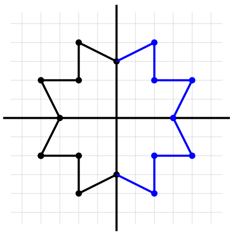
1 Vorschule

Lösung 112-11



Lösung 112-12

Bis zum 6.12. hat Jacob 6 Türchen geöffnet. Dann öffnet er die Türchen mit den Nummern $8, 10, 12, \ldots, 24$. Geschlossen bleiben $7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23$, also 9 Türchen.

Lösung 112-13

Marius hat immer noch 4 Stifte mehr als Niklas.

Lösung 112-14

Ein Mensch mit Fleischwolf oder einem ähnlichen Küchengerät:

2 Klassen 1 und 2

Lösung 112-21

$$14 - 9 = 5$$

5 Kinder haben 2 Sterne gebastelt.

Lösung 112-22

Diese Aufgabe hat mehr als eine Lösung:

$$M > A > T < H < E > M > A > T > I < K$$

$$4 > 3 > 2 < 5 < 6 > 4 > 3 > 2 > 1 < 7$$

$$5 > 4 > 3 < 6 < 7 > 5 > 4 > 3 > 1 < 2$$

$$5 > 3 > 2 < 4 < 6 > 5 > 3 > 2 > 1 < 7$$

$$6 > 5 > 3 < 4 < 7 > 6 > 5 > 3 > 1 < 2$$

$$6 > 4 > 2 < 5 < 7 > 6 > 4 > 2 > 1 < 3$$

$$6 > 3 > 2 < 4 < 7 > 6 > 3 > 2 > 1 < 5$$

Lösung 112-23

Vorgänger		**Nachfolger**
15	**16**	17
gestern	**heute**	**morgen**
Mittwoch	Donnerstag	**Freitag**
April	**Mai**	Juni

Lösung 112-24

Auch wenn man nicht weiß, welche Ziffern die Symbole darstellen, kann man rechnen:

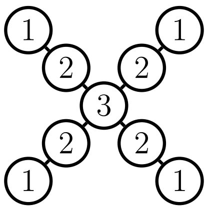
a) $\clubsuit 6 - \clubsuit 0 - 5 = 6 - 5 = 1$

b) $4\spadesuit + 3 + 7 = 4\spadesuit + 10 = 5\spadesuit$

c) $7\heartsuit - 30 - 2\heartsuit = 50 - 30 = 20$

Bemerkung zu b) Viele haben für $\spadesuit$ eine konkrete Ziffer eingesetzt, z.B. 1 und dann als Ergebnis 51 angegeben. Das ist aber dann nicht die vollständige Lösung und somit falsch. Damit es richtig wird, müssen in diesem Fall alle 10 Lösungen angegeben werden: $50, 51, 52, \ldots 58, 59$.

Lösung 112-25



Lösung 112-26

Der Flummi kann nur in Pauls oder Jans Stiefel stecken. Das Jojo kann nur in Pauls oder Tims Stiefel stecken. Steckte es in Tims Stiefel, dann würden aber Flummi und Jojo in benachbarten Stiefeln stecken. Also muss das Jojo in Pauls Stiefel stecken. Also muss der Flummi in Jans Stiefel stecken. Also muss das Fingerskateboard in Tims Stiefel stecken.

Ergebnis:

Paul	Tim	Jan
Jojo	Fingerskateboard	Flummi

Lösung 112-27

Wenn die Kängurus auf einem schmalen Wege stehen und diesen nicht verlassen dürfen und wir annehmen dass keins der Kängurus 2 Meter senkrecht nach oben springen kann, gibt es insgesamt 3 verschiedene Lösungen:

1. Beide Kängurus hüpfen aufeinander zu. Dann sind sie anschließend $20 - 4 = 16$ Meter voneinander entfernt.

2. Beide Kängurus hüpfen in die gleiche Richtung. Dann sind sie anschließend immer noch 20 Meter voneinander entfernt.

3. Beide Kängurus hüpfen in entgegengesetzte Richtungen. Dann sind die anschließend $20 + 4 = 24$ Meter voneianander entfernt.

Lösung 112-28

Rebecca fährt in einer Stunde 12 Kilometer, denn 24 km : 2 = 12 km

Ihre Freundin schafft in einer Stunde 16 Kilometer, denn eine Stunde sind $4 \cdot 15$ Minuten. Also fährt sie $4 \cdot 4$ km = 16 km.

3 Klassen 3 und 4

Lösung 112-31

Wenn Leos Aussage falsch war, dann hat keines der Mädchen recht. Das geht nur, wenn in der Schüssel genau 23 Plätzchen sind.

Lösung 112-32

Begriff	**Erklärung**
addieren	+ rechnen
Summe	Ergebnis des Addierens (der Addition)
multiplizieren	· rechnen
Produkt	Ergebnis des Multiplizierens (der Multiplikation)
subtrahieren	− rechnen
Differenz	Ergebnis des Subtrahierens (der Subtraktion)

Wir rechnen rückwärts:

$$\begin{aligned} 12 \cdot 6 &= 72 \\ 72 + 24 &= 96 \\ 96 : 6 &= 16 \\ 16 - 7 &= 9 \end{aligned}$$

Hans ist 9 Jahre alt.

