaufen und für den Rest des Geldes Gummibärchen.

Dies gilt allgemein aber erst ab 24ct, denn wie wir unter a) gezeigt haben, lassen sich 23ct nicht vollständig in Gummibärchen umsetzen.

Hinweis: Dies ist ein elementarer Zugang zu dieser Aufgabe, die für Klasse 5-6 gestellt wurde. Sie lässt sich natürlich auch unter Zuhilfenahme des Eulerverfahrens zur Lösung dipophantischer Gleichungen lösen.

Lösung 105-48

Leonie Rößler, 8 Jahre, Klasse 2:

Wenn eine Zahl durch 6 geteilt wird, kann der Rest 0, 1, 2, 3, 4, 5 sein. Ist der **Rest 0**, ist die Zahl durch 6 teilbar und keine Primzahl mehr. Ist der **Rest 2**, entsteht eine gerade Zahl, die durch 2 teilbar ist und keine Primzahl sein kann. So ist es auch bei **Rest 4**. Bei **Rest 3** ist die Zahl immer durch 3 teilbar. Ist der **Rest 1** oder **5**, entstehen ungerade Zahlen. Diese Zahlen sind nicht durch 3 teilbar oder durch 2. Sie sind auch nicht durch 5 teilbar (außer 5). Diese Zahlen sind also Primzahl.

Musterlösung:

Jede natürliche Zahl $n \geq 1$ kann man schreiben als

$$
\begin{aligned}
n &= 6m && (1)\\
n &= 6m+1 && (2)\\
n &= 6m+2 = 2(3m+1) && (3)\\
n &= 6m+3 = 3(2m+1) && (4)\\
n &= 6m+4 = 2(3m+2) && (5)\\
n &= 6m+5 && (6)
\end{aligned}
$$

mit einer passenden Zahl $m \geq 0$. Die rechten Seiten von (1), (3), (4) und (5) können keine Primzahl sein, da sie das Produkt zweier natürlicher Zahlen größer 1 sind. Also müssen die Primzahlen zu den Gleichungen (2) und (5) gehören. Sie lassen als Rest bei Division durch 6 entweder 1 oder 5.

5 Klassen 7 und 8

Lösung 105-51

$$\begin{aligned} 2+0\cdot 1\cdot 6 &= 2 \\ 2\cdot 0\cdot 1\cdot 6 &= 0 \\ 2+0-1^6 &= 1 \\ 2\cdot 0\cdot 1+6 &= 6 \end{aligned}$$

Lösung 105-52

Ursel Willrett

Man kann 2016 auf 12 verschiedene Arten als Differenz zweier Quadratzahlen darstellen:

$$\begin{aligned} 2016 &= 45^2-3^2 \\ 2016 &= 46^2-10^2 \\ 2016 &= 50^2-22^2 \\ 2016 &= 54^2-30^2 \\ 2016 &= 65^2-47^2 \\ 2016 &= 71^2-55^2 \\ 2016 &= 79^2-65^2 \\ 2016 &= 90^2-78^2 \\ 2016 &= 130^2-122^2 \\ 2016 &= 171^2-165^2 \\ 2016 &= 254^2-250^2 \\ 2016 &= 505^2-503^2 \end{aligned}$$

Lösung 105-53

Wegen

$$S+E+N+S+E=2(S+E)+N=43$$

Kommen für N nur ungerade Zahlen von 1 bis 43 in Frage. Von diesen können 43, 41 und 39 wegen der Bedingung $S,E>0, S\neq E$ ausgeschlossen werden: für $N=43$ ergäbe sich $S=E=0$, für $N=39$ ergäbe sich $S=E=1$. Für $N=41$ ergäbe sich $S+E=1$, was wegen $S,E>0$ nicht möglich ist. Wir haben also

$$N=2k+1,\ 1\leq k\leq 37$$

und damit

$$3\leq S+E\leq 21,\ S,E>0,\ S\neq E,$$

Das sind 19 Zahlen.

Jede ungerade Zahl $2n+1$ lässt sich auf n Weisen in 2 voneinander verschiedene positive Summanden zerlegen.

Beispiel:

$$9 = 2 \cdot 4 + 1 = 1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5$$

(4 Zerlegungen). Ebenso lässt sich jede gerade Zahl $2n$ auf $n-1$ Weisen in 2 voneinander verschiedene positive Summanden zerlegen.

