1 Vorschule

Lösung 109-11

Teil 1: 4 Gleise

Teil 2: 4 Weichen

Lösung 109-12

Eine Uhr.

Lösung 109-13

Anna hat jetzt 3 Stifte mehr als vorher.

Lösung 109-14

Das Papier hat dann 3 Löcher.

2 Klassen 1 und 2

Lösung 109-21

9

Lösung 109-22

Man kann diese Aufgabe durch Probieren lösen:

Wenn 1 Mädchen 1 Muffin kaufen würde, würde ein Junge 2 Muffins kaufen. Das wären dann insgesamt 13 Muffins (7 kaufen die Mädchen, 6 die Jungen)

Wenn man an dieser Stelle bemerkt, dass $39 = 13 + 13 + 13$ ist, stellt man fest, dass es aufgehen wird, wenn jedes Mädchen 3 Muffins kauft und damit jeder Junge 6 Muffins:

Tatsächlich kaufen die Mädchen dann insgesamt 21 Muffins, die Jungen 18. Das ergibt zusammen 39

Wenn die Mädchen mehr als 3 Muffins kaufen, wird die Gesamtzahl an Muffins noch größer. Es gibt also nur eine Möglichkeit:

Jedes Mädchen kauft 3 Muffins, jeder Junge kauft 6 Muffins.

Lösung 109-23

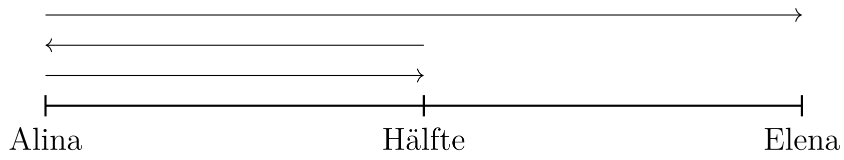
Eine Elster kann $9 \cdot 3 = 27$ Jahre alt werden, eine Krähe $27 + 13 = 40$ Jahre.

Lösung 109-24

Antwort: Julia ist 12 cm kleiner als Sarah und 7 cm größer als Maike.

Begründung:
1 m und 36 cm $+ 7$ cm $= 1$ m und 43 cm.
1 m und 55 cm $- 12$ cm $= 1$ m und 43 cm.

Lösung 109-25



Für den Weg zur Hälfte und zurück braucht Alina 20 zusätzliche Minuten. Daher braucht sie 10 Minuten für die erste Hälfte und 10 Minuten für die zweite Hälfte des Weges bis zu Elena.

Der Weg von Alina zu Elena dauert 20 Minunten.

Lösung 109-26

Er bezahlt $10 \cdot 1{,}20$ € $= 12$ € für die Hähne und $40 \cdot 0{,}5$ € $= 20$ € für die Hennen. Insgesamt bezahlt er also 32 € .

Lösung 109-27

a und f, b und l, c und h, d und m, e und i, g und k

Lösung 109-28

$$\begin{aligned} 1+1 &= 2\\ 2+2 &= 4\\ 3+3 &= 6\\ 4+4 &= 8\\ 5+5 &= 10\\ 6+6 &= 12\\ 7+7 &= 14\\ 8+8 &= 16\\ 9+9 &= 18\\ 10+10 &= 20 \end{aligned}$$

Links sieht man die Zahlenreihe, rechts die Zweierreihe.

3 Klassen 3 und 4

Lösung 109-31

Man kann sich den Kreis mit 10 Jungen auch als Zehneck vorstellen, wobei die Jungen die Ecken bilden. Das Zehneck hat 10 Seiten. Auf die Mitte jeder Seite stellt sich ein Mädchen. Es entsteht ein 20-Eck mit 20 Kindern als Ecken. Auf die Mitte jeder der 20 Seiten stellt sich ein Erwachsener. Das sind zusammen 40 Menschen.

Lösung 109-32

Eva	Benny
Carola	Fabian
Daniel	Anne

Lösung 109-33

	Weg	Zeit
mit Auto	10 km	15 min
Wartezeit Zug	0 km	12 min
Wartezeit Bus	0 km	23 min
mit Bus	16 km	35 min
Zwischenstand ohne Zug	26 km	1h 25 min
Gesamtzeit		3h 55 min
mit Zug	**(2)** 250 km	**(1)** 3h 55min $-$ 1h 25min $=$ 2h 30min
insgesamt	**(3)** $(26+250)$km $=$ 276km	3h 55 min

a) Die Zugfahrt dauerte 2h 30min (= 150 min).

b) Insgesamt fuhr Jan 276km.

