1 Vorschule

Lösung 106-11

1) Zwei Mäuse spielten: $1 + 1 = 2$.

2) Jetzt gibt es nur noch 8 echte Planeten: $9 - 1 = 8$.

3) 5 Seeleute sind abgetaucht: $5 - 0 = 5$.

Lösung 106-12

	○	△	□
	8	4	2
	6	3	12
	5	10	7
	11	9	1

Lösung 106-13

der Werfer mit der Nummer 7. Man muss zur Lösung ein Lineal verwenden.

Lösung 106-14

Hans ist zu klein und reicht deswegen nicht bis zum Knopf für die 16. Etage.

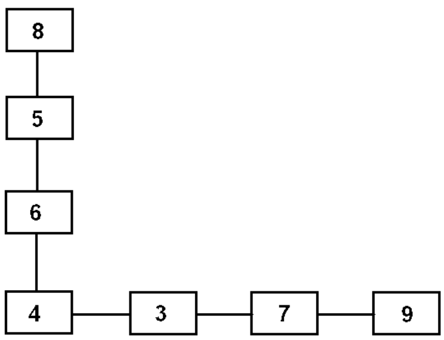
2 Klassen 1 und 2

Lösung 106-21

Ich muss noch 6 Ränder ziehen:

$$\begin{aligned} 15 - 12 &= 3 \\ 3 \cdot 2 &= 6 \end{aligned}$$

Lösung 106-22



In der Ecke muss die 4 stehen, da $3+4+5+6+7+7+9 = 42$ ist und $2 \cdot 23 = 46$. Die 4 trägt also zu beiden Liniensummen bei.

Lösung 106-23

Da $15 + 15 = 30$ ist, Hans aber nur 20 Würfel hat, müssen auf $30 - 20 = 10$ Würfeln sowohl rote als auch blaue Buchstaben stehen.

Lösung 106-24

Der Apfel ist zweimal so schwer wie die Tomate.

Lösung 106-25

Jan kann alle Tulpen pflücken. Das sind insgesamt 20 Tulpen.

Lösung 106-26

Für 8 Autos werden 32 Räder gebraucht, das 9. Auto könnte nur noch einen Winterreifen bekommen. 12 Autofahrer müssen ohne einen vollständigen Satz Winterreifen wegfahren.

Lösung 106-27

Sie macht 10 Purzelbäume und 15 Radschläge.

Lösung 106-28

a	b	$a+b$	$a-b$
17	8	**25**	**9**
19	13	32	**6**
49	30	**79**	19
48	**23**	**71**	25
5	**3**	8	2

3 Klassen 3 und 4

Lösung 106-31

$$\begin{aligned}
(99 + 1 - 50) \cdot 2 &= 100 \\
500 \cdot 2 + 11 - 1 &= 1010 \\
200 - 1 + 11 + 1 &= 211 \\
1000 + 100 + 10 + 1 &= 1111 \\
20 + 50 - 20 + 22 &= 72 \\
11 \cdot 11 + 3 + 20 &= 144 \\
(9 \cdot 8 + 9) \cdot 1 &= 81 \\
6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 &= 36 \\
(4 \cdot 6 - 13) \cdot 11 &= 121 \\
(11 \cdot 10 - 101) \cdot 6 &= 54 \\
(9 \cdot 1 + 0) \cdot 2 &= 18 \\
(5 \cdot 6 - 24) \cdot 9 &= 54 \\
1000 + 200 + 10 + 2 &= 1212
\end{aligned}$$

SCHILDKROETEN

Lösung 106-32

a) 21 b) 85

Lösung 106-33

Zusammen kaufen Anna und Marie 12 Bleistifte und 12 Hefte und bezahlen 2160 Cent. Ein Bleistift und ein Heft kosten zusammen 168 Cent. 2 Bleistifte und 2 Hefte kosten zusammen $2 \cdot 168 = 336$ Cent. Da 2 Bleistifte so viel wie 5 Hefte kosten, kosten 7 Hefte 336 Cent. Also kostet 1 Heft $336 : 7 = 48$ Cent und ein Bleistift $168 - 48 = 120$ Cent.

