# 1 Vorschule

**Lösung 108-11**

Es sind 12 Eier. Wenn Anne ein Kind ist, sind es 4 Kinder. Dann kann jedes Kind kann 3 Eier essen. Wenn Anna kein Kind ist, sind es 3 Kinder und jedes Kind kann 4 Eeier essen.

**Lösung 108-12**

Die Karten 1 und 3 zeigen mit der gleichen Seite nach oben. Die beiden anderen Karten wurden einmal umgeklappt.

**Lösung 108-13**

Ja, denn es sind nur 3 Paar. Schlimmstenfalls erwischt sie bei den ersten drei Versuchen je einen von jedem Paar. Dann bleiben 3 verschiedene einzelne Schuhe übrig. Der nächste Zug ist dann auf jeden Fall ein Treffer.

**Lösung 108-14**

1 - A, 2 - B, 3 - C

# 2 Klassen 1 und 2

**Lösung 108-21**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 6 | 9 | 10 | 8 | 10 |
| $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $-$ | $-$ |
| 4 | 6 | 11 | 11 | 2 | 9 |
| $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $-$ | $-$ |
| 8 | 12 | 10 | 11 | 6 | 1 |
| $+$ | $+$ | $+$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| 8 | 12 | 17 | 10 | 18 | 22 |
| $=$ | $=$ | $=$ | $=$ | $=$ | $=$ |
| 24 | 36 | 47 | 22 | 18 | 22 |
| K | A | M | E | L | E |

**Lösung 108-22**

**a)** Haufen A besteht aus 13 Steinen, Haufen B aus 17 Steinen

**b)** Es müssen 2 Steine umgelegt werden. Dann besteht jeder Haufen aus 15 Steinen.

**Lösung 108-23**

Hans braucht 19 Minuten brauchen.

Angenommen er würde 10 Minuten essen, dann sind nur noch 50 Nudeln auf dem Teller, weil die Menge der Nudeln sich jede Minute um $10 - 5 = 5$ Nudeln reduziert. Er könte weitere 10 Minuten brauchen um die restlichen 50 Nudeln weg zu bekommen, aber es sind nur 9 weitere Minuten, weil die Mama keine Nudeln dazu legen würde, wenn der Teller leer ist. Es sind insgesamt also $10 + 9 = 19$ Minuten.

**Lösung 108-24**

Der Hase ist listiger als der Bär und zwar zweimal listiger.

**Lösung 108-25**

**Lösung von Nicolai:**

Zusammen sind sie 30 Jahre und 1 Monat alt.

*Begründung:* Hannah ist 15 Jahre und 2 Monate. 15+14 sind 29, 11 Monate und 2 Monate sind 1 Jahr und 1 Monat. 29 Jahre +1 Jahr +1 Monat sind 30 Jahre und 1 Monat.

**Lösung 108-26**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 14 | + | 13 | = | 27 |
| – | | = | | – |
| 6 | + | 10 | = | 16 |
| = | | + | | = |
| 8 | + | 3 | = | 11 |

**Lösung 108-27**

Das zweite Kind hat 5 Minuten früher angefangen als das erste.

**Lösung 108-28**

Lisa hat $80 - 55 = 25$ Kastanien.

# 3 Klassen 3 und 4

## Lösung 108-31

Nein, denn es bleibt immer eine gerade Zahl Spielzeuge in meinem Schrank liegen.

## Lösung 108-32

Ein Kuchen wiegt $2 \cdot 1$ kg $= 2$ kg. Der Inhalt wiegt 1 kg $+5 \cdot 2$ kg $= 11$ kg. Der Kühlschrank wiegt ebenso 11 kg. Das Gesamtgewicht ist 11 kg (Kühlschrank) + 11 kg(Inhalt) = 22 kg.

## Lösung 108-33

| | |
|---|---|
| Mütze, Kopftuch, Hut | Kopfbedeckungen |
| Sonne, Glühlampe, Flamme | Lichtquellen, Wärmequellen |
| Schlange, Krokodil, Eidechse | Reptilien |
| Flöte, Klavier, Trompete | Musikinstrumente |
| Violine, Cello, Kontrabass | Streichinstrumente |
| Waage, Thermometer, Bandmaß | Messinstrumente |
| Delfin, Reh, Elefant | Säugetiere |

## Lösung 108-34

$$1165 + 195 - 962 = 398$$

Die Spree ist 398km lang.

## Lösung 108-35

Die Sonne ist zu sehen.

