1 Vorschule

Lösung 107-11

Drei Kinder nehmen je einen Apfel aus dem Korb, das vierte nimmt den Korb mit dem letzten Apfel.

Lösung 107-12

Es sind

- 2 Quadrate
- 4 Rechtecke
- 6 Vierecke

Lösung 107-13

Erik legte Stapel C, Finn Stapel A und Leon Stapel B.

Lösung 107-14

Justus hat 4 Tomaten gepflanzt. Torben hat 6 Tomaten gepflanzt. Anton hat 3 Tomaten gepflanzt. Leon hat 5 Tomaten gepflanzt. Zusammen haben sie 18 Tomaten gepflanzt.

2 Klassen 1 und 2

Lösung 107-21

Zuerst muss man sich überlegen, welcher der drei Herren lügt. Dazu probiert man bei jedem Herren aus, ob er lügen kann, ohne dass einer der anderen beiden ebenfalls lügen müsste.

Fallunterscheidung:

- Wenn Herr Fischer lügen würde, müsste Herr Lehmann die Wahrheit sagen. Herr Meier kann dann unmöglich die Wahrheit sagen.
- Wenn Herr Meier lügen würde, können sowohl Herr Lehmann als auch Herr Fischer die Wahrheit sagen.
- Wenn Herr Lehmann lügen würde, müsste Herr Meier die Wahrheit sagen und Herr Fischer kann dann unmöglich die Wahrheit sagen.

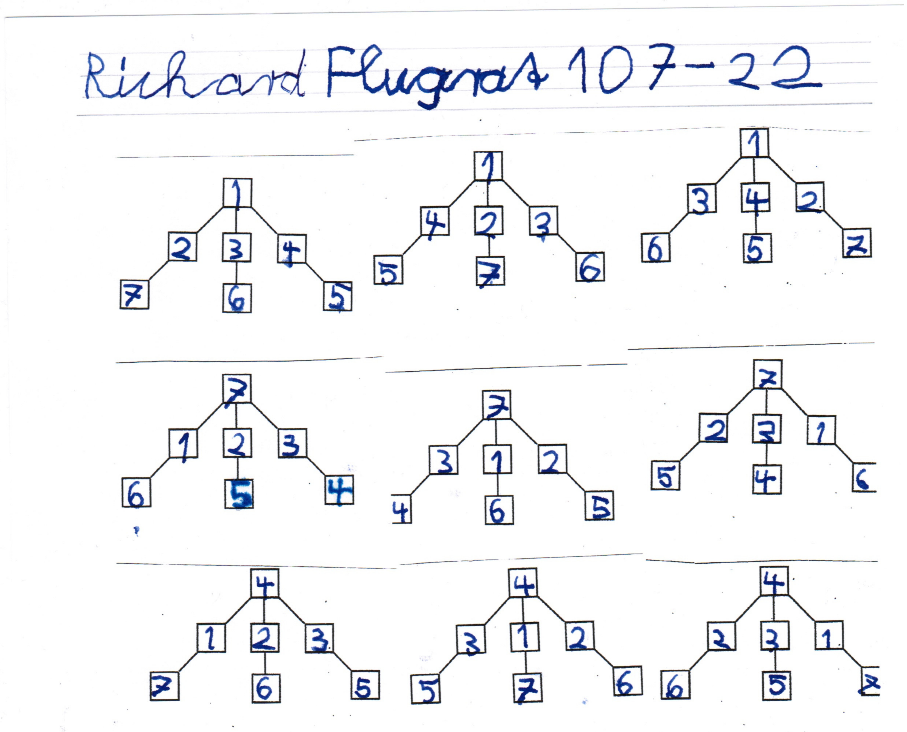
Nur wenn Herr Meier lügt, können die beiden anderen Gärtner die Wahrheit sagen. Daraus ergibt sich die folgende

Aufteilung:

Herr Fischer hat den Kürbis geerntet, Herr Lehmann hat die Tomate geerntet und Herr Meier hat die Gurke geerntet.

Lösung 107-22

Richard Flugrat, Klasse 1



Lösung 107-23

Was?	**Wie teuer?**	**Wie viele Personen**	**Gesamtpreis**
Eintritt	6,00 €	4 Personen	24,00 €
Cola	1,00 €	4 Personen	4,00 €
Popcorn süß	0,80 €	3 Personen	2,40 €
Popcorn salzig	1,00 €	1 Person	1,00 €
			31,40 €

Lennart muss 31,40 € bezahlen. Da er 40 € dabei hat, hat er noch 8,60 € übrig.