Lösung 106-34

Lösung 106-35

a) Ein Erdjahr entspricht

$$365 : 88 \approx 4,15$$

Merkur- Jahren. Daher ist Hans jetzt 41,5 Merkur-Jahre alt. 10 Erdjahre sind also so viele Jahre auf den einzelnen Planeten:

Planet	**Jahre**
Merkur	41,5
Venus	16,2
Erde	10
Mars	5,3
Jupiter	0,9
Saturn	$0,33 \approx \frac{1}{3}$
Uranus	0,12
Neptun	0,06

b) 1 Jahr auf dem Jupiter sind 4263 Erdtage, also

$$4263 : 365 \approx 12$$

Erdjahre. 1 Jahr auf den einzelnen Planeten sind also in Erdjahren

Planet	**Erdjahre**
Jupiter	12
Saturn	29
Uranus	84
Neptun	165

Lösung 106-36

a) Es sind 8 Dreiecke: $\triangle AEI$, $\triangle AEH$, $\triangle ABD$, $\triangle ABN$, $\triangle ABC$, $\triangle AIH$, $\triangle AND$, $\triangle ACD$

b) Es sind 14 Vierecke: $GCNM$, $GCIH$, $GCBM$, $GCAH$, $GDNL$, $GDKF$, $GDBF$, $GDAL$, $GMNL$, $GMKF$, $GMBF$, $GHEF$, $GHIL$, $GHAL$

Lösung 106-37

Die gesuchten Datumszahlen haben alle die Form □□0220□□. Dabei steht □ für irgendeine Ziffer (aber nicht beide gleichzeitig 0 wie bei 2100. Es sind alles Tage im Monat Februar. Daher muss man nur alle Jahreszahlen untersuchen, die auf 0, 1 oder 2 enden. Diese Daten erhält man insgesamt:

	10022001	20022002
01022010	11022011	21022012
02022020	12022021	22022022
03022030	13022031	23022032
04022040	14022041	24022042
05022050	15022051	25022052
06022060	16022061	26022062
07022070	17022071	27022072
08022080	18022081	28022082
09022090	19022091	29022092

An 29 Tagen im 21. Jahrhundert ist das Datum eine Palindromzahl. Etwas aufpassen muss man mit dem Jahr 2092: dieses ist ein Schaltjahr und nur deswegen ist der 29.02.2092 ebenfalls eine gültige Datumszahl.

Lösung 106-38

a) Am Ende des zweiten Tages bedeckte der Efeu $2,5$ m^2 der Hauswand, als er ihn kaufte also $1,25$ m^2. Man muss zweimal halbieren.

b) nach 9 Tagen.

c) 640 m^2. Man muss immer verdoppeln.

4 Klassen 5 und 6

Lösung 106-41

Es ist $44 \cdot 44 = 1936$ und $45 \cdot 45 = 2025$. Man muss also alle Primzahlen bis zur 44 testen, ob sie Teiler von 2016 sind. Dies sind die 14 Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41 und 43. Mit einem bisschen Geduld rechnet man das durch.

Lösung 106-42

Das Wassevolumen in jeder Tonne ist das Produkt aus Grundfläche und Höhe. Da beide Höhen gleich sind, muss der Flächeninhalt der Grundfläche der größeren Tonne viermal so groß sein, wie der Flächeninhalt der Grundfläche der kleineren Tonne. Wenn ein Quadrat einen viermal so großen Flächeninhalt hat, wie ein anderes Quadrat, dann ist die Seite des größeren Quadrats doppelt so lang wie die des kleineren Quadrats. Analog ist der Durchmesser der größeren Tonne doppelt so lang wie der der kleineren Tonne. Die Durchmesser der beiden Tonnen verhalten sich also wie 2 : 1.

