1 Vorschule

Lösung 110-11

Caroline hatte $8 - 3 = 5$ Mädchen eingeladen.

Lösung 110-12

TIGER

Lösung 110-13

Ein Segelboot.

Lösung 110-14

4 Uhr oder 16 Uhr.

2 Klassen 1 und 2

Lösung 110-21

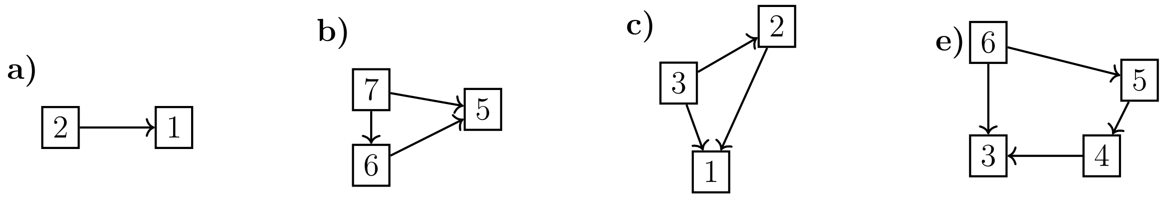
Es gibt genau 2 Paare, nämlich 0 und 0 sowie 2 und 2:

$$0 + 0 = 0 \cdot 0 = 0$$

$$2 + 2 = 2 \cdot 2 = 4$$

Lösung 110-22

d) hat keine Lösung. Bei den anderen Aufgaben gibt es auch immer mehrere Lösungen. Diese sind Beispiele.



Lösung 110-23

Aus 4 grünen Bausteinen kann Hans einen Würfel bauen, der genauso groß ist wie ein gelber Baustein. Daher braucht Hans

$$8 \cdot 4 = 32$$

grüne Bausteine, um einen genauso großen Würfel wie den zu bauen, den er aus 8 gelben gebaut hat.

Lösung 110-24

$$\begin{aligned} 1+1+1+7 &= 10 \\ 1+1+3+5 &= 10 \\ 1+3+3+3 &= 10 \end{aligned}$$

Lösung 110-25

Ilja jat 2 Krähen doppelt gezählt. Es waren also nur 9 Krähen auf dem Dach.

Lösung 110-26

In die untere Schachtel passen auch 10 Geldstücke, da 10 mm = 1 cm ist.

Lösung 110-27

Die Begriffe sind zunächst

$$BRETT, ZAUN, ZWEIG.$$

Daraus wird durch Weglassen bzw. Ersetzen der angegebenen Buchstaben

$$BR + AUN + SCHWEIG = BRAUNSCHWEIG$$

Die Lösung ist Braunschweig.

Lösung 110-28

Lösung von Kristen Holtze, 8 Jahre, Klasse 2:

Ich habe alle angegebenen Zahlen zusammengerechnet, das war dann 127, das ist genau 100 mehr als 27. Um 27 zu bekommen, muss man dann die Zahlen abziehen, die zusammen 50 ergeben, weil man sie ja gerade schon mal dazugerechnet hatte.

$$32 + 16 + 2 = 50$$

Also:

$$1 - 2 + 4 + 8 - 16 - 32 + 64 = 27$$

3 Klassen 3 und 4

Lösung 110-31

Eine Antwort lautet Abflug, weil 1-2-6-12-21-7 die Position einzelner Buchstaben im Alphabet sind.

Lösung 110-32

Spontan würde man wohl 11111 schreiben, doch das ist falsch. Richtig ist 12111; denn

$$11000 + 1100 + 11 = 12111$$

Lösung 110-33

Der Knopf E wird am häufigsten gedrückt, da alle Leute, die irgendwann hochfahren im Normalall auch wieder herunterfahren.

