1 Vorschule

Lösung 111-11

5 und 9.

Lösung 111-12

L und T bestehen aus 7 Kästchen, H aus 11.

Frage zur Zusatzaufgabe: Aus wie vielen Würfeln bestaht dann jeder einzelne Buchstabe?

Lösung 111-13

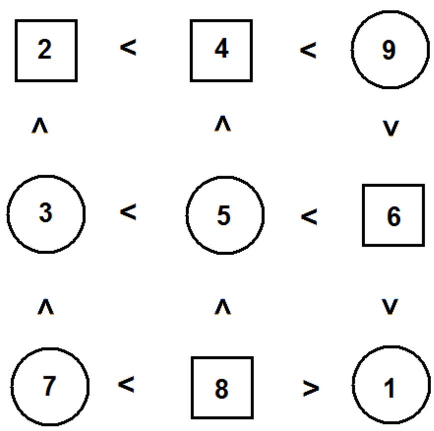
Tisch 1 - Affe, Tisch 2 - Fisch, Tisch 3 - Specht, Tisch 4 - Spinne

Lösung 111-14

Erwachsene Fische: 6 (2 Welse, 2 Gubbys, 2 Platis). Kinder: 16 (9 Gubbys, 7 Platis). Das sind insgesamt 22 Fische.

2 Klassen 1 und 2

Lösung 111-21



Lösung 111-22

Hans hat den Ball aus 4 m Höhe fallen gelassen.

Nach dem ersten Aufprall ist er dann auf die Höhe 2 m gesprungen und wieder nach unten gefallen. Nach dem zweiten Aufprall ist er 1 m hoch gesprungen.

Lösung 111-23

Es sind von 36 Feldern zusammen 12 grau, 24 weiß. Damit es gleich viele sind, müssen noch 6 Felder grau ausgemalt werden.

Lösung 111-24

Es gibt nur zwei Lösungen:

$$8 + 6 + 7 - 1 = 20$$

und

$$8 + 7 - 6 + 1 = 10$$

Lösung 111-25

Max hat nach dem abgeben 21 Kastanien, Leon 11. Max hat 10 Kastanien mehr als Leon.

Lösung 111-26

Da Bernd Leichtathletik nicht mag, kann er nicht in der gleichen Klasse wie Anton sein. Wegen (3) schwimmt Bernd also auch nicht. Bernd ist der Fußballer.

Wegen (2), (3) und (1) snd Anton, Conrad und Demir in der gleichen Klasse. Wegen (3) ist Conrad der Leichtathlet.

Da Anton wegen (3) nicht der Schwimmer ist, ist er der Turner. Also muss Demir der Schwimmer sein.

Damit ist die Lösung:

Anton - Turnen
Bernd - Fußball
Conrad - Leichtathletik
Demir - Schwimmen

Lösung 111-27

a) $6 + 8 = 14$

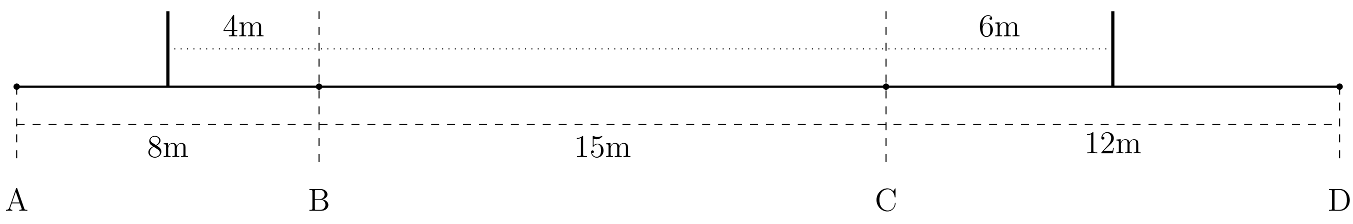
b) $2 + 4 + 9 + 13 = 28$

Lösung 111-28

Ruderboot	(kein Landfahrzeug)	Auto	(nicht mit Muskelkraft betrieben)
15	(keine gerade Zahl)	26	(kein Vielfaches von 3)
14	(keine Quadratzahl)	25	(keine gerade Zahl)
Hund	(kein Wildtier)	Fasan	(kein Säugetier)

3 Klassen 3 und 4

Lösung 111-31



Der Abstand zwischen der linken Straßenlaterne und Baum B beträgt 4m. Der Abstand zwischen Baum C und der rechten Laterne beträgt 6m. Der Abstand zwischen den Straßenlaternen beträgt

$$4 + 15 + 6 = 25$$

Meter.