Lösung 106-43

Angenommen, das Spiel endete unentschieden. Dann sind auf jeden Fall die Prognosen (1), (3) und (5) falsch. Es können also im Widerspruch zur Aufgabe höchstens 2 Prognosen wahr gewesen sein.

Nehmen wir nun an, Mannschaft B habe gewonnen. Dann sind mit Sicherheit die Prognosen (1) bis (4) wahr. Die steht ebenfalls im Widerspruch zur Voraussetzung, dass genau 3 Prognosen wahr waren.

Folglich muss Mannschaft A gewonnen haben. Daraus können wir nun die Torverteilung ableiten. Da mit Sicherheit (1) wahr und (3) und (4) falsch sind, müssen (2) und (5) wahr sein. Das Spiel endete also 2:1.

Lösung 106-44

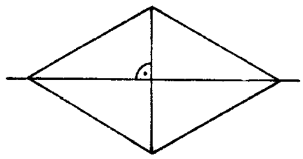
$\frac{2}{3}$ aller Schüler hatten nur ein Auge geschlossen, das sind 22 Kinder. Daher konnten diese Schüler sehen, was der Lehrer an die Tafel schrieb.

Lösung 106-45

Würfel 4.

Lösung 106-46

Mit Hilfe des gleichseitigen Dreiecks kann man einen Rhombus zeichnen:



Die Diagonalen des Rhombus schneiden einander in einem rechten Winkel.

Lösung 106-47

Der Würfel bestehe aus n^3 kleinen Würfeln. Dann sind $5n^2$ kleine Würfelflächen sichtbar (von den 5 sichtbaren Seiten des großen Würfels). Es gilt also $5n^2 = n^3$. Da $n > 0$ ist, muss $n = 5$ gelten. Der große Würfel besteht aus 125 kleinen Würfeln.

Lösung 106-48

Zunächst numerieren wir die Aussagen der Aufgabe:

(1) Die elfjährige Gudrun und der 13jährige Egon sind Geschwister.

(2) Die beiden Kinder der Familie Brauer sind Zwillinge.

(3) Die Familien Ackermann und Dahlmann haben je ein Kind.

(4) Die Tochter der Familie Ackermann ist 8 Jahre alt.

(5) Hans ist mit dem Sohn von Familie Brauer befreundet.

(6) Der 10jährige Sohn der Familie Brauer hat den Vorname Fred.

Wegen (1) und (2) heißen Gudrun und Egon nicht Brauer. Wegen (3) heißen sie nicht Ackermann und nicht Dahlmann. Folgerung:

(7) Gudrun und Egon heißen Christensen.

Wegen (3) und (4) und da es außer Gudrun nur noch ein Mädchen gibt, gilt:

(8) Inge heißt Ackermann und ist das einzige Kind dieser Familie.

Aus (5), (6) (7) und (8) folgt

(9) Hans heißt Dahlmann und ist das einzige Kind dieser Familie.

Folglich muss gelten

(10) Fred und Jochen heißen Brauer (und sind Zwillinge).

Die Lösung ist somit:

- Inge Ackermann
- Fred Brauer, Jochen Brauer
- Gudrun Christensen, Egon Christensen
- Hans Dahlmann

5 Klassen 7 und 8

Lösung 106-51

Wir wählen den 31.1. als Bezugspunkt und stellen für reguläre Jahre (Februar 28 Tage) und Schaltjahre (Februar 29 Tage) folgende Tabelle auf:

reguläres Jahr:

Datum	Differenz d zum 31.1. in Tagen	$d:7$
31.01.	0	$0:7=0\cdot 7+0$
31.03.	59	$59:7=8\cdot 7+3$
31.05.	120	$120:7=17\cdot 7+1$
31.07.	181	$181:7=25\cdot 7+6$
31.08.	212	$212:7=30\cdot 7+2$
31.10.	273	$273:7=39\cdot 7+0$
31.12.	334	$334:7=47\cdot 7+5$