Lösung 110-34

Da $0 < n < 10$ ist, muss $2 \leq 5n - 3 \leq 42$ sein. Von den Zahlen zwischen 2 und 42 sind 6, 12, 18, 24, 30, 36 und 42 durch 6 teilbar. Es muss also $5n$ gleich 9, 15, 21, 27, 33, 39 oder 45 sein. Nur 15 und 45 sind Vielfache von 5. Es gibt genau 2 Zahlen, die beide Bedingungen zugleich erfüllen:

$$n = 3 \text{ und } n = 9$$

Tatsächlich liegen beide zwischen 0 und 10 und es gilt $3 \cdot 5 - 3 = 12 = 6 \cdot 2$ und $9 \cdot 5 - 2 = 42 = 6 \cdot 7$

Lösung 110-35

a)

75 g	0,45 kg	796 g	1,04 kg	5 kg 60 g

b)

6 kg 701g	5 kg 9 g	0,7 kg	0,1 kg	7 g

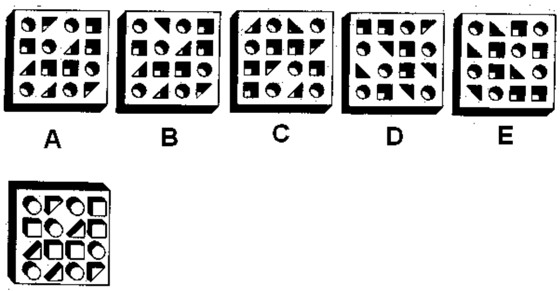
Lösung 110-36

a) Jede Mannschaft spielt zweimal gegen 19 andere Mannschaften. Das sind $2 \cdot 19 = 38$ Spiele.

b) Insgesamt sind das $20 \cdot 38 : 2 = 380$ Spiele.

Lösung 110-37

Wenn man das Werkstück um 90° im Uhrzeigersinn dreht, sieht man, dass es genau auf Stück A passt:



Lösung 110-38

Die Anzahl der Kinder in jeder Familie kürzen wir mit dem Anfangsbuchstaben des Nachnamen ab. Dann gilt

$$1 \leq L < M = K < S < R \leq 4$$

Hätte Familie Ludwig 2 Kinder, dann müsste Familie Richter 5 Kinder haben, damit der linke Teil der Ungleichung gilt. Dann wäre aber die letzte Ungleichung $R \leq 4$ verletzt. Daher kann Familie Ludwig nur 1 Kind haben. Die übrigen Anzahlen ergeben sich daraus wie folgt:

Familie Ludwig 1 Kind

Familie Müller 2 Kinder

Familie Kunz 2 Kinder

Familie Schulz 3 Kinder

Familie Richter 4 Kinder

4 Klassen 5 und 6

Lösung 110-41

1. Auf Platz 5 kann nur die Ziffer 5 stehen, da die 5-stellige Zahl durch 5 teilbar sein soll.
2. Da $1+2+\ldots+9=45$, ist die 9-stellige Zahl in *jedem* Fall durch 9 teilbar. Daher muss 9 auf Platz 9 stehen.
3. Die Ziffernsumme der ersten drei Ziffern muss durch 3 teilbar sein.
   (123; 129; 147; 183; 189; 321; 327; 369; 381; 387; 723; 729; 741; 783; 789; 921; 927; 963; 981; 987)
4. Die aus der 3. und 4. Ziffer bestehende Zahl muss nach Teilbarkeitsregel durch 4 teilbar sein.
   (12; 16; 32; 36; 72; 76; 92; 96)

5. An der 2., 4., 6. und 8. Stelle kann jeweils nur ein *gerade* Ziffer stehen.
6. Die auf dem 6., 7. und 8. Platz stehenden Ziffern müssen eine durch 8 teilbare Zahl ergeben.
Eine 9-stellige Zahl, die all diesen Bedingungen genügt, ist der Tabelle zu entnehmen:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
3	8	1	6	5	4	7	2	9