Lösung 111-32

Die Tausenderstelle muss gerade sein und so klein wie möglich. D.h., die Tausenderstelle ist gleich 2, die Zehnerstelle ist gleich 1. Einer- und Hunderterstelle sind gleich und so klein wie möglich, also gleich 0.

Lösung: 2010

Lösung 111-33

Das Kreisstück liegt in genau einem der drei Kreise.	1,3,7
Das Kreisstück liegt in genau zwei der drei Kreise.	2,4,6
Das Kreisstück liegt in allen drei Kreisen.	5
Das Kreisstück liegt in A **oder** B (oder in beiden).	1,2,3,4,5,6
Das Kreisstück liegt in A **oder** B, aber **nicht in** C.	1,2,3
Das Kreisstück liegt in A **und** B, aber **nicht in** C	2
Das Kreisstück liegt **nicht in** A **und nicht in** B	7

Lösung 111-34

Das kleinste Kind bekommt 8 Kirschen.

Man kann es so rechnen:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$$

Da $77 - 28 = 49$ ist, bleiben so noch 49 Kirschen übrig. Teilt man diese Kirschen gleichmäßig auf die Kinder auf, hat immer noch jedes Kind eine Kirsche mehr als sein Vorgänger.

Wegen $49 : 7 = 7$ bekommt also das erste Kind 8 Kirschen und jedes weitere Kind eine Kirsche mehr.

Probe:

$$8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 = 77$$

Lösung 111-35

a) $x \in \{2007, 2008, 2009, 2010\}$, $y \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$

b) $2010 - 5 = 2005$

c) $2007 : 9 = 223$

Lösung 111-36

4 Handschuhe und 3 Socken.

Im ungünstigsten Fall erwischt man 3 Mal hintereinander einen Fingerhandschuhe von jedem der 3 paare. Der vierte passt dann auf jeden Fall zu einem der 3 zuvor herausgegriffenen Paare.

Bei den Socken kann man im ungünstigsten Fall zuerst eine schwarze und eine weiße ziehen. Die dritte Socke ist dann entweder schwarz oder weiß und komplettiert ein Paar.

Lösung 111-37

Das Zimmer hat 12 Ecken:8 an den Wänden und 4 am Fenster.

Lösung 111-38

a) 3:00 oder 15:00

b) 5:50 oder 17:50

c) 10:30 oder 22:30

4 Klassen 5 und 6

Lösung 111-41

Teilaufgabe 1

Marie Fromm	Emily Jansen
Jonas Vogel	Fabian Bergmann

Teilaufgabe 2

Marie mag weder Klettern noch Tischtennis während Jonas und Emily sowohl Klettern als auch Tischtennis mögen. Fabian mag Klettern. Eine Aussage, ob Fabian Tischtennis mag, kann nicht abgeleitet werden.

Variante 1: Tabelle

Vor- und Nachname aus der gleichen Aussage passen nicht zusammen, erzeugen also ein Minus in der Zelle der Tabelle. Wenn in eine Zelle ein Plus geschrieben wird, folgt daraus automatisch, dass in alle Zellen in der gleichen Zeile und Spalte ein Minus geschrieben werden muss. Steht in einer Zeile oder einer Spalte bereits dreimal Minus, muss in die letzte Zelle dieser Zeile bzw. Spalte ein Plus geschrieben werden.

	Vogel (T,K)	Fromm	Bergmann (K)	Jansen
Marie	- [6] (7)	+ [3,4,5] (6)	- [6] (7)	- [6] (7)
Jonas (K,T)	+ [4,7,11] (12)	- [6] (7)	- [1] (4)	- [9] (11)
Emily (K,T)	- [2] (5)	- [6] (7)	- [1] (4)	+ [4,5,7] (9)
Fabian (K)	- [7,8] (10)	- [6] (7)	+ [4,7] (8)	- [8/9] (10)

Die Antwort zu Teilaufgabe 1 folgt aus (6), (8), (9) und (12).