Schaltjahr:

Datum	Differenz d zum 31.1. in Tagen	$d:7$
31.01.	0	$0:7=0\cdot 7+0$
31.03.	60	$60:7=8\cdot 7+4$
31.05.	121	$121:7=17\cdot 7+2$
31.07.	182	$182:7=26\cdot 7+0$
31.08.	213	$213:7=30\cdot 7+3$
31.10.	274	$274:7=39\cdot 7+1$
31.12.	335	$335:7=47\cdot 7+6$

Da eine Woche 7 Tage hat, entspricht jeder Rest von $d:7$ einen bestimmten Wochentag an. Die Tabelle zeigt, dass in einem regulären Jahr der Rest 4, in jedem Schaltjahr der Rest 5 fehlt. Die Reste 0, 1, 2, 3, 5 und 6 treten in jedem regulären Jahr auf, die Reste 0, 1, 2, 3, 4 und 6 in jedem Schaltjahr. Somit gibt es in jedem Kalenderjahr tatsächlich genau einen Wochentag, auf den der 31. eines Monats nicht fällt.

Lösung 106-52

Wegen $AB \parallel CD$ gilt nach den Strahlensätzen

$$DE:AF=EM:AM=1:3$$

$$EC:FB=EN:BN=1:3$$

also $CD \parallel MN$ und daher $AB \parallel MN$. Daraus folgt weiter

$$\frac{AB}{MN}=\frac{EA}{EM}=\frac{EM+AM}{EM}=1+\frac{AM}{EM}=1+3=4$$

Also

$$\frac{MN}{AB}=\frac{1}{4},\ MN=\frac{1}{4}AB=\frac{1}{4}a$$

Die Länge der Strecke MN ist also gleich $a/4$.

Lösung 106-53

Für $a = b$ gibt es keine Lösung. Für $a = 2$ findet man die Lösungen $a = 2, b = 0$ und $a = 2, b = 6$. Weitere Lösungen gibt es nicht, wie man durch Durchprobieren aller Möglichkeiten für a und b sieht.

Lösung 106-54

Der gegebene Term kann umgeformt werden zu

$$\frac{m}{6}\left(2 + 3m + m^2\right) \tag{1}$$

Dieser Term ist eine natürliche Zahl genau dann, wenn

$$m(2 + 3m + m^2) \tag{2}$$

durch 6 teilbar ist.

Falls m durch 6 teilbar ist, ist auch (2) durch 6 teilbar und somit der Term (1) eine natürliche Zahl. Falls m nicht durch 6 teilbar ist, so ist m entweder ungerade oder eine gerade, aber nicht durch 3 teilbare Zahl.

Sei m eine gerade, nicht durch 3 teilbare Zahl. Dann lässt m^2 bei Division durch 3 den Rest 1. Folglich muss $2 + m^2$ durch 3 teilbar sein. Da auch $3m$ durch 3 teilbar ist, ist der zweite Faktor in (2) durch 3 teilbar. Der erste Faktor ist durch 2 teilbar und somit ist das Produkt (2) und damit der Term (1) durch 6 teilbar.

Bleibt noch der Fall, dass m ungerade ist. Dann sind sowohl $3m$ als auch m^2 ungerade. (Dies sieht man, wenn man m durch $2n + 1$ mit einer geeignet gewählten natürlichen Zahl n ersetzt.). Der zweite Faktor in (2) ist also stets gerade als Summe zweier ungerader und einer geraden Zahl.

Ist m durch 3 teilbar, sind wir fertig.

Ist m nicht durch 3 teilbar, so lässt m bei Division durch 3 entweder den Rest 1 oder den Rest 2.