Lösung 110-42

Ja, z.B. so:

$$4 \to 17 \to 9 \to 1 \to 14 \to 6 \to 19 \to 11 \to 3 \to 16 \to 8 \to 0 \to 13 \to 5$$

Lösung 110-43

Zunächst ist $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{3}{4}=\frac{13}{8}$. Das bedeutet, dass $\frac{13}{8}$ jetzt einer Ganzheit entspricht, und diese ist dann $546 \cdot \frac{8}{13} = 336$. Damit findet man

$$\begin{aligned}
336 \cdot \frac{1}{3} &= 112 \quad \text{Junggesellen,}\\
336 \cdot \frac{1}{4} &= 84 \quad \text{Bürger,}\\
336 \cdot \frac{1}{6} &= 56 \quad \text{Adlige,}\\
336 \cdot \frac{1}{8} &= 42 \quad \text{Bauern,}\\
336 \cdot \frac{3}{4} &= 252 \quad \text{Mädchen,}
\end{aligned}$$

und die Anzahl aller Teilnehmer ist, wie vorgegeben, $112+84+56+42+252=546$.

Lösung 110-44

Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 36 teilbar, wenn sie durch 4 und durch 9 teilbar ist, also genau dann, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist und die Zehner- und die Einerstelle zusammen eine zweistellige durch 4 teilbare Zahl bilden. Wegen $2+4+8=14$ kommen als Quersumme nur noch 36, 27 oder 18 in Frage. Die fehlenden Ziffern müssen also so gewählt werden, dass ihre Summe gleich 22, 13 oder 4 ist und zwei dieser Ziffern eine durch 4 teilbare Zahl bilden:

Die größte Zahl wird man mit der größtmöglichen Quersumme erhalten, also mit 36. Die fehlenden 3 Zahlen müssen daher die Summe 22 haben. Die Zahl wird am größten, wenn zwischen der 4 und der 2 eine 9 steht. Es fehlen dann noch 2 Zahlen mit Summe 13, die eine durch 4 teilbare zweistellige Zahl bilden. Möglich sind 9 und 4, 8 und 5 sowie 7 und 6. Nur aus 7 und 6 lässt sich eine Zahl bilden, die durch 4 teibar ist: 76.

Die größtmögliche durch 36 teilbare Zahl ist die 492876.

Die kleinstmögliche Zahl wird auch die kleinste Summe haben, also 4. Die Zahl wird am kleinsten, wenn zwischen der 4 und der 2 eine 0 steht. Wegen $4 = 0 + 0 + 4$ bleiben für die beiden letzten Ziffern noch die 0 und die 4. Somit gilt:

$\boxed{\text{Die kleinstmögliche durch 36 teilbare Zahl ist die 402804.}}$

Lösung 110-45

Der mittelste Würfel wird entfernt und in jeder Säule noch einmal 4 Würfel. Das sind insgesamt 13 Würfel. Somit beträgt das Volumen $125 - 13 = 112$ Einerwürfel.

Der Oberflächeninhalt des Restkörpers setzt sich zusammen aus 6 Quadraten aus je 24 Einerquadraten und dem Oberflächeninhalt der Hülle eines dreidimensionalen Kreuzes aus 13 kleinen Würfeln. Der mittlere Würfel trägt nichts zum Oberflächeninhalt bei. Die restlichen 12 Würfel tragen je 4 kleine Quadrate zum Oberflächeninhalt des Restkörpers bei. Der Oberflächeninhalt beträgt also $6 \cdot 24 + 12 \cdot 4 = 12 \cdot 16 = 192$ Einerquadrate.

Lösung 110-46

250 Gramm:

Angenommen, in einem kg gemischter Johannisbeeren sind x g rote enthalten. Dann bleiben $(1 - x)$ g schwarze Johannesbeeren übrig und es gilt

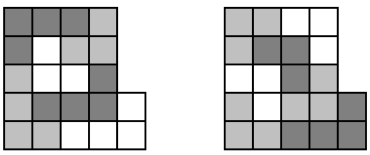
$$\begin{aligned} 2x + 6(1 - x) &= 3 \\ 4x &= 3 \\ x &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Damit sind 750g rote Johannesbeeren und 250g schwarze Johannesbeeren in einem kg gemischter Beeren enthalten.