Lösung 107-24

a) $24 : 2 = 12$. Es sind 12 Enten.

b) $24 + 12 + 26 = 62$. Es sind 62 Tiere.

c) $6 + 4 = 10$. Es sind 10 Zieglein und Lämmer.

d) $4 \cdot 50 + 2 \cdot 12 = 200 + 24 = 224$. Es sind 224 Füße.

Lösung 107-25

An die Stelle von $\square$ gehört immer ein Rechenzeichen $(+, -, \cdot, :)$. Finde heraus welches.

$$\begin{aligned} 3+5+2 &= 10 \\ 23-15-7 &= 1 \\ 9+7-2 &= 14 \\ 59-32+3 &= 30 \end{aligned}$$

Jetzt gehört an die Stelle von $\square$ immer ein Vergleichszeichen $(<, =, >)$. Finde heraus welches. Wenn du Klammern siehst (zum Beispiel $(2+4)$), musst du diese zuerst ausrechnen.

$$\begin{aligned} (73-25) : 6 &> 6 \\ 62-(18:9) &= 60 \\ (2+4) \cdot 4 &= 24 \\ (8 \cdot 5) - 22 &> 16 \end{aligned}$$

Lösung 107-26

Zwillinge und Drillinge sind zusammen 7 Kinder. Also haben $25 - 7 = 18$ Kinder an 18 verschiedenen Tagen Geburtstag. Die Zwillinge und Drillinge feiern an 3 verschiedenen Tagen Geburtstag. In der Klasse wird $18 + 3 = 21$ Mal Geburtstag gefeiert.

Lösung 107-27

Clara fehlen noch $100 - 30 = 70$ Franken.

a) Clara muss noch 35 Wochen sparen.

b) Nachdem Clara 20 Franken geschenkt bekommen und für 4 Franken Filzstifte gekauft hat, hat sie $30 + 20 - 4 = 46$ Franken. Es fehlen ihr $100 - 46 = 54$ Franken. Sie muss dann noch 27 Wochen sparen.

Lösung 107-28

Anna sagt dies am Dienstag.

3 Klassen 3 und 4

Lösung 107-31

a) 1 Mal geklappt: 2 Schichten, 2 Mal geklappt: 4 Schichten. Man muss immer verdoppeln Nach 6 Mal klappen sind es 64 Schichten.

b) 1 Mal geklappt: 3 Schichten, 2 Mal geklappt : 9 Schichten. 3 Mal geklappt: 27 Schichten, 4 Mal geklpattt: 81 Schichten (immer mal 3).

Lösung 107-32

Nein, denn es bleibt immer eine ungerade Zahl von Spielsachen und 300 ist eine gerade Zahl.

Lösung 107-33

Nein, denn das Piratenschachblatt besteht aus 25 Feldern. Das ist eine ungerade Zahl.

Lösung 107-34

Ein Tag hat $60 \cdot 24 = 1440$ Minuten. Das Herz schlägt also ungefähr 100800 Mal am Tag.

Lösung 107-35

Im ungünstigsten Fall zieht man zuerst 20 blaue und dann 14 güne Kugeln. Nach 35 mal ziehen muss dann eine rote Kugel dabei sein.

Man muss also mindestens 35 Kugeln ziehen, um mit Sicherheit von jeder Farbe eine Kugel gezogen zu haben.