Die Antwort zu Teilaufgabe 2 folgt aus (1), (2), (3) und (8).

Variante 2 (in Worten)

(4) Aus (1) folgt, weder Jonas noch Emily heißen Bergmann und **Jonas, Emily und Bergmann mögen Klettern.**

(5) Aus (2) folgt **Emily** heißt nicht Vogel und **mag Tischtennis.** und wegen (4) **auch Klettern**.

(6) Aus (3),(4) und (5) folgt, **Marie heißt Fromm** und **mag weder Klettern noch Tischtennis**, da Emily sowohl Klettern als auch Tischtennis mag und Marie das einzige andere Mädchen ist.

(7) Aus (6) folgt, Jonas, Emily und Fabian heißen nicht Fromm.

(8) Aus (1), (4) und (7) folgt, **Fabian heißt Bergmann.** und **mag** wegen (1) **Klettern**.

(9) Aus (4), (5) und (7) folgt, **Emily heißt Jansen** und **mag sowohl Klettern als auch Tischtennis**.

(10) Aus (6), (8) und (9) folgt, **Jonas heißt Vogel** und **mag** wegen (1) und (2) **sowohl Klettern als auch Tischtennis**.

Lösung 111-42

Im ersten Schritt ersetzt man den Stern über der 8 in der vorletzten Zeile durch eine 8. Die Zwei Sterne in der vorletzten Zeile ergeben sich aus der Multiplikation der Einerziffer im rechten Faktor mit dem linken Faktor. Da $2 \cdot 80 = 160$ dreistellig ist, kann die Einerziffer nur die 1 sein. Damit das Produkt auf 8 endet, muss die Einerziffer des linken Faktors gleich 8 sein. Nun haben wir 88 als linken Faktor identifiziert. Das Produkt von 88 mit jeder der 3 Ziffern des rechten Faktors ist zweistellig. Alle Ziffern des rechten Faktors müssen also gleich 1 sein. Das Ergebnis ist damit

$$\begin{array}{cccccc}
8 & 8 & \cdot & 1 & 1 & 1 \\
\hline
8 & 8 & & & & \\
 & 8 & 8 & & & \\
 & & 8 & 8 & & \\
\hline
9 & 7 & 6 & 8 & &
\end{array}$$

Lösung 111-43

Es seien x und y Zahlen, die den Bedingungen der Aufgabe genügen. D.h. $5 \cdot x = 6 \cdot y$ und $x + y = 132$. D.h. $5 \cdot x + 5 \cdot y = 5 \cdot 132$. Jetzt können wir $5 \cdot x$ durch $6 \cdot y$ ersetzen und erhalten

$$6 \cdot y + 5 \cdot y = 11 \cdot y = 5 \cdot 132$$

oder

$$11 \cdot y = 5 \cdot 11 \cdot 12$$

D.h. $y = 60$ und $x = 132 - 60 = 72$

Die gesuchten Zahlen sind 60 und 72.

Probe:

$$5 \cdot 72 = 360$$

$$6 \cdot 60 = 360$$

$$60 + 72 = 132$$

Lösung 111-44

Wegen $1 \cdot a = e$ ist $a = e$ und folglich $e > b > c > d$. Da $5 - d = e$ ist, also $d + e = 5 = 0 + 5 = 1 + 4 = 2 + 3$ und d die kleinste, e die größte von 4 verschiedenen Zahlen ist, sind nur $d = 0$ und $e = 5$ oder $d = 1$ und $e = 4$ möglich. Wegen $12 : b = e$ muss e Teiler von 12 sein. D.h., es ist nur $e = 4$ und $d = 1$ möglich. Dann muss $b = 3$ und $c = 2$ sein. Die gesuchten Zahlen sind

$$a = e = 4, b = 3, c = 2, d = 1$$

Die Probe zeigt, dass diese Zahlen alle 4 Gleichheitsaussagen zu wahren Aussagen machen.