Lösung 109-34

Bei a) ja, bei b) nein.

Lösung 109-35

$$\begin{aligned} 77 : 7 &= 11 \text{ elf, also Emil} \\ (25-6)\cdot 3 &= 57 \text{ siebenundfünfzig, also Susan} \\ 88 : 2 - 39 + 7 &= 12 \text{ zwölf, also Zähnchen} \\ (12+100-46) : 2 &= 33 \text{ dreiunddreißig, also Dattel} \\ 5\cdot 5 + 29 &= 54 \text{ vierundfünfzig, also Viktor} \\ (100+20-90) : 5 - 1 &= 5 \text{ fünf, also Felix} \\ 800 : 1 &= 800 \text{ achthundert, also Ahörnchen} \end{aligned}$$

Jeder Biber trägt das Schild, dessen Ergebniszahlwort mit dem gleichen Buchstaben beginnt, wie sein Name.

Lösung 109-36

Insgesamt muss Marie $1+2+3+4 = 10$ Kerzen anzünden. Da $10 = 4+4+2$ ist, reichen 4 Kerzen nicht aus, weil 2 der Kerzen dann dreimal brennen würden. Aber 5 Kerzen reichen wegen $10 = 5+5$. Jede Kerze kann Marie genau zweimal anzünden: Wenn diese mit 1, 2, 3, 4 und 5 numeriert sind, dann könnte sie so vorgehen:

1. Advent Kerze 1

2. Advent Kerze 2 und Kerze 3

3. Advent Kerze 1, Kerze 4 und Kerze 5

4. Advent Kerze 2, Kerze 3, Kerze 4 und Kerze 5

Auf diese Weise brennt jede Kerze genau zweimal. Man darf die Kerzen natürlich jedes Mal nur so lange brennen lassen, dass nach einem Advent höchstens die Hälfte jeder Kerze heruntergebrannt ist.

Lösung 109-37

a) Wir betrachten nicht die Streichhölzer, sondern die Dreiecke, die jeweils aus 3 Streichhölzern bestehen. Die erste Figur besteht aus einem Dreieck, die zweite aus $1+2$, die dritte aus $1+2+3$, die vierte würde aus $1+2+3+4$ bestehen.

Das heißt, dass die Figur aus dieser Reihe mit der Nummer n aus $1+\ldots+n$ Dreiecken besteht. Die Anzahl der benötigten Dreiecke beträgt

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

Die Anzahl der benötigten Streichhölzer ist das Dreifache davon:

$$3\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

b) Für die 30-te Figur wird man insgesamt

$$3 \cdot \frac{30 \cdot 31}{2} = 3 \cdot 15 \cdot 31 = 1395$$

Streichhölzer brauchen.

Lösung 109-38

Der Affe muss in Rchtung A drehen.

4 Klassen 5 und 6

Lösung 109-41

Eine natürliche Zahl ist durch 12 teilbar, genau dann, wenn sie durch 4 und durch 3 teilbar ist.

Eine Zahl ist durch 4 teilbar, genau dann wenn die aus den beiden letzten Ziffern gebildete 2stellige Zahl durch 4 teilbar ist. Für die Ziffer b kommen daher die 0, die 4 und die 8 in Frage.

Eine Zahl ist durch 3 teilbar, genau dann, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist. Als Quersummen erhält man für $b = 0, 4, 8$

$$a + 1, a + 5, a + 9$$

Daraus ergeben sich folgende Möglichkeiten:

b	$a + b + 1 \in$	$a \in$	Zahlen
0	$\{3, 6, 9\}$	$\{2, 5, 8\}$	2100, 5100, 8100
4	$\{6, 9, 12\}$	$\{1, 4, 7\}$	1104, 4104, 7104
8	$\{12, 15, 18\}$	$\{3, 6, 9\}$	3108, 6108, 9108

Lösung 109-42

Seien g der Preis für eine große Murmel in € , k der Preis für eine kleine Murmel in€ , dann gilt

$$\begin{aligned} 5g + 3k &= 6,26 \\ 3g + 5k &= 5,10 \end{aligned}$$

Der Preisunterschied zwischen 2 großen und 2 kleinen Murmeln beträgt $6,26$ € $-5,10$ € $=$ $1,16$ € . Der Preisunterschied zwischen 1 großen und 1 kleinen Murmeln beträgt $6,26$ € $-$ $5,10$ € $= 0,58$ € . Es gilt also

$$\begin{aligned} 1k + 0,58 &= 1g \\ 3k + 1,74 &= 3g \end{aligned}$$

Ich ersetze also $3g$ durch $3k+1,74$ und löse nach k auf. Eine kleine Murmel kostet 0,42€ , eine große 1€ .