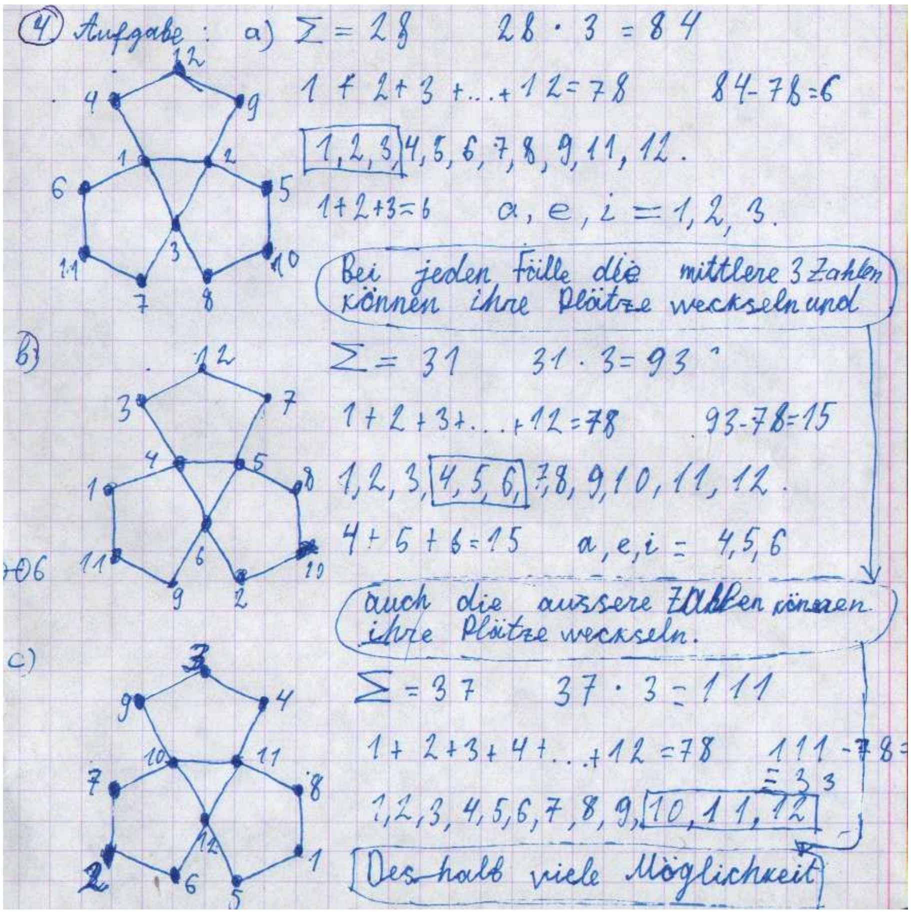
Lösung 107-36

Es sind 4 Kinder in der Familie.

Rosi hat keine Schwester, aber 3 Brüder (mit Lars). Daher hat Lars 1 Schwester (nämlich Rosi) und 2 Brüder. Das sind doppelt so viele Brüder wie Schwestern.

Lösung 107-37

Lösung von Zolbayar aus Mongolia, 8 Jahre, Klasse 3:



Die elegante Lösungsidee bestand in Folgendem:

Die Summe der Zahlen 1 bis 12 ist gleich 78. Um die Fünfecksumme 28 zu erreichen, muss die Gesamtsumme in allen 3 Fünfecken $3 \cdot 28 = 84$ betragen. Dann hat man aber die Zahlen im mittleren Dreieck zu oft addiert. Die Differenz $84 - 78 = 6$ muss daher garade gleich der Summe der Zahlen im Mitteldreieck sein. Nun hat Zolbayar die (einzigen) 3 Zahlen zwischen 1 und 12 gewählt, die die Summe 6 haben. Diese kommen in die Mitte. Die übrigen Zahlen zu verteilen, ist dann nicht mehr so schwer. (Analog für die Summen 31 und 37).

Die gleiche Lösungsidee wurde 2017 durch **Nikola Kostadinov, Klasse 2** angewendet und er erhielt für seine Lösung einen Pfiffikuspunkt.

Lösung 107-38

1) 1

2) Differenz

3) 6

4) dividiert man

5) 100000 cm

6) keins der 3

7) 9,5 s

8) $x + 1$

9) 8

10) keine, wenn es natürliche Zahlen sind. unendlich viele, wenn auch Zahlen kleiner 0 erlaubt sind.

4 Klassen 5 und 6

Lösung 107-41

Daniel Lainer, Klasse 1

Zuerst betrachten wir die kleinen Dreicke mit Spitze nach oben, die aus 3 Streihölzern bestehen. Jede Figur ist das Dreifache ihrer Vorgängerin. Die erste Figur besteht aus einem kleinen Dreick: $1 = 3^0$. Die zweite Figur besteht aus 3 kleinen Dreiecken: $3 = 3^1$. Die vierte Figur besteht aus 9 kleinen Dreiecken: $9 = 3^2$.

a) Wenn n die Nummer der Figur ist, besteht die n-te Figur aus 3^{n-1} kleinen Dreiecken und jedes aus 3 Streichhölzern. Das sind 3^n Streichhölzer.

b) Die 30-te Figur besteht aus 3 hoch 30 Streichhölzern.