Lösung 111-45

Sei x der Kaufpreis in €; dann erhält man aus $12,6 + \frac{1}{3}x = x$ den Buchpreis $18,90$ €.

Ohne Aufstellung einer Gleichung kann man so überlegen: Wenn ein Drittel des Kaufpreises noch hinzugezahlt wird, muss $12,60$ € zwei Drittel des Kaufpreises sein. Ein Drittel beträgt dann $6,30$ €; zusammen mit $12,60$ € ergibt das $18,90$ €.

Lösung 111-46

Es kommt nur eine Quadratzahl in Frage: $196 = 14^2$, denn für $13^2 = 169$ müsste ich vor 1982 geboren worden sein, für $15^2 = 225$ müsste ich viel zu lange nach 1982 geboren worden sein.

Ich war 1982 also 14 Jahre alt und wurde folglich 1968 geboren.

Lösung 111-47

Wir lösen gleich den allgemeinen Fall mit einem Quadrat der Kantenlänge a cm und rechnen nur mit der Maßzahl a. Der gesuchte Flächeninhalt ist die Differenzmenge aus dem Quadrat der Kantenlänge a, einem Quadrat der Kantenlänge $\frac{a}{2}$ und zwei Dreiecken, die zusammen ein Rechteck mit den Kantenlängen a und $\frac{a}{2}$ bilden. Sei A der gesuchte Flächeninhalt, dann gilt also

$$\begin{aligned} A &= a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 - a \cdot \frac{a}{2} \\ &= a^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} \\ &= \frac{a^2}{4} \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt der grauen Fläche ist gleich einem Viertel des Flächeninhalts des Quadrats. Für $a = 8$ erhalten wir

$$A = \frac{8^2}{4} = \frac{64}{4} = 16$$

Lösung 111-48

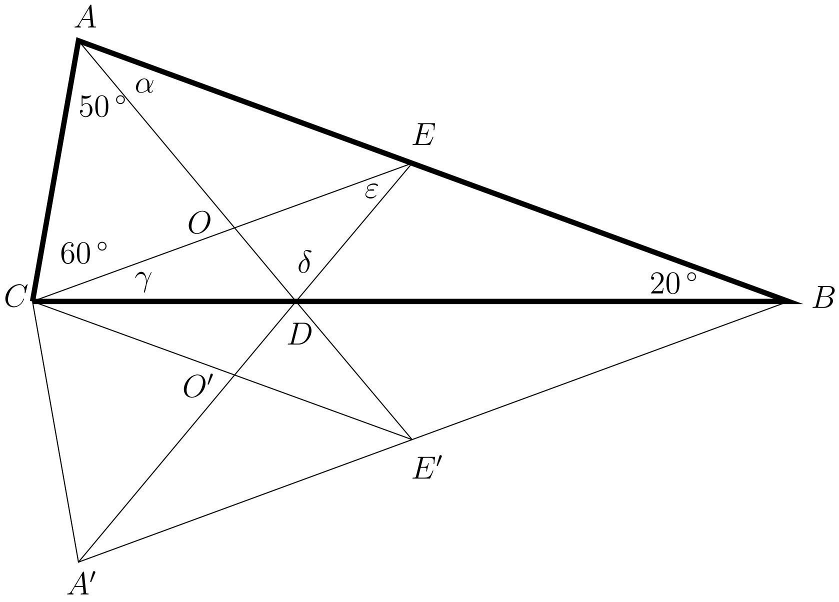
Wegen $2 \cdot 3 \cdot 4 = 6 \cdot 4$ ist das dreistellige Produkt sowohl durch 4 als auch durch 6 teilbar. Die Einer- und Zehnerziffer des Produkts bilden eine durch 4 teilbare zweistellige Zahl. Es kommen daher nur 444 und 888 in Frage. Dividiert man beide Zahlen durch 4, so bleiben 111 und 222. Nur 222 ist aber durch 6 teilbar (Quersumme durch 3 teilbar und gerade). Daher muss das Produkt 888 gewesen sein. $222 : 2 = 111$ und $111 : 3 = 37$.

In den neuen 5. Klassen sind 37 Kinder.