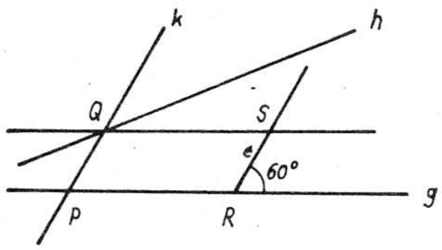
Probe: Johannes bezahlt $5 \cdot 1$ € $+ 3 \cdot 0,42$ € $= 6,26$ € und Niklas $3 \cdot 1$ € $+ 5 \cdot 0,42$ € $=$ $5,10$ € .

Lösung 109-43

Heute ist Mittwoch.

Begründung: Die Anzahl n der Tische, die Paul herstellen soll, muss durch 3 und durch 5 teilbar sein. Dies gilt zuerst für $n = 15$. Wegen $15 = 3 \cdot 5$ ist heute der vierte Tag vor Sonntag bzw. der zweite Tag vor Freitag. Beides ist gleich Mittwoch. Die Anzahl Tische kann nicht größer als 15 sein, da anderenfalls eine Woche überschritten würde.

Lösung 109-44



In einem beliebigen Punkt R der Geraden g zeichnen wir einen Winkel der Größe 60° und bezeichnen den Schnittpunkt des Kreises um Q mit Radius 3 cm und dem freien Schenkel des Winkels mit S. Wir konstruieren die Parallele zu g durch S und bezeichnen den Schnittpunkt der Parallelen mit der Geraden h mit Q. (Da g und h nicht parallel sind, existiert dieser Schnittpunkt). Wir konstruieren nun die Parallele zur Strecke $\overline{RS}$ durch den Punkt Q und bezeichnen den Schnittpunkt dieser Parallelen mit der Geraden g mit P. Er existiert, da g und h nicht parallel sind. Die Gerade durch die Punkte P und Q ist die gesuchte Gerade k, denn da sie parallel zu $\overline{RS}$ ist, schließt sie mit g den Winkel 60° ein und da QS und PR parallel sind, beträgt die Länge der Strecke $\overline{PQ}$ 3 cm.

Lösung 109-45

a) Die Differenz zwischen aufeinanderfolgenden Folgengliedern wird jeweils verdoppelt:

$$2, 3, 5, 9, \ldots, 33$$

$$+1, +2, +4, +8(= 17), +16$$

Daher heißt die fehlende Zahl $17 = 9 + 8$.

b) **Lösung von Frederike Jordan, 10 Jahre, Klasse 5:** Die Zahlen vergrößern sich im Wechsel um die nächsthöhere Potenz von 2 und um die nächsthöhere Zahl beginnend mit der 4:

$$1, 5, 6, 11, 13, 19, 23, 30, 38$$

$$+4, +2^0, +5, +2^1, +6, +2^2, +7, +2^3$$

Lösung 109-46

Oma trinkt mehr Kaffee:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$$

Oma trinkt insgesamt 1 Tasse. Davon ist 1/2 Tasse reiner Kaffee und der Kaffee-Anteil in der gemischten Hälfte ist größer 0.

Lösung 109-47

Wir bezeichnen mit s die Anzahl der Sterne, mit w die Anzahl der Weihnachtsbäume und mit g die Anzahl der Glocken. Laut Aufgabe gilt

$$s+g+w=30 \tag{1}$$

$$4g<w<5g \tag{2}$$

$$s<g<w \tag{3}$$

Wegen (1) ist $g<6$, wegen (2) ist $g>1$. Wir untersuchen also für $1<g<6$ die möglichen Lösungen s und w. In der Tabelle wurden die Zahlen in Spalte 1 zuletzt ermittelt, aber die Reihenfolge wurde so gewählt, dass man leichter die Bedingung (3) überprüfen kann.

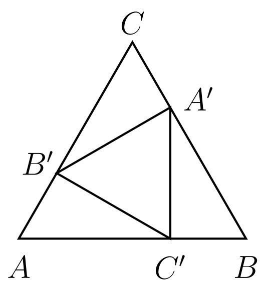
s	**g**	**4g**	**5g**	**w**
9	2	8	10	9
14, 13	3	12	15	13, 14
9, 8, 7	4	16	20	17, 18, 19
4, 3, 2, 1	5	20	25	21, 22, 23, 24

Nur in Zeile 4 ist (3) erfüllt. Daher hat Marie 5 Glocken gebacken.