Tatsächlich kosten die gemischten Beeren dann 3 Euro: $\frac{3}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 6 = \frac{12}{4} = 3$.

Lösung 110-47

Die große Figur besteht aus 22 kleinen Quadraten, die Figuren a) und b) aus 3 bzw. 4 kleinen Quadraten. Die Anzahl der Figuren a) muss daher gerade sein und kleiner als 8. Möglich sind also zunächst 0, 2, 4 oder 6 der Figuren a). Da die Anzahl der Figuren b) aber ganzzahlig sein muss, scheiden 0 und 4 aus. 2 und 6 sind also die einzig möglichen Anzahlen:



Lösung 110-48

1 Jahr sind 365 Tage oder $24 \cdot 365 = 8760$ Stunden oder $8760 \cdot 60 = 525600$ Minuten, also $525600 \cdot 60 = 31536000$ Sekunden. Daher entsprechen 10000000 Sekunden $10000000 : 31536000 \approx 0,3$ Jahre oder 115 Tage, 17 Stunden, 46 Minuten, 40 Sekunden.

5 Klassen 7 und 8

Lösung 110-51

Es ist genau dann möglich, wenn $n > 4$ und entweder n oder $n+1$ durch 3 teilbar ist.

Wegen

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

muss entweder n oder $n+1$ durch 3 teilbar sein.

Um zu zeigen, dass diese Bedingung auch hinreichend ist, zeigen wir konstruktiv, dass sich jede Anzahl n von Gewichten in 3 gleichschwere Gruppen einteilen lässt. Für $n \in \{5, 6, 8, 9\}$ kann man n Gewichte wie folgt gruppieren:

n	**Gruppe 1**	**Gruppe 2**	**Gruppe 3**
5	1,4	2,3	5
6	3,4	2,5	1,6
8	1,2,3,6	5,7	4,8
9	1,2,3,4,5	7,8	6,9

Jede weitere Anzahl n von Gewichten, die die oben genannte Bedingung erfüllen, kann man aus einer dieser 4 Anzahlen (5, 6, 8, 9) durch Addition einer Folge von 6 aufeinanderfolgenden Zahlen $a+1, \ldots, a+6$ erhalten, die sich in 3 Gruppen gleichen Gewichts

$$a + 1 \text{ und } a + 6, a + 2 \text{ und } a + 5, a + 3 \text{ und } a + 4$$

aufteilen lässt

Beispiel: n=11

$$1, 2, 3, 4, 5, (5 + 1) + (5 + 2) + (5 + 3) + (5 + 4) + (5 + 5) + (5 + 6)$$

(In diesem Fall ist $a = 5$). Die Aufteilung von $(1, 2, 3, 4, 5)$ entnimmt man der Tabelle, die 6 folgenden Gewichte verwandelt man wie oben angegeben in 3 gleichschwere Gruppen, die man den ersten 3 Gruppen hinzufügt.

Lösung 110-52

a_{2018} liegt in der gleichen Restklasse wie a_2 modulo 7. Der Rest ist folglich 2.

Lösung 110-53

Die als Beispiel genannten Zahlen lassen sich darstellen durch $abcabc$ mit Ziffern a, b, c und $a \neq 0$; sodann rechnet man

$$abcabc = abc \cdot 1000 + abc = abc(1000 + 1) = abc \cdot 1001 \quad \text{und} \quad 1001 = 13 \cdot 77.$$

13 ist also Teiler aller so darstellbaren Zahlen.