Beispiel:

$$10 = 2 \cdot 5 = 1 + 9 = 2 + 8 = 3 + 7 = 4 + 6$$

(4 Zerlegungen). Die Zahlen $3, 4, \ldots, 20, 21$ kann man zu 9 Paaren je einer ungeraden und einer geraden Zahl mit jeweils der gleichen Anzahl $1, 2, \ldots, 9$ Zerlegungen zusammenfassen. Hinzu kommen noch 10 Zerlegungen der 21. Das sind insgesamt

$$2 \cdot \left(\sum_{n=1}^{9} n \right) + 10 = 2 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} + 10 = 100$$

Zerlegungen in 2 paarweise verschiedene Summanden.

Da man die Ersetzungen für S und E jeweils noch vertauschen kann, ergibt das insgesamt

$$2 \cdot 100 = 200$$

verschiedene Möglichkeiten die Buchstaben S, E zu ersetzen. Von diesen müssen noch die entfernt werden, bei denen $S = N$ oder $E = N$ ist. Das sind die folgenden 14 Zerlegungen:

N	**auszuschließen**
1	1+20, 20+1
3	3+17, 17+3
5	5+14, 14+5
7	7+11, 11+7
9	8+9, 9+8
11	5+11, 11+5
13	2+13, 13+2

Es bleiben 186 Ersetzungen der Buchstaben S, E und N.

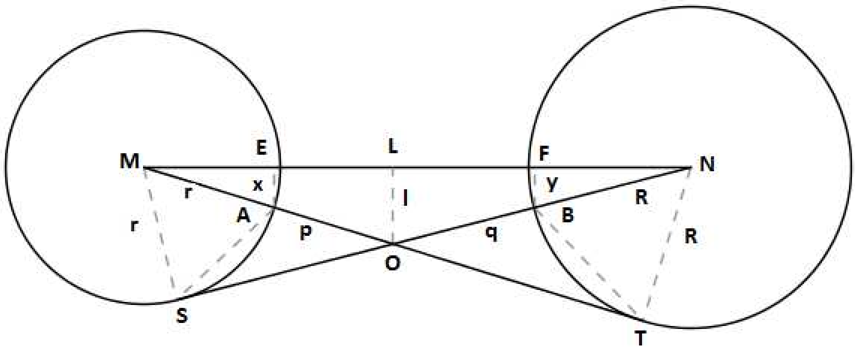
Lösung 105-54

Der Trick ist, den Würfel auf die Seite zu legen, die zuerst gefärbt wurde, und sich festgeklebt zu denken. Die gegenüberliegende Seite kann dann mit 5 verschiedenen Farben gefärbt werden. Verschiedene Färbungen der vier übrigen Seiten ergeben je eine verschiedene Färbung entsprechend der Aufgabenstellung. Färbt man die Frontseite des Würfels mit einer der 4 übrigen Farben, so kann man eine der drei anderen Seiten mit genau 3 verschiedenen Farben färben, die zweite mit genau 2 verschiedenen Farben und die dritte mut genau einer (der letzten) Farbe. Das ergibt insgesamt

$$5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$$

verschiedene Färbungen.

Lösung 105-55



Es seien E, L bzw. F die Fußpunkte der Lote von A, O bzw. B auf die Gerade m (Strecke MN). Mit r bezeichnen wir den Radius des Kreises um M, mit R den Radius des Kreises um N, mit x die Länge der Strecke AE, mit l die Länge der Strecke OL, mit y die Länge der Strecke BF. p sei die Länge der Strecke AO, q die Länge der Strecke BO.

Die Dreiecke $\triangle MSO$ und $\triangle NTO$ sind ähnlich, denn sie sind rechtwinklig (Tangenten) und stimmen in den Winkeln NOT und MOS überein. Daher gilt

$$\frac{r}{r+p} = \frac{R}{R+q} \tag{1}$$

Da AE und OL parallel sind, gilt nach Strahlensatz

$$\frac{r}{x} = \frac{r+p}{l} \text{ bzw. } \frac{x}{l} = \frac{r}{r+p} \tag{2}$$

Analog gilt nach Strahlensatz

$$\frac{R}{y} = \frac{R+q}{l} \text{ bzw. } \frac{y}{l} = \frac{R}{R+q} \tag{3}$$

da OL und BF parallel sind. Die rechten Seiten in (2) und (3) sind wegen (1) gleich. Daraus folgt

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{l}$$

bzw. $x = y$. Das bedeutet nichts anderes als $m \parallel g$, q.e.d.