## Lösung 108-36

Um zu zeigen, dass es genau eine Lösung gibt, muss man durch systematisches Probieren alle möglichen Aufteilungen der 13 Tiere untersuchen. Beginnt man mit 0 Spinnen und vergrößert deren Anzahl schrittweise um 1, dann stellt man fest, dass sich die Anzahl der Beine von 78 beginnend um je 2 erhöht. Da es 88 Beine sind, sind $10 : 2 = 5$ solcher Schritte nötig.

| **Anzahl Spinnen** | **Anzahl Käfer** | **Anzahl Beine** |
|---|---|---|
| 0 | 13 | $0 \cdot 8 + 13 \cdot 6 = 78$ |
| 1 | 12 | $1 \cdot 8 + 12 \cdot 6 = 80$ |
| 2 | 11 | $2 \cdot 8 + 11 \cdot 6 = 82$ |
| ... | ... | ... |
| 5 | 8 | $5 \cdot 8 + 8 \cdot 6 = 88$ |
| ... | ... | ... |
| 13 | 0 | $13 \cdot 8 + 0 \cdot 6 = 104$ |

Einzige Lösung: 5 Spinnen und 8 Käfer.

**Lösung 108-37**

Run**drei**se, St**eins**chlag, Ver**zwei**flungstat, Sch**acht**elhalm, Kla**vier**stunde, Han**drei**chung, **Sech-S**tiel

Die Stadt hat 3128436 Einwohner.

**Lösung 108-38**

| | **Hochzeit** | **Fest** |
|---:|:---:|:---:|
| **Wasser** | 2,5 Liter | 5 Liter |
| **Bier** | 5 Liter | |
| **Apfelschorle** | 10 Liter | 7,5 Liter |

**a)** Es werden 17,5 Liter Apfelschorle getrunken.

**b)** Es werden 7,5 Liter Wasser getrunken.

# 4 Klassen 5 und 6

**Lösung 108-41**

Es seien $x$ die Anzahl der Erwachsenen, $y$ die Anzahl der Rentner und $z$ die Anzahl der Kinder. Dann gilt (ohne Maßeinheiten)

$$\begin{aligned} x+y+z &= 30 \\ 2x+1,5y+z &= 40 \\ z &= 2y \end{aligned}$$

Schreibt man die linke Seite der zweiten Gleichung als $(x+y+z)+x+\frac{1}{2}y$, so kann man die Summe in Klammern durch 30 ersetzen. Es gilt also

$$x+\frac{1}{2}y=10$$

Ersetzen wir in Gleichung 1 $z$ durch $2y$, so folgt

$$x+3y=30$$

Dies aufgelöst ergibt $y=8$, also $z=16$ und $x=6$.

Das sind insgesamt $6+8+16=30$ Personen, doppelt so viele Kinder (16) wie Rentner (8) und sie bezahlten $6\cdot 2$ € $+8\cdot 1,5$ € $+16$ € $=40$ € Eintritt.

An dem Museumsbesuch nahmen 6 Erwachene, 8 Rentner und 16 Kinder teil.

**Lösung 108-42**

Angenommen, der Junge ist $x>0$ Jahre und $0\leq y<12$ Monate alt. Dann gilt

$$12\cdot x+y-x=11\cdot x+y=111=11\cdot 10+1$$

Wegen $y<12$ gilt $y=1$ und $x=10$. Der Junge ist am 14. Oktober 2005 also 10 Jahre und einen Monat alt. Das heißt, er hat am 14. September 1995 Geburtstag.

**Lösung 108-43**

**Variante 1 - Prisca Hamm, 10 Jahre, Klasse 5:**

Ich addiere die Zahlen von eins bis acht die schon zum Eintragen vorgegeben sind. Das Ergebnis ist 36. Die Gesamtsumme von allen Zahlen im Gitter ist also $36+x$. Die Summe in jeder Zeile und jeder Spalte ist $12+\frac{x}{3}$. Also muss $x$ durch 3 teilbar sein.

Ich habe folgende Beispiele gefunden:

$x=0$:

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 1 | 3 |
| 0 | 5 | 7 |
| 4 | 6 | 2 |

$x=3$:

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 2 | 8 |
| 3 | 6 | 4 |
| 7 | 5 | 1 |

$x=6$:

| | | |
|---|---|---|
| 6 | 1 | 7 |
| 2 | 8 | 4 |
| 6 | 5 | 3 |

$x=9$:

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 3 | 4 |
| 1 | 5 | 9 |
| 6 | 7 | 2 |

Größere Zahlen für $x$ gehen nicht. Die nächste Dreierzahl wäre ja 12. Dann muss die Spaltensumme und die Zeilensumme 16 sein. Die beiden Zahlen in der Spalte von $x$

müssten dann zusammen 4 ergeben und die beiden Zahlen in der Zeile von $x$ auch. Aber das geht nicht mit 4 verschiedenen Zahlen von 1 bis 8. Genauso ist es bei größeren $x$.