Lösung 107-42

In folgender Tabelle sind alle Möglichkeiten aufgeführt, aus drei natürlichen Zahlen das Produkt 36 zu bilden (ohne Berücksichtigung der Reihenfolge der Faktoren), außerdem daneben die Summe der jeweiligen drei Zahlen:

$1 \cdot 1 \cdot 36$	$1 + 1 + 36 = 38$
$1 \cdot 2 \cdot 18$	$1 + 2 + 18 = 21$
$1 \cdot 3 \cdot 12$	$1 + 3 + 12 = 16$
$1 \cdot 4 \cdot 9$	$1 + 4 + 9 = 14$
$1 \cdot 6 \cdot 6$	$1 + 6 + 6 = 13$
$2 \cdot 2 \cdot 9$	$2 + 2 + 9 = 13$
$2 \cdot 3 \cdot 6$	$2 + 3 + 6 = 11$
$3 \cdot 3 \cdot 4$	$3 + 3 + 4 = 10$

Wie man sieht, haben genau zwei Summen den gleichen Wert, nämlich 13. Diese Zahl muss die Hausnummer des Institutsgebäudes sein; denn ohne den Hinweis auf diese Nummer hätte Hilbi sonst ja schon ausreichend informiert gewesen sein müssen.

Wären nun 1, 6 und 6 die Lebensalter der Kinder, gäbe es kein ältestes Kind. Also bleiben als Lebensalter der Kinder nur die Zahlen 2, 2 (Zwillinge!) und 9. (Der Hinweis auf das gleiche Aussehen war nur eine bewusst irritierende Angabe.)

Lösung 107-43

Er ist 60 Jahre alt. Man löst eine Gleichung mit dem Lebensalter als Unbekannter.

Lösung 107-44

Angenommen, es sind $0 \leq x \leq 16$ 7-Watt-Lampen und $0 \leq y \leq 16$ 11-Watt-Lampen. Dann gilt nach Voraussetzung (ohne Maßeinheiten)

$$\begin{aligned} x + y &= 16 \\ 7x + 11y &= 136 \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung ergibt sich $x = 16 - y$. Damit folgt aus der zweiten Gleichung

$$\begin{aligned} 7 \cdot (16 - y) + 11y &= 136 \\ 112 - 7y + 11y &= 136 \\ 4y &= 24 \\ y &= 6 \end{aligned}$$

Also: $x = 16 - 6 = 10$.

In dem Großraumbüro hängen 10 7-Watt-Lampen und 6 11-Watt-Lampen.

Lösung 107-45

Es gilt

$$\begin{aligned} 3 + 2 + 1 + 1 + x &= 5 \cdot 1,8 \\ 7 + x &= 9 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Die fünfte Note ist eine 2.

Lösung 107-46

a) Der Bruch ist definiert für alle Zahlen $x \neq 1$. Es ist

$$\frac{6}{x-1} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x - 1 \in \{1, 2, 3, 6\} \Leftrightarrow x \in \{2, 3, 4, 7\}$$

b) Der Bruch ist definiert für alle Zahlen $x \neq 1$. Wir können den Bruch umformen zu

$$\frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = \frac{(x-1)+1}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} + \frac{1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$$

Für jedes $x \in \mathbb{N}, x > 2$ ist der zweite Summand auf der rechten Seite kleiner als 1, die Summe also keine natürliche Zahl, denn es gilt

$$\begin{aligned} x &> 2 \Leftrightarrow \\ x-1 &> 1 \Leftrightarrow \\ \frac{1}{x-1} &< 1 \end{aligned}$$

Es gibt daher nur eine einzige natürliche Zahl x, für die der gegebene Bruch ebenfalls eine natürliche Zahl ist. Dies ist $x = 2$:

$$\frac{2}{2-1} = 2$$

c) Der Bruch ist definiert für alle Zahlen $x \neq 4$. Mit dem gleichen Trick wie bei b) formen wir den Term um zu

$$T(x) := \frac{x}{x-4} = \frac{x-4+4}{x-4} = 1 + \frac{4}{x-4}$$

Hier können 3 Fälle unterschieden werden:

Fall 1: $1 \leq x < 4$. Es ist $\frac{4}{x-4} < 0$, also $T(x) \notin \mathbb{N}$,

Fall 2: $4 < x \leq 8$. Für $x \in \{5, 6, 8\}$ ist $T(x) \in \mathbb{N}$,

Fall 3: $8 < x$. Es ist $\frac{4}{x-4} < 1$ und damit $T(x) \notin \mathbb{N}$.