Die Anzahlen der Sterne und Weihnachtsbäume lassen sich aus den Bedingungen der Aufgabe nicht ermitteln. Ihre Summe ist aber 25.

Lösung 109-48

Nach Voraussetzung sind AC', BA' und CB' gleich lang. Da $\triangle ABC$ gleichseitig ist, sind folglich auch $C'B$, $A'C$ und $B'A$ gleich lang. Die Winkel an den Eckpunkten A, B und C sind gleich groß. Damit sind die Dreiecke $\triangle AC'B'$, $\triangle C'BA'$ und $\triangle A'CB'$ kongruent woraus folgt, dass $\triangle A'B'C'$ gleichseitig ist.



5 Klassen 7 und 8

Lösung 109-51

Da a durch 9 teilbar ist, sind es auch b und c. Außerdem sind b und c von Null verschieden. Wegen $9 \cdot 2018 = 18162$ ist b höchstens 5stellig. Die Quersumme von b ist höchstens $9 \cdot 5 = 45$. c kann also nur 9, 18, 27, 36 oder 45 sein. Damit ist die Quersumme von c gleich 9.

Lösung 109-52

X stehe für „X ist unschuldig“, $X \in \{P; Q; R\}$. $\neg X$ bedeutet dann: X ist Täter. Wer von den drei Verdächtigen der Täter ist, kann jetzt mittels Wahrheitstafel gefunden werden, nachdem die Erkenntnisse des Kommissars in eine aussagenlogische Formulierung übersetzt worden sind (die vollständige Ausfüllung der Wertetafel sei dem Leser überlassen; w steht für „wahr“, f für „falsch“):

P	Q	R	$\big(((P \vee Q) \to R) \wedge ((\neg Q \vee R) \to P)\big) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee \neg R)$
w	w	w	f
w	w	f	f
w	f	w	w
w	f	f	f
f	w	w	f
f	w	f	f
f	f	w	f
f	f	f	f

Nur die dritte Zeile im Tafelinnern liefert w für die Aussage, nämlich wenn P und R wahr sind und Q falsch ist, und das heißt: P und R sind unschuldig, und Q war der Täter. Diese Aussage lässt sich aussagenlogisch so formulieren: $P \wedge \neg Q \wedge R$, die damit als logisch äquivalent zu der ursprünglichen Formulierung erkannt ist. (Das kann man direkt mittels aussagenlogischer Umformungsregeln nachweisen.)

Lösung 109-53

Die Elemente der Zahlenfolge kann man so schreiben:

$$a_0 = 0 \cdot n + 1, a_1 = 2 \cdot n + 1, a_2 = 4 \cdot n + 1, a_3 = 6 \cdot n + 1 \ldots$$

Der Koeffizien vor dem n durchläuft von 0 an alle geraden Zahlen. Damit lässt sich das $n$te Element schreiben als

$$a_n = 2(n+1)n + 1, n = 0, 1, \ldots$$

Lösung 109-54

Es sei $r \neq -1$ eine reelle Zahl. Dann gilt

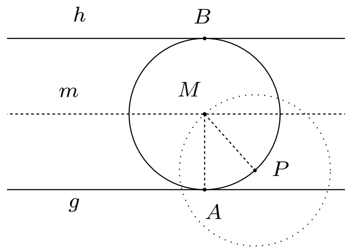
$$\frac{(r+r)+(r-r)+(r\cdot r)+(r:r)}{r+1} = \frac{r^2+2r+1}{r+1} = \frac{(r+1)^2}{(r+1)} = r+1$$

Damit gilt die Gleichung für alle reellen Zahlen außer -1 und folglich auch für 2018.

Lösung 109-55

U. Warnecke

Zu g und h konstruiere man die Mittelparallele m; ihr Abstand von g und h betrage jeweils d.
Um den Punkt P zeichne man den Kreis mit dem Radius d; er schneidet m im Punkt M und einem weiteren Punkt, der außer Betracht bleiben kann.
Um M zeichne man den Kreis mit dem Radius d; er berührt die Parallele g im Punkt A und die Parallele h im Punkt B, und jetzt ist $|PM| = |AM| = d$.