Lösung 105-56

	Fremdkörper	Begriff Restmenge
A	25	Primzahlen
B	Innenwinkel	Außenwinkel
C	Fünfeck	Rechtecke
D	Parallelogramm	axialsymmetrische Figuren
E	Ziffer	Buchstaben
F	$\{-24; 27\}$	einelementige Mengen
G	Quader	Linien

Lösungswort: PARABEL

6 Klassen 9 bis 13

Lösung 105-61

Angenommen, es sind 3 Brüder. Einer der drei teilt den Kuchen in 3 seiner Meinung nach gleich große Stücke. Die beiden anderen zeigen gleichzeitig auf das Stück, das ihnen am größten erscheint. Zeigen sie auf verschiedene Stücke, so nimmt sich jeder das Stück, auf das er gezeigt hat und der erste Bruder nimmt das dritte Stück.

Zeigen sie auf das gleiche Stück, dann teilen diese zwei Brüder das Stück, auf das sie gezeigt haben, nach der bekannten Methode auf. Anschließend zeigen der zweite und der dritte Bruder auf dasjenige der verbliebenen 2 Stücke, das ihnen am größten erscheint. Zeigen sie nun auf verschiedene Stücke, dann nimmt jeder der beiden das Stück, auf das er gezeigt hat und der erste Bruder nimmt die beiden „Hälften“ des vorher geteilten „Drittels“. Zeigen sie auf das gleiche Stück, so verfahren sie mit diesem analog zum ersten. Der erste Bruder nimmt das Stück, auf das sie nicht gezeigt haben.

Das war der Induktionsanfang. Für beliebige $n \geq 3$ Brüder möge es ein Verfahren geben, mit dem sie einen Kuchen so teilen, dass sich jeder gerecht behandelt fühlt.

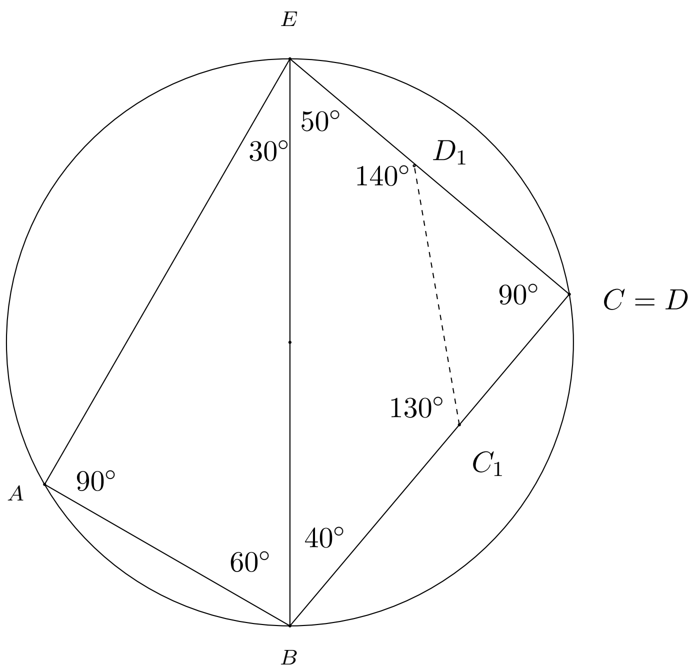
Behauptung: dann gibt es auch für $n + 1$ Brüder ein solches Verfahren.

Der Kuchen wird unter n Brüdern gerecht aufgeteilt. Nun schneidet jeder Bruder sein Stück in $n + 1$ seiner Meinung nach gleich große Stücke. Der $(n + 1)$te Bruder wählt von jedem der n Brüder das seiner Meinung nach größte Stück aus. Er erhält so von jedem Bruder nicht weniger als $1/(n + 1)$tel seiner Stücke und fühlt sich damit gerecht behandelt. Da die n Brüder ihr Stück selbst aufgeteilt haben, fühlen sie sich (analog zur Aufteilung unter 2 Brüdern) gerecht behandelt.

Lösung 105-62

U.Warnecke

Die Summe der Innenwinkel in einem beliebigen (ebenen) n-Eck beträgt $(n - 2) \cdot 180°$, in einem Fünfeck also 540°.
Da $80° + 90° + 100° + 130° + 140° = 540°$ gilt, so hätte Mascha recht, wenn es sich um ein beliebiges Fünfeck handeln dürfte. Wie sieht es aber im Fall eines Sehnenfünfecks aus? Wählt man zunächst einen beliebigen Punkt A auf dem Kreis und nimmt ihn als Scheitelpunkt des rechten Winkels, so schneiden dessen Schenkel den Kreis in den Punkten B bzw. E (vgl. nebenstehende Figur). Nach dem Satz des THALES ist BE Durchmesser des Kreises und zerschneidet das noch zu vervollständigende Sehnenfünfeck jedenfalls in ein Dreieck und ein Sehnenviereck. Da in einem solchen Viereck gegenüberliegende Winkel sich zu 180° ergänzen, so ergeben sich die in der Figur eingetragenen Winkelweiten, und die Schenkel der in B bzw. E an BE angetra-



genen Winkel schneiden sich auf dem Kreis in demselben Punkt, so dass $C = D$. Dadurch aber ist das Sehnenfünfeck zu einem Sehnenviereck entartet, Mascha hat also leider nicht recht.