Damit gilt: nur für $x \in \{5, 6, 8\}$ ist der gegebene Term eine natürliche Zahl.

Lösung 107-47

Die Länge der Strecke b erhält man aus dem Flächeninhalt des Grundstücks und den Angaben über a und b wie folgt:

$$1275 \text{ m}^2 = 3 \cdot a \cdot b - b \cdot c = 3 \cdot a \cdot b - \frac{1}{6} \cdot a \cdot b$$

oder

$$6 \cdot 1275 \text{ m}^2 = 17 \cdot a \cdot b$$

und mit $a = 30\text{m}$:

$$b = \frac{6 \cdot 1275}{17 \cdot 30}\text{m} = \frac{75}{5}\text{m} = 15\text{m}$$

Es werden insgesamt

$$2 \cdot a + 6 \cdot b + 2 \cdot c = 2 \cdot 30\text{m} + 6 \cdot 15\text{m} + 2 \cdot 5\text{m} = 160\text{m}$$

Maschendraht benötigt.

Lösung 107-48

Leonie Rößler, 8 Jahre, Klasse 2:

Wir wissen

1. $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

2. Der kleinste Winkel liegt der kleinsten Seite gegenüber.

3. $\alpha = 58°$

4. $a > c \Rightarrow \gamma < 58°$

5. $\beta + \gamma = 180° - 58° = 122°$

6. $\beta > 64°$.

b ist die größte Seite. Dann kommt die Seite a und die kleinste Seite ist c.

5 Klassen 7 und 8

Lösung 107-51

Sei n gerade. Dann gibt es eine natürliche Zahl k, so dass $n = 2k$ ist. Den Term kann man für gerades n schreiben als

$$(2k)^2(3 + (2k)^2) = 4k^2(3 + (2k)^2)$$

4 ist ein Faktor. Damit ist der Term für gerades n durch 4 teilbar.

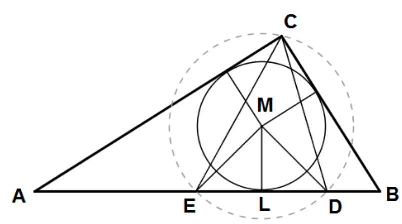
Sei n ungerade. Dann gibt es eine natürliche Zahl k, so das $n = 2k + 1$ ist. Den Term kann man für ungerades n schreiben als

$$(2k + 1)^2(3 + (2k + 1)^2) = (2k + 1)^2(3 + 4k^2 + 4k + 1) = 4(2k + 1)^2(k^2 + k + 1)$$

4 ist ein Faktor. Damit ist der Term für ungerades n ebenfalls durch 4 teilbar.

Lösung 107-52

Es seien M der Mittelpunkt des Inkreises des Dreiecks $\triangle ABC$ und L der Fußpunkt des Lotes von M auf AB. Dann ist $\angle DME$ der Zentriwinkel und $\angle DCE$ der Peripheriewinkel des Kreises um M durch C über der Sehne DE. Folglich ist $\mid \angle DME \mid = 2 \mid \angle DCE \mid$ (Kreiswinkelsatz). Da $\triangle ABC$ rechtwinklig ist, gilt mit den üblichen Winkelbezeichnungen im Dreieck



$$\alpha + \beta = 90° \qquad (1)$$

Ferner ist

$$\gamma = \delta + \epsilon - \mid \angle CDE \mid = 90° \qquad (2)$$

wobei $\delta = \angle ADC = \angle DCA$ und $\epsilon = \angle CEB = \angle BCE$ ist (letztere Gleichungen gelten nach Konstruktion, da $\triangle ADC$ und $\triangle BCE$ gleichschenklig sind. Innenwinkelsatz für die Dreiecke $\triangle ADC$ und $\triangle BCE$ ergibt