**Variante 2 - Jan Hofmann, 12 Jahre, Klasse 6:**

1+2+3+4+5+6+7+8 = 36. Die Summe der 8 Zahlen ist schon 36. Da die Gesamtsumme aller 9 Zahlen auf drei Zeilen gleichermaßen aufgeteilt wird, muss sie ebenfalls durch 3 teilbar sein. Der dritte Teil der Summe muss mindesten um drei größer sein als die größte Zahl, wenn $x$ nicht 0 ist, weil man ja zu jeder Zahl noch zwei Zahlen addieren muss. Die kleinsten Summanden sind $1 + 2 = 3$.

$36 + 12 = 48$ , $48 : 3 = 16$. 16 ist groß genug.

$36 + 15 = 51$, $51 : 3 = 17$. 17 ist nur um 2 größer als 15. Damit geht 15 nicht mehr.

Also kommen 0; 3; 6; 9; 12 usw. in Frage.

x = 12: Ich brauche zwei Varianten (eine für die Zeile mit 12 und eine für die Spalte mit 12), um die Summe 16 aus 12 und zwei weiteren Summanden zu erhalten. *1. Variante:* $12 + 1 + 2 = 16 \Rightarrow$ Eine zweite Variante gibt es nicht, da jede Zahl nur einmal benutzt wird. Das heißt: $x$ ist **nicht** 12.

| $x = 0$, Summe = 12: | $x = 3$, Summe = 13: | $x = 6$, Summe = 14: | $x = 9$, Summe = 15: |
|---|---|---|---|
| 8 4 0 | 8 4 1 | 8 4 2 | 8 3 4 |
| 7 2 3 | 7 3 3 | 1 7 6 | 1 5 9 |
| 6 5 1 | 6 5 2 | 5 3 6 | 6 7 2 |

Es erfüllen die Zahlen 0; 3; 6 und 9 diese Bedingung.

**Lösung 108-44**

**Leo Gitin, 8 Jahre, Klasse 3:**

Die Kinder haben gleich viele Chancen.

Alle Varianten sind $6 \cdot 6 = 36$. Von diesen haben 3 die Augenzahl 4 und 3 die Augenzahl 10. Bei hinreichend langem Spiel erscheinen die Augensummen 4 bzw. 10 in $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ der Fälle.

**Lösung 108-45**

Das Wesen im gelben Mantel hat genau 6 Arme.

*Begründung:*

Das rote Wesen muss lügen, denn spräche es die Wahrheit, müsste es eine gerade Anzahl Arme haben. Folglich kann das blaue Wesen keine 6 Arme haben, hat also gelogen. Demnach hat das blaue Wesen eine ungerade Anzahl Arme. Da das grüne Wesen behauptet, das blaue hätte 4 Arme, muss es lügen, denn 4 ist gerade. Das grüne Wesen hat damit ebenfalls nicht genau 6 Arme. Also ist die erste Aussage des gelben Wesens wahr. Es lügt nicht und ist das einzige mit genau 6 Armen.

**Lösung 108-46**

Angenommen, es gäbe einen solchen Bruch und sein Zähler sei $n \in \mathbb{N}$. Dann muss gelten

$$\frac{4}{13} < \frac{n}{20} < \frac{5}{13}$$

bzw.

$$6,15\ldots = \frac{80}{13} < n < \frac{100}{13} = 7,69\ldots$$

Die einzige natürliche Zahl $n$, die diese beiden Ungleichungen erfüllt, ist $n = 7$. Wenn es also einen Bruch mit den gewünschten Eigenschaften geben soll, so muss dies $\frac{7}{20}$ sein. Tatsächlich gilt

$$\frac{4}{13} < \frac{7}{20} < \frac{5}{13}$$

Damit ist neben der Existenz sogar die Eindeutigkeit gezeigt.

**Lösung 108-47**

Sei $d$ der Divisor. Die Probe liefert $61 \cdot d + 34 = 12600$, d. h. $d = 206$. Der korrekte Divisor sollte aber 266 sein. Das ergibt $61 \cdot 266 + 34 = 16260$.

Die Divisionsaufgabe lautete also $16260 : 266 = 61$ Rest 34.