Nehmen wir an, m lässt bei Division durch 3 den Rest 1, so können wir eine natürliche Zahl n finden, so dass $m = 3n + 1$ ist. Der zweite Faktor in (2) lässt sich dann schreiben als

$$2 + 3(3n + 1) + (3n + 1)^2 = 3n(3n + 5) + 6$$

Der Term auf der rechten Seite ist stets durch 6 teilbar, denn falls n gerade ist, ist bereits $3n$ durch 6 teilbar, falls n ungerade ist, ist $3n + 5$ gerade. In diesem Fall ist also der zweite Faktor von (2) durch 6 teilbar.

Falls m bei Division durch 3 den Rest 2 lässt, können wir den zweiten Faktor in (2) schreiben als

$$2 + 3(3n + 2) + (3n + 2)^2 = 3n(3n + 7) + 12$$

Analog sieht man, dass der Term auf der rechten Seite stets durch 6 teilbar ist und somit der zweite Faktor von (2) durch 6 teilbar ist.

Die Fallunterscheidung ist vollständig. Damit ist die Behauptung für jede natürliche Zahl m bewiesen.

Lösung 106-55

Es sei $0 < x < 3000, x \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Bakterien, die in jedem Schritt entnommen wird. Kurz vor der Entnahme hat sich die Anzahl der Bakterien in der Kolonie jeweils verdoppelt. Die Anzahl der nach der 4. Entnahme verbliebenen Bakterien beträgt dann

$$2\left(2\left(2\left(3000 - x\right) - x\right) - x\right) - x = 24000 - 15x$$

Diese Anzahl muss größer oder gleich 0 sein, also

$$15x \leq 2400$$

Laut Aufgabe soll x maximal werden: wegen $15 \cdot 1600 = 2400$, kann x höchstens 1600 sein. Tatsächlich: werden in jedem Schritt genau 1600 Bakterien entnommen, dann sind unmittelbar vor der vierten Entnahme noch genau 1600 Bakterien in der Kolonie. Anschließend aber keine einzige mehr, d.h., die Kolonie ist ausgestorben.

In jedem Schritt können maximal 1600 Bakterien entnommen werden. Soll die Kolonie nicht zerstört werden, sollte man aber besser jeweils höchstens 1599 Bakterien entnehmen.

Lösung 106-56

Wir lösen zunächst b), um die Antwort auf a) davon als Spezialfall ableiten zu können.

Das Gitter besteht nach Voraussetzung aus $k = mn$ Zellen, wobei $m, n \in \mathbb{N}$, $1 \leq m, n \leq k$ gilt. Die Anzahl N der Gitterpunkte beträgt dann $N = (m+1)(n+1) = mn + m + n + 1$. Mit $n = k/m$ folgt

$$N = m + \frac{k}{m} + k + 1 \tag{1}$$

Für $m = 1$ bzw. $m = k$ ist $N = 2(k+1)$.

Behauptung: Für jedes $m \in \mathbb{N}, 1 < m < k$ gilt $N < 2(k+1)$.

Offensichtlich ist für $1 < m < k$

$$\begin{aligned} (m-k)(m-1) &< 0 \\ m^2 - m - mk + k &< 0 \\ m^2 + k &< m(k+1) \\ m + \frac{k}{m} &< k + 1 \end{aligned}$$

Damit lässt sich N in (1) nach oben abschätzen:

$$N < (k+1) + (k+1) = 2(k+1) \quad \forall m : 1 < m < k$$

und dies ist die behauptete Ungleichung. Die Anzahl der Gitterpunkte N wird also maximal für $m = 1$ bzw. $m = k$.

Damit haben wir gezeigt, dass $N = 2(k+1)$ die höchste Zahl an Gitterpunkten ist, die ein Rechteck mit Flächeninhalt k enthalten kann.

Für a) folgt hieraus mit $k = 36$: $N = 2 \cdot 37 = 74$.