5 Klassen 7 und 8

Lösung 111-51

U.Warnecke:



Da die Schenkel AB und BC des Dreiecks $\triangle ABC$ gleichlang sein sollen, sind die Basiswinkel gleichweit. Daraus folgt sofort (vgl. Figur) $\alpha = 80° - 50° = 30°$ und $\gamma = 80° - 60° = 20°$. Nach dem Satz über die Innenwinkelsumme im Dreieck entnimmt man dem Dreieck $\triangle ACD$, sodass auch dieses Dreieck gleichschenklig ist. Der gleiche Satz liefert $|\angle AOC| = 70°$ und damit $|\angle COD| = 110°$ für den Nebenwinkel $\angle COD$. Da dieser Winkel ein Außenwinkel des Dreiecks $\triangle DEO$ ist, gilt nach dem Außenwinkelsatz $\delta + \varepsilon = 110°$.

Das Dreieck $\triangle ABC$ werde nun gespiegelt an der Achse BC; man erhält $\triangle A'BC$ als Spiegelbild. Dann gilt wegen der Kongruenz der Dreiecke $\triangle ACD$ und $\triangle A'CD$ und wegen der Gleichheit von Scheitelwinkeln an sich schneidenden Geraden, dass $|\angle BDE| = |\angle CDA'| = |\angle ADC| = 50°$, und hieraus ergibt sich sofort $\delta = 80°$ und damit $\varepsilon = 30°$.

Lösung 111-52

a) Sie muss $3 \cdot 4 + 1 = 13$ Kugeln ziehen. Im ungünstigsten Fall zieht die Versuchsperson nacheinander immer Kugeln verschiedener Farben, z.B. in der Reihenfolge rot, blau, schwarz, weiß, rot, ... Dann hat sie nach 12 maligem Ziehen von jeder Farbe genau 3 Kugeln. Beim nächsten Ziehen hat sie mit Sicherheit von einer Farbe genau 4 Kugeln.

b) Sie muss 128 Kugeln ziehen. Im ungünstigsten Fall zieht die Person 100 Mal nacheinander immer die gleiche Farbe. Dann sind im Gefäß noch genau 100 Kugeln der 3 anderen Farben und die Aufgabe reduziert sich zur Standardaufgabe a) mit genau 3 verschiedenen Farben und genau 10 Kugeln der gleichen Farbe. Im ungünstigsten Fall muss die Person also noch $9 \cdot 3 + 1 = 28$ weitere Kugeln ziehen.

c) Sie muss $100 \cdot 3 + 10 = 310$ Kugeln ziehen. Im ungünstigsten Fall zieht sie nacheinander 100 rote, dann nacheinander 100 blaue, dann nacheinander 100 schwarze Kugeln. Jetzt sind nur noch weiße Kugeln im Gefäß, von denen die 10 ziehen muss, um sicher 10 Kugeln jeder Farbe gezogen zu haben.

Lösung 111-53

A muss mit einer geraden Zahl beginnen, da 1344 ebenfalls gerade ist. Es sei

$$z = 100a + 10b + 2c, \quad 1 \leq a \leq 4, 0 \leq c \leq 4$$

die dreistellige gerade Zahl, die nach dem zweiten Schritt von B entstanden ist. A muss nun nur das Doppelte von z links neben z schreiben, um eine durch 1334 teilbare sechsstellige Zahl zu erhalten:

A erzeugt auf diese Weise die Zahl $2000z + z = 2001z$. Wegen $1 \leq a \leq 4$ und der Wahl von $2c$ als erste Ziffer ist dies eine gerade sechsstellige Zahl. Ferner ist

$$\frac{2001z}{1334} = \frac{3}{2}z$$

und da z gerade ist, ist die rechte Seite ganzzahlig. $2001z$ ist also durch 1334 teilbar.

Lösung 111-54

Diese Aufgabe wird zunächst auf traditionelle algebraische Weise gelöst und anschließend mit der Methode der Interpretation.

algebraische Lösung

Da a) ein Spezialfall von b) ist, genügt es, b) zu betrachten. a) wurde vorangestellt, damit man leichter eine Idee entwickeln kann.

Behauptung: Es ist nicht möglich, dass $z > \frac{b_i}{a_i}$ für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt.