**Lösung 108-48**

Ravenna braucht 3 Runden, um Casimir einzuholen. *Begründung:*

Casimir braucht ja 12 Sekunden für eine Runde. Eine halbe Runde hat er Vorsprung - also 6 Sekunden. In einer Runde holt Ravenna 2 Sekunden auf. Nach 3 Runden hat Ravenna Casimir erreicht, denn Casimir ist in diesen 30 Sekunden zweieinhalb Runden gelaufen.

# 5 Klassen 7 und 8

**Lösung 108-51**

Die Zahlenfolge wird durch Multiplikation mit 2 aufgebaut und kann wie folgt dargestellt werden:

$$1 = 2^0, 2 = 2^1, 4 = 2^2, 8 = 2^3, \ldots$$

Also ist das n-te Element der Zahlenfolge $2^{n-1}$. Die 30te Zahl ist $2^{29}$.

Wenn man die Zahlenfolge $1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$ näher betrachtet, kann man folgenden Sachverhalt merken:

$$\begin{aligned}
2^0 &= 1\\
2^1 &= (1) + 1 = 2^0 + 1\\
4 &= (1 + 2) + 1 = 2^0 + 2^1 + 1\\
8 &= (1 + 2 + 4) + 1 = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 1\\
16 &= (1 + 2 + 4 + 8) + 1 = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 1\\
32 &= (1 + 2 + 4 + 8 + 16) + 1 = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 1\\
&\ldots\\
2^{n-1} &= \left(2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{n-2}\right) + 1
\end{aligned}$$

D.h. die n-te Zahl dieser Zahlenfolge ist um 1 größer als die Summe der $(n-1)$ vorigen Elemente der Zahlenfolge. In der letzten Gleichung steht rechts die Summe der ersten (n-2) Elemente der Zahlenfolge + 1. D.h., die Summe der ersten $n$ Elemente der Zahlenfolge ist dann

$$2^0 + 2^1 + \ldots 2^{n-1} = 2^n - 1$$

Die Summe der ersten 30 Elemente der Zahlenfolge ist $2^{30} - 1$.

**Lösung 108-52**

**Lösung von Kim Holtze, 11 Jahre, Klasse 6:**

Also beide Augen füllen das Becken in 2 Tagen, das sind 48 Stunden. Pro Stunde wird das Becken dann zu $\frac{1}{48}$ gefüllt.
Die Nase füllt das Becken in 3 Tagen, das sind 72 Stunden. Pro Stunde wird das Becken dann zu $\frac{1}{72}$ gefüllt.
Die Tatze füllt das Becken in 4 Tagen, das sind 96 Stunden. Pro Stunde wird das Becken dann zu $\frac{1}{96}$ gefüllt.
Das Maul füllt das Becken in 6 Stunden. Pro Stunde wird das Becken dann zu $\frac{1}{6}$ gefüllt.

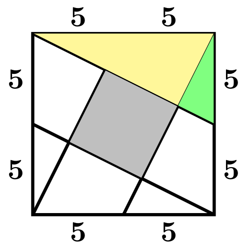
Wenn $x$ die Anzahl der Stunden, die für die Füllung von allen zusammen gebraucht wird, ist, dann gilt

$$\left(\frac{1}{48} + \frac{1}{72} + \frac{1}{96} + \frac{1}{6}\right) \cdot x = 1$$

weil das Becken ja nur einmal ganz gefüllt wird. Also ist $x = \frac{288}{61}$.

In 4 Tagen und $\frac{44}{61}$ Stunden ist dann das Becken gefüllt.

**Lösung 108-53**




Den gesuchten Flächeninhalt erhält man als Differenz aus dem Flächeninhalt des großen Quadrats und den Flächeninhalten von 4 der gelben rechtwinkligen Dreiecke. Ein gelbes Dreieck geht aus einem grünen Dreieck durch Streckung um den Faktor 2 hervor. Sein Flächeninhalt beträgt also das Vierfache des Flächeninhalts des grünen Dreiecks. Ein gelbes und ein grünes Dreieck ergänzen sich jeweils zu einem großen rechtwinkligen Dreieck mit den Kathetenlängen 5 und 10. Sei $x$ der Flächeninhalt eines kleinen grünen Dreiecks, dann ist $4x$ der Flächeninhalt eines gelben Dreiecks und es gilt

$$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10 = x + 4x$$

bzw. $x = 5$, also $4x = 20$. Ein gelbes Dreieck hat somit den Flächeninhalt 20 und folglich das graue Quadrat den Flächeninhalt $100 - 4 \cdot 80 = 20$.