Lösung 106-57

a) Es seien $r_1 > 0$ der Radius, $h_1 > 0$ die Höhe und $V_1 > 0$ das Volumen des Kegels, den die Wassermenge von 1 l bildet. Ferner seien $r_2 > 0$ der Radius, $h_2 > 0$ die Höhe und $V_2 > 0$ das Volumen des Kegels, den die Wassermenge von $\frac{1}{2}$ l bildet. Dann gilt

$$V_1 = \frac{\pi}{3} r_1^2 h_1, \tag{1}$$

$$V_2 = \frac{\pi}{3} r_2^2 h_2. \tag{2}$$

Ferner gilt

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{r_2^2 h_2}{r_1^2 h_1} = \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Wegen $\frac{r_2}{r_1} = \frac{h_2}{h_1}$, also $\frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{h_2^2}{h_1^2}$ folgt aus (3)

$$\begin{aligned} \frac{h_2^3}{h_1^3} &= \frac{1}{2} \text{ also} \\ h_2^3 &= \frac{1}{2} h_1^3 \\ h_2 &= \frac{h_1}{2} \sqrt[3]{4} \end{aligned}$$

Wegen $h_1 = 10$ cm steigt also der Wasserspiegel bei $\frac{1}{2}$ l Wasser auf $5 \cdot \sqrt[3]{4}$ cm $\approx 7,94$ cm Höhe.

b) Es seien $r_3 > 0$ der Radius und $V_3 > 0$ das Volumen des Kegels, den die Wassermenge bei einer Höhe von $h_3 = 5$ cm bildet.
Dann gilt wie oben

$$\frac{V_3}{V_1} = \frac{h_3^3}{h_1^3} = \left(\frac{h_3}{h_1}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8},$$

also

$$V_3 = \frac{1}{8}V_1$$

Wegen $V_1 = 1$ l befinden sich bei 5 cm Wasserhöhe folglich $\frac{1}{8}$ l Wasser in dem Gefäß.

Lösung 106-58

Vor dem Braten: 2,25 kg $= \frac{9}{4}$ kg Bratfleisch; *nach* dem Braten: $\frac{3}{4} \cdot \frac{9}{4}$ kg $= \frac{27}{16}$ kg Bratfleisch.

Vor dem Kochen: 1,5 kg $= \frac{3}{2}$ kg Kochfleisch; *nach* dem Kochen: $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2}$ kg $= \frac{6}{5}$ kg Kochfleisch.

Da 1 Erwachsenenportion = 2 Kinderportionen sein soll, ergeben sich für 2 Erwachsene und 2 Kinder insgesamt 6 Portionen, d.h. ein Sechstel der gebratenen und der gekochten Fleischmenge kommt auf eine Portion:

$$\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{27}{16} + \frac{6}{5}\right) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{135}{80} + \frac{96}{80}\right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{231}{80} = \frac{231}{480} \approx 0,481.$$

1 Erwachsenenportion ist also $2 \cdot \frac{231}{480}$ kg $= \frac{462}{480}$ kg $= \frac{77}{80}$ kg ≈ 1 kg Fleisch und

1 Kinderportion $\frac{231}{480}$ kg $= \frac{77}{160}$ kg $\approx \frac{1}{2}$ kg $= 500$ g Fleisch.

6 Klassen 9 bis 13

Lösung 106-61

U.Warnecke

Es soll $\sum\limits_{i=k+1}^{n} i = 2017$ mit $n > k$ gelten, d. h.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{k} i && = 2017 \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{1}{2}\left(n(n+1) - k(k+1)\right) && = 2017 \\ \Leftrightarrow\quad & n^2 - k^2 + n - k && = 2 \cdot 2017 \\ \Leftrightarrow\quad & (n-k)(n+k+1) && = 2 \cdot 2017 \end{aligned}$$

Da $n > k$ und 2017 eine Primzahl ist, gilt nun

$$n - k = 2 \text{ und } \; n + k + 1 = 2017,$$

und dieses Gleichungssystem wird gelöst durch $n = 1009$ und $k = 1007$. Demnach ist $1008 + 1009$ die einzige Zerlegung von 2017 in eine Summe aufeinander folgender natürlicher Zahlen.