Lösung 109-56

Zucker: 750g und 462g

Kalk: 27g und 17g

6 Klassen 9 bis 13

Lösung 109-61

U.Willrett

$$f_0(x) = \frac{1}{1-x}$$
$$f_1(x) = \frac{1}{1-f_0(x)} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{1-x}{-x} = \frac{x-1}{x}$$
$$f_2(x) = \frac{1}{1-f_1(x)} = \frac{1}{1-\frac{x-1}{x}} = x$$
$$f_3(x) = \frac{1}{1-f_2(x)} = \frac{1}{1-x} = f_0(x)$$

Allgemein gilt für $m \in \mathbb{N}_0$

$$f_{3m}(x) = \frac{1}{1-x}, \quad f_{3m+1}(x) = \frac{x-1}{x}, \quad f_{3m+2}(x) = x$$

Da 2017 bei Division durch 3 den Rest 1 hat, gilt

$$f_{2017}(x) = \frac{x-1}{x}$$

und damit

$$f_{2017}(2017) = \frac{2016}{2017}$$

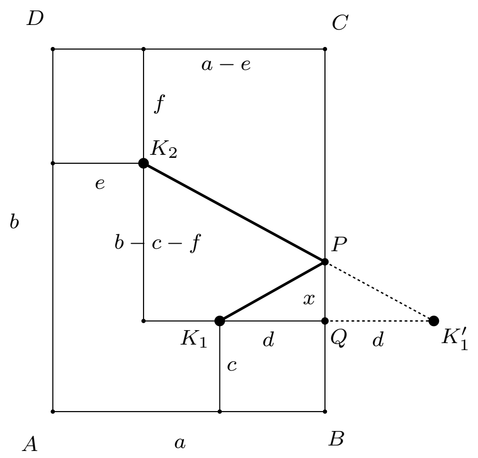
Lösung 109-62

$\sqrt{2}$ ist eine irrationale, d.h. eine nicht abbrechende, nicht periodische Dezimalzahl. Aus den Ziffern $0, 1, \ldots, 9$ lassen sich aber nur endlich viele verschiedene 2017-ziffrige Blöcke aufstellen. Es gibt also sicher einen dieser 2017-ziffrigen Blöcke, der unendlich oft vorkommt.

Bemerkung: man kann keine Aussage machen, welcher 2017-ziffrige Block unendlich oft vorkommt.

Lösung 109-63

U.Warnecke



a) Nach dem Reflexionsgesetz gilt: Einfalls- und Ausfallswinkel sind gleich weit. Außerdem gilt (in der Optik): Das Spiegelbild eines Punktes erscheint ebenso weit hinter dem Spiegel wie der Punkt vor dem Spiegel. Daher werde der Punkt K_1 an der Rechteckseite BC gespiegelt; der Bildpunkt sei K_1'. Die Verbindungsstrecke K_1K_1' schneidet BC im Punkt Q; die Verbindungsstrecke K_2K_1' schneidet BC im Punkt P. Trifft die Kugel K_1 die Bande im Punkt P, so wird sie dort abprallen und auf die Kugel K_2 treffen.

b) Sei $x = |PQ|$ (vgl. Fig.). Nach dem zweiten Strahlensatz gilt

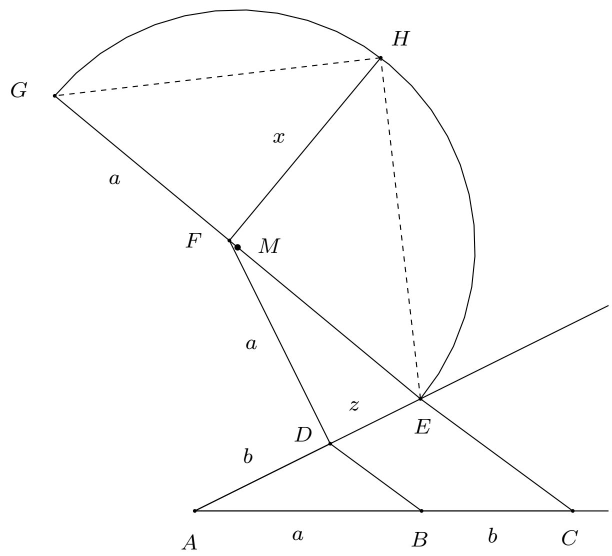
$$\frac{x}{b-c-f} = \frac{d}{a-e+d}$$
$$x = \frac{(b-c-f)d}{a-e+d}$$

und damit

$$|BP| = c + x = c + \frac{(b-c-f)d}{a-e+d} = \frac{ac - ce + cd + bd - cd - df}{a-e+d} = \frac{(a-e)c + (b-f)d}{a-e+d}.$$