**Lösung 108-54**

Es gilt $3 < 5$. Dies formen wir äquivalent um:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 5000 + 3 &< 5 \cdot 3000 + 5 \\ 3 \cdot (5000 + 1) &< 5 \cdot (3000 + 1) \\ 3 \cdot 5001 &< 5 \cdot 3001 \\ \frac{3}{5} &< \frac{3001}{5001} \end{aligned}$$

Weiter gilt $3000 + 500 = 3500 < 5300 = 300 + 5000$. Dies formen wir äquivalent um:

$$\begin{aligned} 500 \cdot 3000 + 500 + 3000 + 1 &< 300 \cdot 5000 + 300 + 5000 + 1 \\ (500 + 1)(3000 + 1) &< (300 + 1)(5000 + 1) \\ 501 \cdot 3001 &< 301 \cdot 5001 \\ \frac{3001}{5001} &< \frac{301}{501} \end{aligned}$$

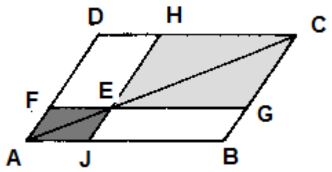
Das ergibt

$$\frac{3}{5} < \frac{3001}{5001} < \frac{301}{501}$$

**Lösung 108-55**

(4),(1) und (6) $\Rightarrow$ Becker trägt keine Krawatte.
(3) $\Rightarrow$ Kurt heißt Becker.
(2),(5) $\Rightarrow$ Jörn heißt nicht Fischer. Daher muss Jörn Schneider heißen.
Die Skatspieler heißen also Kurt Becker, Jörn Schneider und Hans Fischer.

**Lösung 108-56**




In der Zeichnung sind 4 Dreiecke grau markiert, wobei flächengleiche Dreiecke gleichfarbig markiert sind: $\triangle AJE$ und $\triangle AEF$ sind als Diagonalendreiecke im Parallelogramm $AJEF$ kongruent, $\triangle EGC$ und $\triangle ECH$ sind als Diagonalendreiecke im Parallelogramm $EGCH$ kongruent. Ferner sind die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle ACD$ als Diagonalendreiecke im Parallelogramm $ABCD$ kongruent. Damit folgt die behauptete Flächengleichheit, da der Flächeninhalt des Parallelogramms $JBGE$ gleich der Differenz der Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle ABC$, $\triangle AJE$ und $\triangle EGC$ ist, der Flächeninhalt des Parallelogramms $FEHD$ gleich der Differenz der Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle ACD$, $\triangle AEF$ und $\triangle ECH$ ist.

# 6 Klassen 9 bis 13

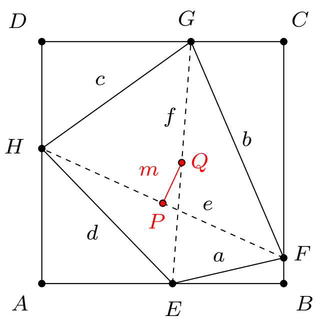
**Lösung 108-61**

**U.Warnecke, Münster** Beweis mittels eines Satzes von Euler
Von Leonhard Euler (1707 - 1783) stammt folgender

**Satz**: *Für ein beliebiges (konvexes) Viereck $ABCD$ in der Ebene (mit Normbezeichnungen) gilt*

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4m^2,$$

*wobei $m$ den Abstand der Mittelpunkte $P$ und $Q$ der beiden Diagonalen $AC$ und $BD$ bedeuten soll. Genau dann, wenn $m = 0$ ist, fallen die Mittelpunkte zusammen, so dass die Diagonalen sich einander halbieren und das Viereck ein Parallelogramm ist.*




Im vorliegenden Fall soll das Viereck mit den Seitenlängen $a, b, c, d$ dem Einheitsquadrat $ABCD$ einbeschrieben sein; daher gilt zunächst für die Diagonallängen des Vierecks sowie für den Abstand $m$ der Mittelpunkte $P$ und $Q$ der beiden Diagonalen:

$$1 \leq e < \sqrt{2}; \quad 1 \leq f < \sqrt{2}; \quad 0 \leq m < \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Nun sind wegen des Zusammenspiels zwischen diesen drei Längen $e, f$ und $m$ einige Fälle zu unterscheiden: $e, f, m$ minimal oder $e, f, m$ maximal. Auch zwei „dazwischen" liegende Sonderfälle werden betrachtet.