Lösung 106-62

U. Warnecke

Für die beiden rechtwinkligen Dreiecke hat man die Beziehungen $a_i^2 + b_i^2 = c_i^2$ $(i = 1; 2)$. Damit auch das dritte Dreieck ein rechtwinkliges wird, muss gelten:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{b_1+b_2}{2}\right)^2 &= \left(\frac{c_1+c_2}{2}\right)^2\\
\frac{1}{4}\left(a_1^2+b_1^2+a_2^2+b_2^2+2(a_1a_2+b_1b_2)\right) &= \left(\frac{c_1+c_2}{2}\right)^2\\
\frac{1}{4}\left(c_1^2+c_2^2+2(a_1a_2+b_1b_2)\right) &= \frac{1}{4}\left(c_1^2+2c_1c_2+c_2^2\right)\\
a_1a_2+b_1b_2 &= c_1c_2\\
\frac{a_1}{c_1}\cdot\frac{a_2}{c_2}+\frac{b_1}{c_1}\cdot\frac{b_2}{c_2} &= 1
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung *ist* genau dann gültig, wenn die beiden gegebenen rechtwinkligen Dreiecke auch ähnlich sind; denn dann hat man $\frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2}$ und $\frac{b_1}{c_1} = \frac{b_2}{c_2}$ und damit $\left(\frac{a_1}{c_1}\right)^2 + \left(\frac{b_1}{c_1}\right)^2 = 1$, und das heißt $a_1^2 + b_1^2 = c_1^2$, also die für das erste Dreieck gültige Beziehung.

Lösung 106-63

Angenommen, für eine ganze Zahl n sind $a = 2n + 1$ und $b = n \cdot (2n + 2)$ nicht teilerfremd. Dann existiert eine Primzahl $p > 2$, durch die sowohl a als auch b teilbar sind. Da $2n + 1$ und $2n + 2$ als aufeinanderfolgende ganze Zahlen teilerfremd sind, müssen n und $2n+1$ durch p teilbar sein. Es gibt also zwei ganze Zahlen $k, l > 1$ mit

$$\begin{aligned}
n &= kp\\
2n+1 &= lp
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$p(2k-l) = 1$$

was aber nicht möglich ist. Damit ist die ursprüngliche Annahme falsch und folglich die gegebene Aussage bewiesen.

Lösung 106-64

U. Warnecke

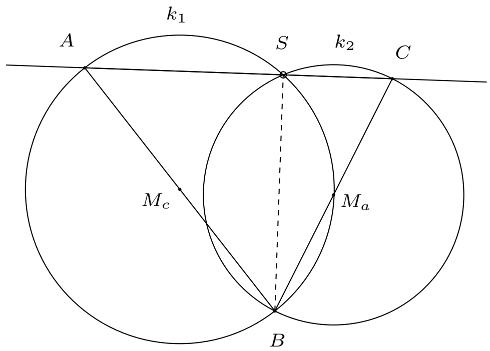
Für $n = 1$ ist die Aussage trivial; daher sei $n > 1$ vorausgesetzt.
Sei u_1 die Zahl, die entsteht, wenn man die letzten k Ziffern von a fortlässt, und sei v die von den letzten k Ziffern gebildete Zahl; Entsprechendes gelte für b und u_2. Dann ist $a = u_1 \cdot 10^k + v$, $b = u_2 \cdot 10^k + v$ und

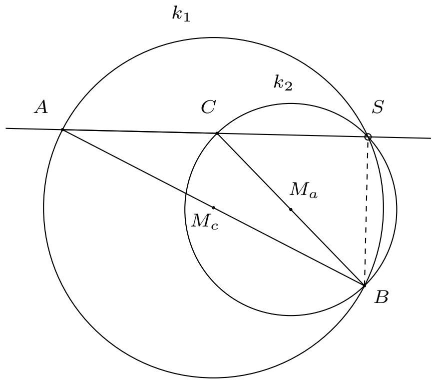
$$\begin{aligned}
a^n = (u_1\cdot 10^k+v)^n &= u_1^n\cdot 10^{kn} + \binom{n}{1}u_1^{n-1}\cdot 10^{k(n-1)}\cdot v + \ldots + \binom{n}{n-1}u_1\cdot 10^k\cdot v^{n-1} + v^n\\
&= \left(u_1^n\cdot 10^n + \binom{n}{1}u_1^{n-1}\cdot 10^{(n-1)}\cdot v + \ldots + \binom{n}{n-1}u_1\cdot 10\cdot v^{n-1}\right)\cdot 10^k + v^n
\end{aligned}$$