Lösung 109-64

U.Warnecke



Zunächst muss die gegebene Gleichung in eine geometrisch interpretierbare Form gebracht werden. Quadrieren und weitere Umformung liefert

$$x^2 = \sqrt{a^4+b^4} = \sqrt{a^2\left(a^2+(\frac{b^2}{a})^2\right)} = a\sqrt{a^2+(\frac{b^2}{a})^2}.$$

Setzt man $z = \frac{b^2}{a}$, kann man dies umschreiben in $\frac{z}{b} = \frac{b}{a}$, und nach dem ersten Strahlensatz ist damit die Strecke DE mit $|DE| = z$ konstruierbar (vgl. nebenstehende Figur).
Über DE kann sodann das rechtwinklige Dreieck DEF mit den Katheten DE und DF sowie der Hypotenuse EF konstruiert werden, wobei $|DE| = z, |DF| = a$ und $|EF| = \sqrt{a^2+z^2}$ ist.
Auf der Verlängerung von EF über F hinaus wird im Abstand a von F der Punkt G fixiert, so dass $|FG| = a$ und $|EG| = a + \sqrt{a^2+z^2}$ ist.
Über EG wird der Thaleskreis errichtet und zu EG im Punkt F die Senkrechte; sie schneidet den Thaleskreis im Punkt H.

Nun ist FH die Höhe im rechtwinkligen Dreieck GEH, und EF und FG sind die Hypotenusenabschnitte; nach dem Höhensatz des Euklid gilt daher $|FH|^2 = x^2 = a\cdot\sqrt{a^2+(\frac{b^2}{a})^2}$, wegen $x > 0$ heißt das $x = \sqrt[4]{a^4+b^4}$.

Bemerkung. Man beachte, dass in der Zeichnung die Punkte F und M getrennt liegen; nur bei speziellen Vorgaben könnten sie zusammenfallen.

Lösung 109-65

U. Warnecke

a) Es ist zu beweisen, dass

$$\sqrt{10} - \sqrt{9} < \sqrt{9} - \sqrt{8} \tag{1}$$

gilt.
b) Es ist zu beweisen, dass für alle von Null verschiedenen natürlichen Zahlen n

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1} \tag{2}$$

gilt.

Lösung 109-65
Unter Beachtung, dass $0 \leq a < b \iff 0 \leq \sqrt{a} < \sqrt{b}$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$, gelten für alle

$n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ folgende Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}
1 - \frac{1}{n^2} &< 1 \\
1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} &< 2 \\
2 + 2\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} &< 4 \\
1 + \frac{1}{n} + 2\sqrt{(1 + \frac{1}{n})(1 - \frac{1}{n})} + 1 - \frac{1}{n} &< 4 \\
\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right)^2 &< 2^2 \\
\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}} &< 2 \\
\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} &< 2\sqrt{n} \\
\sqrt{n+1} - \sqrt{n} &< \sqrt{n} - \sqrt{n-1}
\end{aligned}$$

Da die obere dieser Gleichungen gilt, so also auch die untere. Damit ist die Gültigkeit von Gleichung (2) gezeigt. Für $n = 9$ folgt daraus sofort die Gültigkeit von Gleichung (1).

Lösung 109-66

Angenommen, die Bedingung (1) wäre erfüllt. Dann wäre aber auch eine der Bedingungen (3), (4) und (5) erfüllt, da für jede reelle Zahl mindestens eine dieser 3 Bedingungen erfüllt ist. Damit kann (1) nicht erfüllt sein, d.h. es gilt

$$x \leq -\frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ oder } x \geq \frac{1}{2}\sqrt{2} \tag{8}$$

Mit der gleichen Schlußweise sieht man, dass auch Bedinging (2) nicht erfüllt sein kann, d.h. es gilt

$$-\frac{1}{2}\sqrt{2} \leq x \leq \frac{1}{2}\sqrt{2} \tag{9}$$

Wenn es also reelle Zahlen x gibt, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllen, so sind dies

$$x = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \tag{10}$$

oder

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{2} \tag{11}$$

Im Fall (10) wären aber gelichzeitig (3) und (4) erfüllt. Bleibt also (11). Tatsächlich ist für diese Zahl x die Bedingung (4) wahr, alle anderen Bedingungen sind falsch.