Lösung 110-54

$$\frac{\sqrt[9]{6}}{\sqrt[11]{9}} = \frac{\sqrt[99]{6^{11}}}{\sqrt[99]{9^9}} = \sqrt[99]{\frac{2^{11}\cdot 3^{11}}{3^{18}}} = \sqrt[99]{\frac{2^{11}}{3^7}} = \sqrt[99]{\frac{2048}{2187}} < \sqrt[99]{1} = 1,$$

so dass $\sqrt[9]{6} < \sqrt[11]{9}$ ist.

Lösung 110-55

Angenommen, die Laborantin mischt x kg 14%ige, y kg 11%ige und z kg 9%ige Schwefelsäurelösung, wobei $x, y, z \in \mathbb{N}$ ist. Dann muss gelten

$$\begin{aligned} x + y + z &= 30 && (1)\\ 14x + 11y + 9z &= 12 \cdot 30 && (2) \end{aligned}$$

(wobei auf die Maßeinheiten verzichtet wurde). Die Diophantische Gleichung (2) kann man mit dem Euklidischen Algorithmus lösen:

$$z = -x - y + 40 + \frac{-5x - 2y}{9}$$

Damit z ganzzahlig wird, muss der letzte Term gleich einer ganzen Zahl a sein, also

$$9a = -5x - 2y$$

bzw.

$$y = -2x - 4a + \frac{-x - a}{2}$$

Wiederum muss der letzte Term gleich einer ganzen Zahl b sein, also

$$2b = -x - a$$

was äquivalent ist mit

$$x = -a - 2b$$

Setzen wir dies schrittweise in die Gleichungen mit y und z auf der linken Seite ein, erhalten wir für x, y und z die Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= -a - 2b\\ y &= -a + 5b\\ z &= 4a - 3b + 40 \end{aligned}$$

wobei a und b ganze Zahlen sind. Aus diesen Gleichungen ergibt sich mit (1)

$$30 = 2a + 40$$

also $a = -5$, so dass für x, y, z gilt

$$\begin{aligned} x &= 5 - 2b\\ y &= 5 + 5b\\ z &= 20 - 3b \end{aligned}$$

Da $x, y, z > 0$ vorausgesetzt war, muss $b \in \{0, 1, 2\}$ sein. Für jeden der 3 möglichen Werte b erhalten wir eine Lösung der Aufgabe:

b=0: $x = 5, y = 5, z = 20$

b=1: $x = 3, y = 10, z = 17$

b=2: $x = 1, y = 15, z = 14$

Die Angaben entsprechen der Anzahl Flaschen 14%iger, 11%iger bzw. 9%iger Schwefelsäurelösung, die gemischt werden müssen.

Lösung 110-56

Angenommen, eins der Kinder aß a Pralinen. Dann aßen alle anderen gemeinsam $a + 7$ Pralinen. In der Schachtel waren folglich $S = a + (a + 7) = 2a + 7$ Pralinen und das Kind hat $a = \frac{S-7}{2}$ Pralinen gegessen. Da dies für jedes der Kinder gilt, muss jedes der Kinder die gleiche Anzahl $\frac{S-7}{2}$ Pralinen gegessen haben.

Nehmen wir nun an, es waren n Kinder. Dann gilt nach Voraussetzung $a = a(n - 1) - 7$ bzw.

$$7 = a(n - 2)$$

Da 7 eine Primzahl ist, muss einer der Faktoren gleich 1, der andere Faktor gleich 7 sein. Wegen $a > 1$ (Voraussetzung) gilt

$$a = 7, n = 3$$

Es müssen 3 Kinder gewesen sein und jedes Kind hat 7 Pralinen gegessen. In der Schachtel waren also 21 Pralinen.