*Erster Fall*: Die Eckpunkte des Vierecks $EFGH$ seien die Mittelpunkte der Seiten des Quadrates $ABCD$ (vgl. Figur). Dann stehen $EG$ und $FH$ aufeinander senkrecht, und die Mittelpunkte $P$ und $Q$ dieser Diagonalen fallen zusammen, so dass $e = f = 1$ und $m = 0$ und damit

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4m^2 = 1 + 1 + 0 = 2.$$

Also ist nach der Eingangsfeststellung 2 der kleinste Wert, den die Summe $a^2+b^2+c^2+d^2$ annehmen kann.

*Zweiter Fall*: Wird die Diagonale $EG$ parallel zu $BC$ oder die Diagonale $FH$ parallel zu $AB$ oder werden beide wie angegeben verschoben, so bleibt $e = f = 1$, aber für den Abstand der Mittelpunkte der beiden Diagonalen gilt jetzt $0 < m < \frac{1}{2}\sqrt{2}$, so dass nun gilt:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4m^2 < 1 + 1 + 2 = 4.$$

*Dritter Fall*: Die Diagonalen des Vierecks $EFGH$ fallen mit den Diagonalen des Quadrates $ABCD$ zusammen, stehen also auch jetzt senkrecht aufeinander, so dass $e = f = \sqrt{2}$ und $m = 0$ gilt und damit

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4m^2 = 2 + 2 + 0 = 4.$$

Dieser Fall stellt aber einen *Entartungsfall* dar, da die Eckpunkte des Vierecks $EFGH$ *innere* Punkte der Seiten des Quadrates $ABCD$ sein sollen und daher $e < \sqrt{2}$ und $f < \sqrt{2}$ sowie $m \approx 0$„ sein muss, so dass jedenfalls gilt:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4m^2 \leq 4$$

*Vierter Fall*: Die Diagonale $FH$ liege parallel zur Quadratseite $AB$ und werde zu dieser hin verschoben; der Punkt $E$ werde auf $B$ zubewegt und der Punkt $G$ zugleich auf $D$ zubewegt. Dadurch wird der Abstand der Mittelpunkte der Diagonalen vergrößert, d. h. dann: $e = 1$, $f$ konvergiert gegen $\sqrt{2}$ und $m$ infolgedessen gegen $\frac{1}{2}$, so dass auch jetzt gilt:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4m^2 < 1 + 2 + 1 < 4.$$

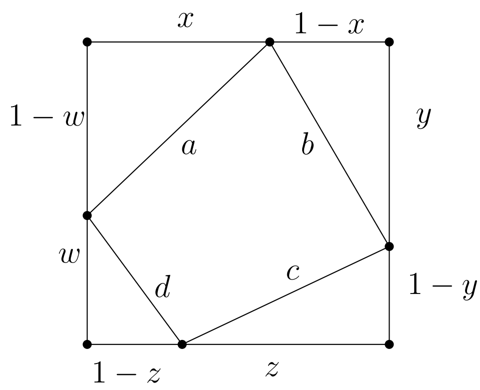
Damit sind bis auf symmetrisch gelagerte Fälle alle Möglichkeiten erfasst, womit die Behauptung

$$2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4m^2 \leq 4$$

bewiesen ist.

**U.Willrett, Zeichnung U.Warnecke (Bezeichnungen angepasst):**

$$a^2 = x^2 + (1-w)^2$$
$$b^2 = y^2 + (1-x)^2$$
$$c^2 = z^2 + (1-y)^2$$
$$d^2 = w^2 + (1-z)^2$$




$$0 \leq x, y, z, w \leq 1$$

$$P := a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2 + w^2) - 4 + 2(x + y + z + w)$$

Da $x^2 \leq x$, $y^2 \leq y$, $z^2 \leq z$, $w^2 \leq w$ ist, gilt

$$2(x^2 + y^2 + z^2 + w^2) - 2(x + y + z + w) \leq 0 \tag{1}$$

Daraus folgt $P \leq 4$. $P = 4$ gilt für $x = y = z = w = 0$ oder $x = y = z = w = 1$. In diesem Fall sind das Viereck und das Quadrat kongruent.

Nun wird der Minimalwert von $P$ berechnet. Der Minimalwert ist erreicht, wenn in (1)

$$(x^2 - x) + (y^2 - y) + (z^2 - z) + (w^2 - w)$$

minimal wird. Da alle Summanden die gleiche Form haben, genügt die Betrachtung für

$$f(x) = x^2 - x$$

Dann sind die Ableitungen

$$f(x)' = 2x - 1$$

und

$$f(x)'' = 2 > 0$$

Für $x = 1/2$ ist $f(x)$ minimal. Entsprechend gilt, für $x = y = z = w = 1/2$ ist $P$ minimal. D.h.

$$P \geq 2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + 4 - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 2$$

**Lösung 108-62**

**Astrid Franz und Leon Bannöhr**

Diese Behauptung kann man durch vollständige Induktion beweisen.

Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt $1^3 = 1^2$, damit ist die Behauptung für $n = 1$ offensichtlich erfüllt.

Induktionsvoraussetzung: Es gelte $1^3+2^3+\ldots+n^3 = (1+2+\ldots+n)^2$ für eine natürliche Zahl $n$.

Induktionsbehauptung: Dann gilt auch

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = (1 + 2 + \ldots + n + (n+1))^2.$$

Induktionsbeweis: Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 &= (1 + 2 + \ldots + n)^2 + (n+1)^3 \\
&= \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2 + (n+1)^3 \\
&= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 + (n+1)^3 \\
&= (n+1)^2\left(\frac{1}{4}n^2 + (n+1)\right) \\
&= \frac{1}{4}(n+1)^2\left(n^2 + 4(n+1)\right) \\
&= \frac{1}{4}(n+1)^2\left(n^2 + 4n + 4\right) \\
&= \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2 \\
&= \left(\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\right)^2 \\
&= (1 + 2 + \ldots + n + (n+1))^2\,,
\end{aligned}$$

damit ist die Induktionsbehauptung bewiesen.

Also gilt $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$ für alle natürlichen Zahlen $n$, w.z.b.w.

**U.Warnecke:**

1. Herleitung der Gleichheit durch Bildung der Teilsummenfolge:

$$\begin{aligned}
1^3 &= 1 = 1^2 \\
1^3 + 2^3 &= 1 + 8 = 3^2 = (1+2)^2 \\
1^3 + 2^3 + 3^3 &= 1 + 8 + 27 = 6^2 = (1+2+3)^2 \\
1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 &= 1 + 8 + 27 + 64 = 10^2 = (1+2+3+4)^2
\end{aligned}$$

.......................................................................................................................................

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = 1 + 8 + 27 \ldots + n^3 = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$$

2. direkter Beweis. Als bekannt wird vorausgesetzt, dass Kubikzahlen haben folgende Eigenschaften haben:

$$1^3 = 1; \quad 2^3 = 3{+}5; \quad 3^3 = 7{+}9{+}11; \quad 4^3 = 13{+}15{+}17{+}19; \quad \ldots; \quad n^3 = \sum_{i=\frac{1}{2}(n-1)n+1}^{\frac{1}{2}n(n+1)} (2i{-}1).$$

Damit lässt sich die Behauptung direkt beweisen:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} i^3 &= \sum_{j=1}^{\frac{1}{2}n(n+1)} (2j-1) = 2 \cdot \sum_{j=1}^{\frac{1}{2}n(n+1)} j \; - \sum_{j=1}^{\frac{1}{2}n(n+1)} 1 \\
&= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} n(n+1) \cdot \left(\frac{1}{2} n(n+1) + 1\right) - \frac{1}{2} n(n+1) \\
&= \left(\frac{1}{2} n(n+1)\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 .
\end{aligned}$$

**Lösung 108-63**

Die Zahl kann im Dezimalsystem geschrieben werden in der Form

$$z = \sum_{i=0}^{n} 10^{2i} \cdot a_i \quad \text{mit} \quad a_i \in \{0; 1; 2; \ldots; 99\} \text{ für } \; 1 \le i \le n \text{ und } \; n \in \mathbb{N}.$$

Die Paarquersumme ist dann $p = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i$. Bildet man nun die Differenz $z - p$ und benutzt die Faktorisierung $10^{2i} - 1 = (10+1) \cdot \sum\limits_{k=0}^{2i-1} (-1)^{k+1} \cdot 10^k$, so erhält man

$$z - p = \sum_{i=0}^{n} 10^{2i} \cdot a_i - \sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} (10^{2i} - 1) \cdot a_i = 11 \cdot \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{k=0}^{2i-1} (-1)^{k+1} \cdot 10^k \right) \cdot a_i .$$

Hieraus folgt die Teilbarkeit von $p$ durch 11, falls $z$ durch 11 teilbar ist, und umgekehrt die Teilbarkeit von $z$ durch 11, falls $p$ durch 11 teilbar ist, q. e. d.

**Hinweis**

Wendet man das oben zitierte Teilbarkeitskriterium eventuell mehrfach auf die durch die Paarquersumme gelieferte Zahl als jeweils neu vorgelegte Zahl an, so bleibt am Ende eine Zahl, der man sofort ansehen kann, ob sie durch 11 teilbar ist oder nicht.