Mit dem Index 2 statt 1 für u wird b^n in der gleichen Form dargestellt.
Da die n-te Potenz der k-stelligen Zahl v eine Zahl mit $kn - 2\,(\geq 1)$ oder $kn - 1$ oder kn Stellen ergibt, die letzten k Ziffern der Zahlen $a^n - v^n$ und $b^n - v^n$ aber in jedem Fall lauter Nullen sind, stimmen die letzten k Ziffern von a^n mit den letzten k Ziffern von v^n überein. Gleiches gilt für b^n. Damit ist die Gültigkeit der Behauptung gezeigt.

Lösung 106-65

U. Warnecke

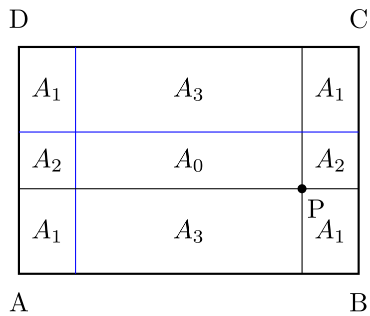




Sei S der Schnittpunkt des Kreises k_1 mit der durch AC gehenden Gerade. k_1 ist THALES-Kreis über der Strecke AB; daher ist $\angle ASB$ ein rechter Winkel, so dass BCS (bzw. BSC) rechtwinklige Dreiecke sind und S der Scheitelpunkt dieser beiden rechten Winkel ist. Daher liegt S auch auf dem THALES-Kreis über BC, und das heißt, dass k_1 und k_2 sich im Punkt S auf der Gerade (AC) schneiden.

Lösung 106-66

Die beiden Symmetrieachsen zerlegen das gegebene Rechteck in 4 kongruente Rechtecke mit je dem Flächeninhalt 1/4 des Rechtecks $ABCD$. Liegt der Punkt P in einem der beiden Viertel, die die Punkte A bzw. C enthalten, oder auf dem Rand dieser Viertel, dann ist die Behauptung offensichtlich.



Es bleibt also der Fall, dass P in einem der beiden anderen Viertel liegt, beispielsweise so wie hier gezeichnet. Zusätzlich zu den Parallelen durch P (schwarz) zeichnen wir die an den Symmetrieachsen gespiegelten Parallelen (blau). Diese 4 Geraden teilen das Rechteck in 4 kongruente Rechtecke an den Ecken (Flächeninhalt A_1), je 2 kongruente Rechtecke an den Rändern des großen Rechtecks (Flächeninhalte A_2 und A_3) sowie das im Zentrum liegende Rechteck mit Flächeninhalt A_0. Das Rechteck $ABCD$ habe den Flächeninhalt A. Wir müssen zeigen

$$A_1 + A_2 \leq \frac{1}{4}A \text{ oder } A_1 + A_3 \leq \frac{1}{4}A$$

Wegen

$$4A_1 + 2A_2 + 2A_3 = A - A_0 < S$$

ist

$$2A_1 + A_2 + A_3 < \frac{A}{2} \text{ d.h. } (A_1 + A_2) + (A_1 + A_3) < \frac{A}{2}$$

Einer der beiden Summanden $A_1 + A_2$ oder $A_1 + A_3$ muss kleiner als $\frac{A}{4}$ sein, denn anderenfalls wäre die Summe nicht kleiner als $\frac{A}{2}$.