Lösung 105-63

Das Quadrat $ABCD$ habe die Seitenlänge a und den Flächeninhalt $A = a^2$, ein kleines Quadrat habe die Seitenlänge x mit $x = a - 66$. Die Anzahl der herausgeschnittenen kleinen Quadrate an einer Seite sei n. Dann gilt für den Flächeninhalt A' nach dem Herausschneiden:

$$A' = a^2 - 4nx^2 = a^2 - 4n(a - 66)^2$$

und für den Quotienten der beiden Flächeninhalte

$$\frac{A'}{A} = \frac{a^2 - 4n(a-66)^2}{a^2} = 1 - \frac{4n(a-66)^2}{a^2} = \frac{8}{9} \tag{1}$$

Zum Umfang nach dem Herausschneiden trägt jedes kleine Quadrat zusätzliche $2x = 2 \cdot (a - 66)$ bei. Also gilt für die Umfänge U und U'

$$\frac{U'}{U} = \frac{4a + 8n(a-66)}{4a} = 1 + \frac{2n(a-66)}{a} = \frac{5}{3} \tag{2}$$

Aus (1) und (2) ergibt sich $n = 4$ und $a = 72$. Es wurden 16 kleine Quadrate der Kantenlänge 6cm herausgeschnitten.

Lösung 105-64

64 lässt sich durch die Potenzen 64^1, 8^2, 4^3 und 2^6 darstellen. Es müssen also 4 Fälle unterschieden werden:

Fall 1: $64 = 64^1$. Dann gilt $(2x + 1) = 64$ bzw. $x = 31$. Es müsste dann gelten $\sqrt[31]{64} = 1$, was offensichtlich falsch ist.

Fall 2: $64 = 8^2$. Dann gilt $(2x + 1) = 8$ bzw. $x = 3$. Daraus würde $\sqrt[3]{8} = 2$ folgen, was wahr ist.

Fall 3: $64 = 4^3$. Dann gilt $(2x + 1) = 4$ bzw. $x = 1$, woraus $4 = 3$ folgte. Das ist falsch.

Fall 4: $64 = 2^6$. Dann gilt $(2x + 1) = 2$ bzw. $x = 0$. Da die 0te Wurzel nicht definiert ist, ist das nicht möglich.

Die gegebene Gleichung hat genau eine ganzzahlige Lösung $x = 3$.

Lösung 105-65

Seien $a > 0$ die Kantenlänge der Kugel, r der Kugelradius und A_W bzw. A_K die Oberflächeninhalte des Würfels bzw. der Kugel, V_W bzw. V_K die entsprechenden Volumina, dann gilt

$$\begin{aligned} A_K &= 4\pi r^2 \\ V_K &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ A_W &= 6a^2 \\ V_W &= a^3 \end{aligned}$$

Die Volumina sind gleich, also

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = a^3$$

Hieraus folgt: $a^2 = c \cdot r^2$ mit $c = \sqrt[3]{\frac{4}{3}\pi}^2$, so dass

$$\frac{A_K}{A_W} = \frac{4\pi r^2}{6a^2} = c_a$$

d.h konstant ist. Mit ein bisschen Rechnerei findet man

$$\frac{A_K}{A_W} = \sqrt[3]{\frac{\pi}{6}}$$

Lösung 105-66

Eine natürlichen Zahl z mit $0 < z < 100$ kann geschrieben werden als

$$z = 10a + b, 0 \leq a, b \leq 9$$

Falls $b = 0$, dann ist $a \neq 0$ und $z = 10a$.

$$99z = 99 \cdot 10a = (100 - 1) \cdot 10a = 1000(a - 1) + 9 \cdot 100 + 10(10 - a)$$

Quersumme:

$$(a - 1) + 9 + (10 - a) = 18$$

Falls $b \neq 0$ ist, gilt

$$99z = (100 - 1)(10a + b) = 1000a + 100b - 100 + 100 - 10a - b + 10 - 10$$

$$= 1000a + 100(b - 1) + (100 - 10a - 10) + (10 - b) = 1000a + 100(b - 1) + 10(10 - 1 - a) + (10 - b)$$

Quersumme:

$$a + (b - 1) + (10 - 1 - a) + 10 - b = 18$$