Beweis (indirekt): Angenommen, es gibt Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n > 0$ derart, dass

$$z > \frac{b_1}{a_1}, \; z > \frac{b_2}{a_2}, \; \ldots, \; z > \frac{b_n}{a_n}$$

gilt. Dann ist auch

$$a_1 \cdot (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) > b_1 \cdot (a_1 + a_2 + \cdots + a_n), \ldots, a_n \cdot (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) > b_n \cdot (a_1 + a_2 + \cdots + a_n),$$

da alle Zahlen positiv sind. Addition der n Ungleichungen und geeignetes Zusammenfassen ergibt

$$\begin{aligned} a_1 \cdot (b_1 + \cdots + b_n) + \cdots + a_n \cdot (b_1 + \cdots + b_n) &> b_1 \cdot (a_1 + \cdots + a_n) + \cdots + b_n \cdot (a_1 + \cdots + a_n) \\ (a_1 + \cdots + a_n) \cdot (b_1 + \cdots + b_n) &> (b_1 + \cdots + b_n) \cdot (a_1 + \cdots + a_n) \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist offensichtlich falsch. Daher muss unsere Annahme falsch gewesen sein und die Behauptung ist bewiesen, q.e.d.

Lösung durch Interpretation als physikalisches Problem

Ein Auto fahre den Weg b_i in der Zeit a_i, $i = 1, \ldots, n$. Dann ist $\frac{b_i}{a_i}$ die durchschnittliche Geschwindigkeit des Autos auf dem Wegstück b_i und $\frac{b_1 + \cdots + b_n}{a_i + \cdots + a_n}$ die durchschnittliche Geschwindigkeit des Autos auf der gesamten Strecke $b_1 + \cdots + b_n$. Die durchschnittliche Geschwindigkeit des Autos auf der Gesamtstrecke kann aber niemals größer sein, als alle einzelnen Durchschnittsgeschwindigkeiten.

Lösung 111-55

Da die Fähre die zweite Hälfte des Weges mit $125\% = 5/4$ der Geschwindigkeit zurücklegt, die sie in der ersten Hälfte hatte, braucht sie dafür $4/5$ der Zeit, die sie in der ersten Hälfte gefahren ist. Sie spart also $1/5$ der Zeit gegenüber der ersten Hälfte ein. Das ist $1/2$ Stunde. Für die erste Hälfte braucht die Fähre folglich

$$5 \cdot \frac{1}{2}\text{h} = 2 \text{ h } 30 \text{ min}$$

Für die zweite Hälfte kommen noch 2h dazu. Die Fähre ist insgesamt 4h 30min unterwegs.

Lösung 111-56

Aus $56m = 65n$ folgt

$$m = \frac{65}{56}n$$

also

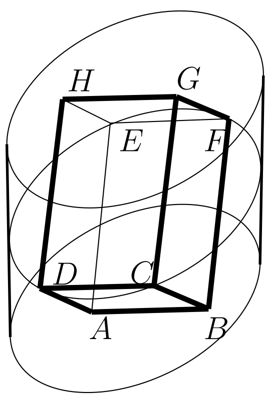
$$m + n = 121 \cdot \frac{n}{56}$$

Auf der linken Seite steht eine natürliche Zahl. 121und 56 sind teilerfremd. Also muss $\frac{n}{56}$ eine natürliche Zahl sein. DieSumme $m + n$ ist damit durch 121 teilbar, d.h. keine Primzahl.

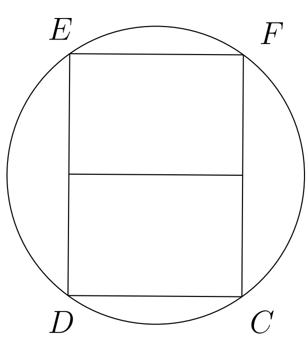
6 Klassen 9 bis 13

Lösung 111-61

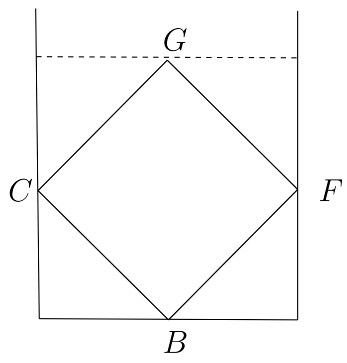
U.Warnecke:



Räumliche Ansicht



Ansicht von oben



Seitenansicht

Die Kantenlänge des Würfels sei a. Wie die Ansicht von oben erkennen lässt, ist $DCFE$ ein Rechteck mit den Seitenlängen a und $\sqrt{2}\,a$. Die Länge der Diagonale $|DF|$ dieses Rechtecks ist gleich der Länge des Durchmessers d des Zylindergrundkreises. Der Satz des PYTHAGORAS liefert

$$d^2 = a^2 + (\sqrt{2}\,a)^2 = 3a^2, \quad \text{d. h.} \quad a = \frac{1}{3}\sqrt{3}\,d.$$

Der Seitenansicht entnimmt man $h = |BG| = \sqrt{2}\,a = \sqrt{2}\ \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3}\,d = \frac{1}{3}\sqrt{6}\,d$.
Das Volumen V der einzufüllenden Wassermenge ist gleich der Differenz aus dem Volumen eines geraden Kreiszylinders mit dem Durchmesser d und der Höhe h und dem Volumen des Würfels mit der Kantenlänge a:

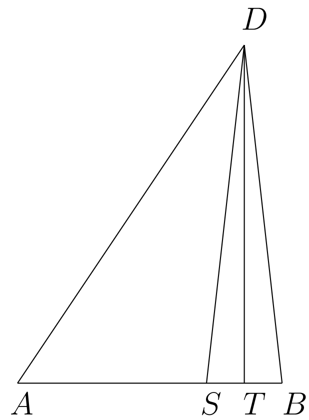
$$V = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6}\sqrt{6}\,d - \frac{1}{9}\sqrt{3}\,d^3 = \left(\frac{\pi}{12}\sqrt{6} - \frac{1}{9}\sqrt{3}\right)d^3.$$

Einsetzung des gegebenen Wertes 30 cm für d ergibt $V \approx 12\,118\,\mathrm{cm}^3$; das sind rund 12,12 Liter.

Lösung 111-62

U.Warnecke:

Gegeben: $|AB| = 9$ cm, $|AS| = 7$ cm, $|DS| = |DB| = 9$ cm, damit $|BS| = 2$ cm.
Nach diesen Vorgaben ist $\triangle DSB$ ein gleichschenkliges Dreieck. Sei T der Mittelpunkt der Strecke SB, sodass also $|AT| = 8$ cm und $|ST| = 1$ cm. Das Dreieck $\triangle ATD$ ist somit rechtwinklig, da DT Mittelsenkrechte von SB im Dreieck $\triangle SBD$ ist.
Nach dem Satz des PYTHAGORAS gilt:



$$\begin{aligned} |AT|^2 + |DT|^2 &= |AD|^2, \\ |ST|^2 + |DT|^2 &= |SD|^2, \\ |DT|^2 &= |SD|^2 - |ST|^2, \\ |AT|^2 + |SD|^2 - |ST|^2 &= |AD|^2. \end{aligned}$$

Einsetzung der gegebenen Werte liefert jetzt

$$|AD|^2 = (8^2 + 9^2 - 1^2)\,\mathrm{cm}^2 = 144\,\mathrm{cm}^2,$$

und somit $|AD| = 12$ cm als gesuchte Länge der Strecke AD.

Lösung 111-63

U.Warnecke:

Damit die Gleichung überhaupt eine Lösung besitzen kann, muss $x \leq \sqrt[3]{2}$ gelten.
Erste Umformungen liefern unter dieser Bedingung:

$$\begin{aligned}
& \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}} &&= \sqrt[3]{\sqrt[3]{2} - x} \\
\Leftrightarrow\quad & \sqrt[3]{\frac{1}{9}}\left(1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right) &&= \sqrt[3]{\sqrt[3]{2} - x} \\
\Leftrightarrow\quad & 1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} &&= \sqrt[3]{9(\sqrt[3]{2} - x)} \\
\Leftrightarrow\quad & \left(1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right)^3 &&= 9(\sqrt[3]{2} - x)
\end{aligned}$$