$$\alpha + 2\delta = 180° \quad (3)$$
$$\beta + 2\epsilon = 180° \quad (4)$$

Addition der Gleichungen (3) und (4) ergibt zusammen mit (1) und (2)

$$2 \mid \angle DCE \mid = \mid \angle DME \mid = 90°$$

Das Dreieck $\triangle DME$ ist folglich gleichschenklig, rechtwinklig, also $2 \mid ML \mid = \mid DE \mid$. Da ML der Radius des Inkreises des Dreiecks $\triangle ABC$ ist, ist damit die Behauptung bewiesen.

Lösung 107-53

Es seien v_a, v_b die Geschwindigkeiten des Fahrers A bzw. B. Fahren beide in entgegengesetzte Richtungen und hat Fahrer B bis zum Treffpunkt die Strecke x zurückgelegt, so ist A $300 - x$ gefahren. Es gilt also

$$v_a = \frac{300 - x}{15}, v_b = \frac{x}{15}$$

Fahren beide Fahrer in die gleich Richtung und habe B bis zum ersten Treffen mit A die Strecke y zurückgelegt, dann ist A in dieser Zeit die Strecke $300 + y$ gefahren. Es gilt also

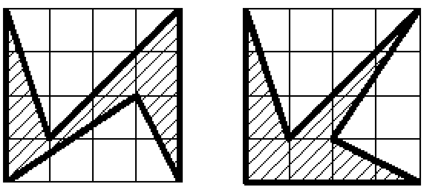
$$v_a = \frac{300 + y}{150}, v_b = \frac{y}{150}$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man durch äquivalente Umformungen

$$x = 135\text{m}, y = 1350\text{m}$$

Damit beträgt die Geschwindigkeit des Fahrers B 9 m/s, die Geschwindigkeit des Fahrers A 11 m/s. Probe am Text bestätigt die Korrektheit dieser Lösung.

Lösung 107-54



Es gibt 2 voneinander verschiedene Lösungen. Man findet sie, indem man verschiedene Varianten ausprobiert, muss dann aber noch beweisen, dass der Flächeninhalt des Sechsecks tatsächlich 6 Quatratzellen beträgt oder der nicht schraffierte Restinhalt gleich 10 Quadratzellen ist. Dies rechnet man nach, indem man die Restfigur in rechtwinklige Dreiecke zerlegt, deren Katheten entlang der Gitterlinien verlaufen.

Lösung 107-55

Es ist

$$\begin{aligned} 96525 &= 3^2 \cdot 5^3 \cdot 11 \cdot 13 \\ 7425 &= 3^2 \cdot 5^3 \cdot 11 \\ 75 &= 3 \cdot 5^2 \end{aligned}$$

Für die zweite Zahl x muss daher gelten $x = 3 \cdot 5^2 \cdot m$ mit einer natürlichen Zahl m, die 3, 5 und 11 nicht als Primfaktor enthält. Anderenfalls wäre 75 nicht der größte gemeinsame Teiler. Aus den beiden ersten Gleichungen ist andererseits klar, dass $m = 13$ gelten muss, denn 13 kommt in der Primfaktorzerlegung der bereits bekannten Zahl 7425 der beiden Zahlen nicht vor, aber genau einmal als Faktor in der Primfaktorenzerlegung des kgV. Da die Primfaktorenzerlegung einer natürlichen Zahl ebenso wie das kgV und der ggT zweier natürlicher Zahlen eindeutig bestimmt sind, ist die zweite gesuchte Zahl x ebenfalls eindeutig bestimmt und es gilt $x = 3 \cdot 5^2 \cdot 13 = 975$.

Lösung 107-56

Es ist nicht möglich

Beweis: Angenommen, es sei möglich, dann muss jede der 2007 Geraden zu genau 6 Geraden parallel sein. Die Menge der 2007 Geraden müsste sich dann in Teilmengen von je genau 7 paarweise parallelen Geraden einteilen lassen. Da 2007 aber nicht durch 7 teilbar ist, geht das nicht.