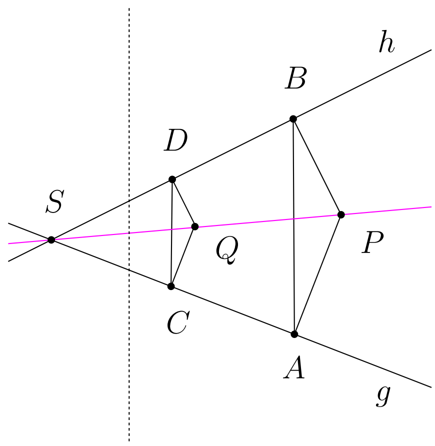
Außerdem entnimmt man dem obigen Beweis, dass eine vorgelegte Zahl und ihre Paarquersumme stets kongruent modulo 11 sind, d. h. bei Teilung durch 11 hinterlassen sowohl die Zahl als auch ihre Paarquersumme den gleichen Rest.

**Lösung 108-64**

**U.Warnecke:**

*Konstruktionsbeschreibung*

1. Fälle die Lote von $P$ auf $g$ und $h$; die Lotfußpunkte seien $A(\in g)$ bzw. $B(\in h)$.
2. Verbinde $A$ mit $B$; es entsteht das Dreieck $APB$.
3. Zeichne eine Parallele zu $AB$, die nicht durch $P$ verläuft; sie schneidet $g$ im Punkt $C$ und $h$ im Punkt $D$.
4. Zeichne die Parallele zu $AP$ durch $C$ und die Parallele zu $BP$ durch $D$; die Parallelen schneiden sich im Punkt $Q$; es entsteht das Dreieck $CQD$.
5. Zeichne die Verbindungsgerade durch $P$ und $Q$; sie verläuft durch den außerhalb des Zeichenblattes gelegenen Schnittpunkt $S$ von $g$ und $h$.




*Begründung der Konstruktion*

Die Dreiecke $APB$ und $CQD$ sind ähnlich, da sie nach Konstruktion in allen drei Innenwinkeln übereinstimmen.

Wegen $AB \| CD;\ A, C \in g;\ B, D \in h$ gehen die Dreiecke $APB$ und $CQD$ durch zentrische Streckung (oder Stauchung je nach Lage von $Q$ relativ zu $P$) mit dem Streckzentrum $S$ auseinander hervor. Daher verläuft auch der „Streckungsstrahl“ $(PQ)$ durch $S$.

**Lösung 108-65**

Die gesuchte Zahl $z$ ist nach Voraussetzung nicht kleiner als 1000. Wir schreiben $z$ als $1000 \cdot a + b$ mit natürlichen Zahlen $a > 0$ und $0 \leq b \leq 999$. Es gilt

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{1000 \cdot a + b} &= a \\ 1000 \cdot a + b &= a^3 \\ a(a^2 - 1000) &= b \end{aligned}$$

Daher ist

$$0 \leq a(a^2 - 1000) \leq 1000$$

Daraus folgt

$$31 < a < 33$$

D.h. $a = 32$ bzw. $1000 \cdot a + b = a^3 = 32768$. Die gesuchte Zahl z ist gleich 32768.

**Lösung 108-66**

Wären die Aussagen 3 von Klaus und Horst wahr, dann würden mindestens 2 Personen nur wahre Aussagen machen. Daher können beide nicht diejenigen sein, die nur wahre Aussagen machen. Folglich ist Günter derjenige, der nur wahre Aussagen macht. Seine Aussage 3 ist dann offensichtlich wahr. Es bleibt zu prüfen, ob die Richtigkeit von Günters Aussage 2 konsistent mit den Bedingungen der Aufgabe ist. Demnach muss Klaus derjenige sein, der nur falsche Aussagen macht.

Unter der Annahme, dass Günters Aussagen alle wahr sind, sind Klaus Aussagen 1 und 2 falsch. Seine Aussage 3 ist genau dann falsch, wenn Horst mindestens eine wahre und mindestens eine falsche Aussage gemacht hat. Das trifft auf Horsts Aussagen 1 und 2 zu: Aussage 1 ist wahr, da sie Klaus (falscher) Aussage 2 widerspricht. Horsts Aussage 2 ist falsch, da sie Günters (wahrer) Aussage 1 widerspricht. Also ist Klaus Aussage 3 falsch und Günters Aussage 2 wahr.

**Ergebnis:** Klaus macht nur falsche Aussagen, Horst macht sowohl wahre als auch falsche Aussagen, Günter macht nur wahre Aussagen und Weg c führt in die Stadt.