6 Klassen 9 bis 13

Lösung 110-61

U.Warnecke:

Befreit man das Denkmal von allen verwitterten Steinen, so bleibt ein quaderförmiges Inneres übrig, das aus $(a-2)^2(b-1)$ Steinen besteht, wobei die Länge der Grundflächenkante des Denkmals a und die Höhe b sei. Laut Aufgabenstellung soll gelten:

$$2(a-2)^2(b-1) = a^2b \quad \text{und} \qquad a^2b > 1000.$$

Um Lösungspaare der Gleichung zu finden, beachtet man, das $b - 1$ ein Teiler von a^2 sein muss; man setze also $a^2 = k(b - 1)$ mit $k \in \mathbb{N}$, damit $b = \frac{a^2}{k} + 1$. Durch Einsetzen in die Ansatzgleichung und durch Umformungen findet man

$$\begin{aligned}
2(a-2)^2(b-1) &= k(b-1)b \\
2(a-2)^2 &= k(\frac{a^2}{k} + 1) \\
2a^2 - 8a + 8 &= a^2 + k \\
a^2 - 8a + 16 &= k + 8 \\
(a-4)^2 &= k + 8 \\
a = 4 + \sqrt{k+8} \ \vee \ a &= 4 - \sqrt{k+8}
\end{aligned}$$

Für $k > 1$ scheidet der zweite Fall als Lösung aus, a positiv und ganzzahlig sein muss. Außerdem ist für $k = 1$ $a = 1$ und $b = 2$, wodurch die Bedingung $a^2b > 1000$ nicht erfüllt wird. Daher werde nur noch

$$a^2 = (4 + \sqrt{k+8})^2 = 24 + 8\sqrt{k+8} + k = 8(3 + \sqrt{k+8}) + k$$

betrachtet. Eine tabellarische Übersicht liefert

k	a	b	$a^2b > 1000$?
1	7	50	ja
8	8	9	nein
17	9	$b \notin \mathbb{N}$	nein

Weitere Fälle scheiden aus der Betrachtung aus, da

$$b = \frac{24 + 8\sqrt{k+8} + k}{k} + 1 = \frac{24}{k} + \frac{8}{k}\sqrt{k+8} + 2$$

für $k > 8$ keine ganzzahligen Werte liefert. Zum Beweis braucht man nur solche k zu betrachten, für die $\frac{24}{k} \in \mathbb{N}$ und $k + 8$ quadratisch ist; dies ist aber nur für $k = 1$ oder $k = 8$ der Fall.
Damit ist gezeigt, dass das Denkmal aus $7^2 \cdot 50 = 2450$ Würfeln besteht.

Lösung 110-62

U.Warnecke

Eine erste Darstellungsmöglichkeit ist

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}.$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner 6 liefert $6 = 3 + 2 + 1$. Addiert man hier jetzt auf beiden Seiten 6, so ergibt sich $12 = 6 + 3 + 2 + 1$ und damit

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}.$$

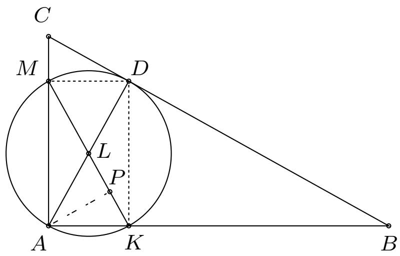
Erneute Addition mit dem neuen Hauptnenner 12 führt zu $24 = 12 + 6 + 3 + 2 + 1$ und liefert

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24}.$$

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens entstehen immer wieder Stammbrüche mit der Summe 1, da die jeweils auftretenden Zähler Teiler des Nenners sind.

Lösung 110-63

U.Warnecke:



Zunächst stellt man fest, dass $AKDM$ ein Rechteck und L sein Mittelpunkt ist: THALES-Kreis über AD liefert rechte Winkel bei K und M. Die zusätzlich eingeführte Strecke AP stehe senkrecht auf KM. Der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle AKM$ kann jetzt auf zweierlei Art berechnet werden: $\mathcal{A}_{AKM} = \frac{1}{2} \cdot |AK| \cdot |AM| = \frac{1}{2} \cdot |KM| \cdot |AP|$.
Damit hat man $|AK| \cdot |AM| = |KM| \cdot |AP|$.
Weiter ergibt sich jetzt aus der Voraussetzung zusammen mit $|KM| = 2 \cdot |KL| = 2 \cdot |AL|$:

$$\frac{|AK|}{|AL|} = \frac{|AL|}{|AM|} \quad \Leftrightarrow \quad |AL|^2 = |AK| \cdot |AM| = |KM| \cdot |AP| = 2 \cdot |AL| \cdot |AP|,$$

also $|AL|^2 = 2 \cdot |AL| \cdot |AP|$ und nach Kürzung $|AL| = 2 \cdot |AP|$.
Nun ist $\frac{|AP|}{|AL|} = \frac{1}{2} = \sin(30\,°)$, und das heißt $|\angle ALP| = 30\,°$, so dass jetzt $|\angle KAL| = |\angle LKA| = 75\,°$. Da $\angle ADB$ ein rechter Winkel ist (Höhe AD steht senkrecht auf Grundseite BC), ergibt sich weiter $|\angle DBA|$ $(= |\angle CBA|) = 15\,°$ und $|\angle ACB| = 75\,°$, da auch $\angle BAC$ nach Voraussetzung ein rechter Winkel ist.

Lösung 110-64

U.Warnecke:

Zunächst stellt man fest, dass $289 = 17^2$ ist. Man wird daher versuchen, die Zahl 17 irgendwie mit dem Term $n^2 - n + 13$ $(= n(n-1) + 13)$ in Verbindung zu bringen.
Der vielleicht naheliegende Ansatzversuch $17 = 9+8 = (n+9)-(n-8)$ und $(n+9)(n-8) = n^2 + n - 72$ liefert für n das falsche Vorzeichen; den richtigen Ansatz liefert aber

$$17 = 8 + 9 = n + 8 - n + 9 = (n+8) - (n-9) \text{ und } (n+8)(n-9) = n^2 - n - 72.$$

Damit gewinnt man die Umformung

$$n^2 - n + 13 = (n^2 - n - 72) + 85 = (n+8)(n-9) + 85.$$

Nun ist $85 \equiv 0 \mod 17$, und zwei Fälle sind zu unterscheiden:
Fall 1: $n+8 \equiv 0 \mod 17$; dann ist auch $n-9 \equiv 0 \mod 17$, so dass jetzt $(n+8)(n-9) \equiv 0 \mod 17^2$. Da zwar 85 ein Vielfaches von 17, nicht aber von 17^2 ist, kann 289 kein Teiler von $n^2 - n + 13$ sein.
Fall 2: $n+8 \not\equiv 0 \mod 17$; dann ist auch $n-9 \not\equiv 0 \mod 17$ und damit $(n+8)(n-9) \not\equiv 0 \mod 17$ und erst recht $\mod 17^2$. Hieraus darf man nicht ohne Weiteres den Schluss ziehen, dass jetzt $(n+8)(n-9) + 85 \not\equiv 0 \mod 17^2$ gezeigt sei, wie folgendes Beispiel zeigt:

$$9 \not\equiv 0 \mod 7 \text{ und } 12 \not\equiv 0 \mod 7, \text{ aber } 9 + 12 \equiv 0 \mod 7.$$

Im vorliegenden speziellen Fall kann man aber so überlegen:

$$\frac{(n+8)(n-9)+85}{17^2} = \frac{1}{17}\Big(\frac{(n+8)(n-9)}{17} + 5\Big),$$

und die Summe in der Klammer rechts in der Gleichung stellt wegen $(n+8)(n-9) \not\equiv 0 \mod 17$ keine ganze Zahl dar. Teilung dieser Summe durch 17 im Bereich der ganzen Zahlen ist daher unmöglich, so dass jetzt $(n+8)(n-9)+85 \not\equiv 0 \mod 17^2$ gezeigt ist.
Insgesamt ist damit bewiesen, dass 289 für keine ganze Zahl n Teiler von n^2-n+13 sein kann.