6 Klassen 9 bis 13

Lösung 107-61

$$S_y = 1^3 + 2^3 + \ldots + y^3 = \frac{1}{4}y^2(y+1)^2$$

ist eine Quadratzahl. Restklassen modulo 5 von Quadratzahlen:

n	0	1	2	3	4
n^2 Rest	0	1	4	4	1

Restklassen von $S_x = 1! + 2! + \ldots + x!$ modulo 5:

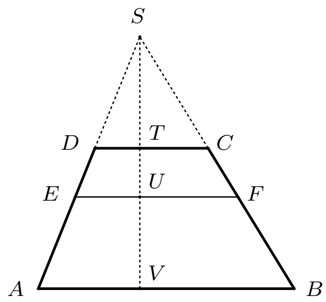
x	1	2	3	4	5
S_x Rest	1	3	4	3	3

Für $x \geq 5$ ist jeder Summand von S_x durch 5 teilbar. D.h. alle weiteren S_x gehören der gleichen Restklasse 3 an. S_x ist also nur für $x = 1$ und $x = 3$ Quadratzahl. Es gibt genau 2 Lösungspaare: (1,1) und (3,2).

Lösung 107-62

U.Warnecke, Münster

1. Verlängert man die Seite AD über D hinaus und die Seite BC über B hinaus, so schneiden sich diese Verlängerungen wegen $a > b$ im Punkt S. Sei weiter h_S der Abstand des Punktes S von der Seite AB; er lässt sich nach dem 2. Strahlensatz berechnen:



$$a = |AB|$$
$$b = |CD|$$
$$h = |TV|$$
$$d = |UV|$$
$$x = |EF|$$
$$h_S = |SV|$$

$$\frac{b}{a} = \frac{h_S - h}{h_S} \quad \Leftrightarrow \quad h_S = \frac{a}{a-b} \cdot h.$$

Damit findet man zunächst

$$\frac{x}{a} = \frac{h_S - d}{h_S} \quad \Leftrightarrow \quad d = (1 - \frac{x}{a}) \cdot h_S.$$

Einsetzung für H liefert

$$d = \frac{a-x}{a} \cdot \frac{a}{a-b} \cdot h = \frac{a-x}{a-b} \cdot h.$$

Auflösung nach x ergibt

$$x = a - \frac{a-b}{h} \cdot d.$$

2. Nun kann d für die vorgegebenen Fälle allgemein und nummerisch berechnet werden.

a) Für $x = \dfrac{a+b}{2}$ ist

$$d = \frac{a - \frac{a+b}{2}}{a-b} \cdot h = \frac{a-b}{2(a-b)} \cdot h = \frac{1}{2}h,$$

nummerisch $d = 2,5$ cm.

b) Für $x = \sqrt{ab}$ ist $d = \dfrac{a - \sqrt{ab}}{a-b} \cdot h$, nummerisch $d = 3$ cm.

c) Für $x = \dfrac{1}{\frac{1}{2}(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})}$ ist

$$d = \frac{a - \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}}{a-b} \cdot h = \frac{a - \frac{2ab}{a+b}}{a-b} \cdot h = \frac{a^2 + ab - 2ab}{(a-b)(a+b)} \cdot h = \frac{a}{a+b} \cdot h,$$

nummerisch $d = 3\frac{6}{13}$ cm.

d) Für $x = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ ist $d = \dfrac{a - \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}{a-b} \cdot h$, nummerisch $d = \dfrac{9 - \frac{1}{2}\sqrt{194}}{5} \cdot 5 \approx 2,04$ cm.

Lösung 107-63

U.Warnecke, Münster

Die Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel liefert sofort

$$s_n \cdot \overline{s_n} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) \geq \left(n \cdot \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}\right) \cdot \left(n \cdot \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}\right) = n^2 \cdot \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{\prod_{i=1}^{n} a_i}} = n^2.$$

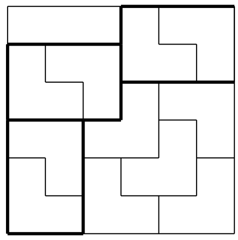
Lösung 107-64

U.Warnecke, Münster

Für $p = 3$ sind p, $p + 10$, $p + 14$ Primzahlen, nämlich 3, 13 und 17. (Es ist nicht verlangt zu untersuchen, ob $p = 3$ die einzige Möglichkeit ist.)