Die linke Seite der Gleichung lässt sich vereinfachen:

$$\begin{aligned}
\left(1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right)^3 &= \left(1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right)^2\left(1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right) \\
&= \left(1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} - 2 + \sqrt[3]{4} - 2 + 2\sqrt[3]{2}\right)\left(1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right) \\
&= \left(3\sqrt[3]{4} - 3\right)\left(1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right) \\
&= 3\sqrt[3]{4} - 3 - 3 \cdot 2 + 3\sqrt[3]{2} + 3 \cdot 2\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{4} \\
&= 9\sqrt[3]{2} - 9 \\
&= 9\left(\sqrt[3]{2} - 1\right)
\end{aligned}$$

Hiermit ergibt sich

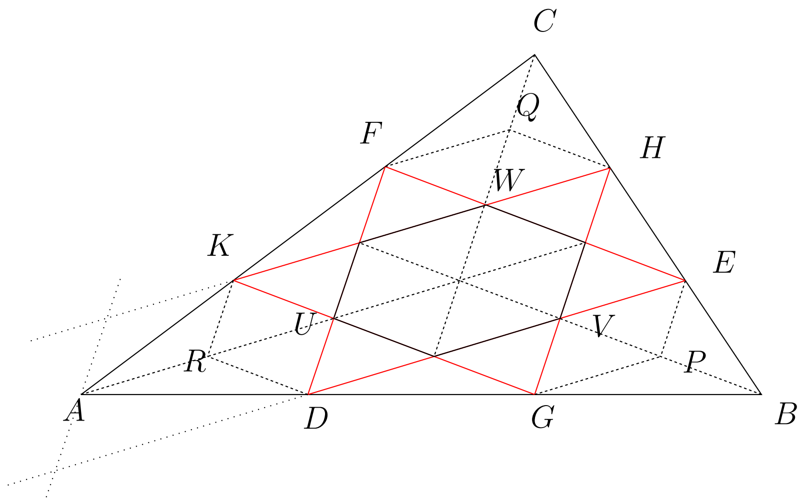
$$9\left(\sqrt[3]{2} - 1\right) = 9(\sqrt[3]{2} - x) \quad \Leftrightarrow \quad x = 1,$$

und es ist $1 \leq \sqrt[3]{2}$ und wie behauptet eine ganze Zahl.

Lösung 111-64

U.Warnecke:

Die Dreiecke $\triangle DEF$ und $\triangle GHK$ haben als gemeinsame Schnittmenge das in der Figur schwarz umrandete Sechseck.
Das Dreieck $\triangle ABC$ sei so in 27 kleine („atomare“) Dreiecke zerlegt, wie in der Figur dargestellt. Diese Dreiecke sind allesamt flächengleich, wie nun gezeigt wird.



1.) Die Dreiecke $\triangle ADR$ und $\triangle ARK$ haben die gemeinsame Grundseite AR und auch gleiche Höhe, da die Geraden durch D und E bzw. durch H und K parallel sind und gleichen Abstand von der Geraden durch R und U haben. Somit sind diese beiden Dreiecke flächengleich. Für die Dreiecke $\triangle GBP$ und $\triangle PBE$ sowie für $\triangle HCQ$ und $\triangle QCF$ verläuft der Nachweis analog.
2.) Die Gerade durch D und U und die zu ihr parallele Gerade durch A haben den gleichen Abstand von der Geraden durch K und R. Daher haben die Dreiecke $\triangle ARK$ und $\triangle RUK$ gleiche Höhe und außerdem KR als gemeinsame Grundseite, sind also flächengleich. In gleicher Weise zeigt man die Flächengleichheit der Dreiecke $\triangle ADR$ und $\triangle ADU$.
3.) Jedes atomare Dreieck besitzt (wenigstens) ein flächengleiches benachbartes Dreieck; infolgedessen haben alle 27 atomaren Dreiecke den gleichen Flächeninhalt, nämlich $\frac{1}{27}\mathcal{A}$, sodass das aus 6 atomaren Dreiecken bestehende Sechseck den Flächeninhalt $\mathcal{A}_{\text{6-Eck}} = 6 \cdot \frac{1}{27}\mathcal{A} = \frac{2}{9}\mathcal{A}$ besitzt.