Lösung 107-65

U.Warnecke, Münster



Zwei „Winkel“ kann man zu einem 3×2-Rechteck zusammensetzen. Für $k \in \{0; 2; 4; 6; 8; 10; 12\}$ ist daher eine vollständige Überdeckung des 6×6-Quadrates möglich, da $36 - 3k$ jeweils eine durch 3 teilbare Felderzahl ergibt, verbleibende Fläche daher mit entsprechend vielen kleinen 3×1-Rechtecken überdeckt werden kann.
Aber auch für $k \in \{5; 7; 9; 11\}$ ist zusammen mit entsprechend vielen 3×1-Rechtecken eine vollständige Überdeckung möglich, wie der nebenstehenden Figur zu entnehmen ist. Fraglich sind nur noch die Fälle $k = 1$ und $k = 3$.
Den Fall $k = 1$ kann man sofort ausschließen; denn egal wie man mit den dann erforderlichen 11 kleinen 3×1-Rechtecken das Quadrat überdeckt, stets bleiben 3 kleine Zellen übrig, die entweder in derselben Zeile oder derselben Spalte so hintereinander liegen, dass auch sie nur mit einem 3×1-Rechteck überdeckt werden können.

Auch den Fall $k = 3$ kann man ausschließen. Fügt man zwei „Winkel“ so, wie in der Figur zu sehen, zu einem 3×2-Rechteck zusammen, so liegt bis auf die Tatsache, dass man jetzt nur neun 3×1-Rechtecke zur Verfügung hat, der Fall $k = 1$ vor.

Baut man zwei der drei „Winkel“ nicht zu einem 3×2-Rechteck zusammen sondern baut sie in anderer Weise in das 6×6-Quadrat ein, so entstehen in jeder Zeile und Spalte ein 2×1-Rechteck und ein davon getrennt liegendes 1×1-Rechteck, so dass infolgedessen weder durch ein 3×1-Rechteck noch durch den verbliebenen „Winkel“ eine vollständige Überdeckung des Quadrates erreicht werden kann.

Lösung 107-66

U.Warnecke, Münster

a) f ist auf dem Intervall $[0; 1]$ eine monoton steigende Funktion; denn sei $0 \le x_1 \le x_2 \le 1$, dann ist $x_2 - x_1 \ge 0$ und damit jetzt wegen $f(x_2 - x_1) \ge 0$

$$f(x_2) = f(x_1 + x_2 - x_1) \ge f(x_1) + f(x_2 - x_1) \ge f(x_1).$$

Wegen der Monotonie hat man jetzt für $0 < x_1 \le 1$ und $x_2 = 0$

$$f(x_1) = f(x_1 + 0) \ge f(x_1) + f(0) \quad \Rightarrow \quad f(0) = 0.$$

Weiter folgt aus $f(1) = 1$ und $\frac{1}{2} < x \le 1$, dass $f(x) \le 1 \le 2x$.

Nun sei $0 < x \le \frac{1}{2}$; dann ist es immer möglich, eine natürliche Zahl n so zu wählen, dass $\frac{1}{2} < nx \le 1$, und dann kann man durch vollständige Induktion beweisen, dass

$$0 \le x \,\wedge\, nx \le 1 \quad \Rightarrow \quad f(nx) \ge nf(x).$$

Für $\frac{1}{2} < nx \leq 1$ ist damit auch gezeigt, dass $f(nx) \leq 2 \cdot nx$. Deshalb hat man jetzt

$$nf(x) \leq f(nx) \leq 2 \cdot nx,$$

woraus nun $f(x) \leq 2x$ auch für $0 < x \leq \frac{1}{2}$ folgt.

b) Die Antwort ist: Nein!
Zum Beweis diene als Gegenbeispiel die durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ für } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 \text{ für } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

gegebene Funktion f. Sie erfüllt die gestellten Bedingungen; denn wenn $0 \leq x_2 \leq x_1 \leq 1$ und $x_1 + x_2 \leq 1$, so folgt hieraus $2x_2 \leq x_1 + x_2 \leq 1$, also $x_2 \leq \frac{1}{2}$ und damit $f(x_2) = 0$.

Zugleich gilt

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 > 0,95 = 1,9 \cdot \frac{1}{2}.$$

Damit ist die Aussage: „ $f(x) \leq 1,9x$ für alle $x \in [0;1]$ “ widerlegt.