Lösung 112-33

Die Übersetzungsvorschrift lautet:

1.Buchstabe: Symbol. $D = \square, K = \heartsuit, W = \bigcirc, Z = \triangle$

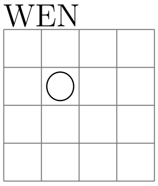
2.Buchstabe: Spalte im Gitter. Von links nach rechts: AEOU

3.Buchstabe: Zeile im Gitter. Von unten nach oben: GLNR

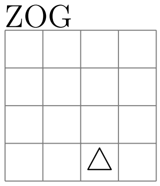
a) Die Nachricht lautet DER ZUG ZUR KUR.

b) Die Geheimschrift für WEN ZOG DER WAL ist

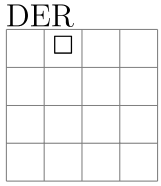
WEN



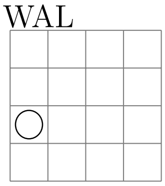
ZOG



DER



WAL



Lösung 112-34

Der Würfel gehört zu Netz c), denn nur bei diesem Netz stimmt die Lage der Ziffern zueinander.

Lösung 112-35

a) $1 \cdot 2 + 3 - 4 = 1$

b) $1 + 2 + 3 - 4 = 2$

c) $1 + 2 \cdot 3 - 4 = 4$

d) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

Lösung 112-36

Es gibt insgesamt 13 verschiedene Wege:

Nikola Kostadinov, 9 Jahre, Klasse 4:

von 6: 1 Möglichkeit
von 5: 1 + 1 = 2 Möglichkeiten
von 4: 1 + 2 = 3 Möglichkeiten
von 3: 3 + 2 = 5 Möglichkeiten
von 2: 5 + 3 = 8 Möglichkeiten
von 1: 8 + 5 = 13 Möglicheiten.

Aufzählung aller Wege:

1-2-3-4-5-6-7	1-3-4-5-6-7
1-2-4-5-6-7	1-2-3-5-6-7
1-2-3-4-6-7	1-2-3-4-5-7
1-3-4-6-7	1-3-5-6-7
1-2-4-6-7	1-2-4-5-7
1-3-4-5-7	1-2-3-5-7
1-3-5-7	

Lösung 112-37

Die Teiler von 24 sind 1, 2, 3, 4, 6, 12 und 24. 6 ist um 2 größer als 4 und $4 \cdot 6 = 24$.

Die gesuchten Zahlen sind 4 und 6.

Lösung 112-38

In 4 Stunden verdient er $4 \cdot 12$ € $= 48$ € . Es fehlen noch 50 € $- 48$ € $= 2$ € , 2€ sind $\frac{1}{6}$ von 12 € . So muss er noch $\frac{1}{6}$ Stunde arbeiten. 60 min $: 6 = 10$ min.

Der Mann muss 4 Stunden und 10 Minuten für ein Paar Schuhe arbeiten.

4 Klassen 5 und 6

Lösung 112-41

Man umreißt das Pappdreieck mit dem Bleistift, legt das Pappdreieck außen an eine der Seiten des gezeichneten Dreiecks an und umreißt es wieder mit dem Bleistift.

Das Viereck, das man erhält, ist eine Raute (Rhombus), denn es hat 4 gleich lange Seiten. In einer Raute stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander. Den gesuchten rechten Winkel erhält man, indem man mit dem Lineal die Diagonalen zeichnet.

Lösung 112-42

Wenn 100 bei Division durch x den Rest 2 lässt, so lässt 98 bei Division durch x keinen Rest. Wenn 80 bei Division durch x den Rest 10 lässt, so lässt 70 bei Division durch x keinen Rest. Wir betrachten die gemeinsamen Teiler der Zahlen 70 und 98. Dies sind 1, 2 und 14. Da bei Division durch x ein Rest 10 entsteht, muss die gesuchte Zahl größer als 10 sein. Also ist 14 die gesuchte Zahl.

Probe:

$$100 = 7 \cdot 14 + 2$$

und

$$80 = 5 \cdot 14 + 10$$

Lösung 112-43

Die Dauer eines Glockenschlags selbst vernachlässigen wir (das ist eine realistische Annahme eine Kirchglocke betreffend), so dass die Gesamtdauer nur durch die Pausen bestimmt wird. Zwischen den 5 Glockenschlägen liegen 4 Pausen, für die die Turmuhr insgesamt 5 Sekunden benötigt:

$$x \leftrightarrow x \leftrightarrow x \leftrightarrow x \leftrightarrow x$$

Zwischen 2 Glockenschlägen vergehen also 5/4 Sekunden. Bei den Turmuhrschlägen um 10 Uhr sieht es so aus:

$$x \leftrightarrow x \leftrightarrow x \leftrightarrow x \leftrightarrow x \leftrightarrow x \leftrightarrow x \leftrightarrow x \leftrightarrow o \leftrightarrow x$$

Bis zum *o* vergehen insgesamt 10 Sekunden. Danach vergeht noch einmal 5/4 Sekunden. Die Turmuhr benötigt für die Schläge um 10 Uhr insgesamt 11,25 Sekunden.

Lösung 112-44

Janis Hein, Klasse 3:

[] : 5: R 1 ⇒ hinten eine 1 oder eine 6:

51, 56, 61, 66, 71, 76, 81, 86, 91, 96

Es muss durch 6 teilbar sein: 66, 96

Es muss durch 4 teilbar sein: 96.

96 Plätzchen waren es.

Nikola Kostadinov, Klasse 4:

Wir wissen, dass die Zahl zwischen 50 und 100 liegt. Wenn man die Zahl durch 5 teilt, bleibt eins übrig. Deshalb muss die Zahl entweder 1 oder 6 am Ende haben. Die Zahl muss durch 4 und durch 6 teilbar sein also auch durch 12. Die Zahlen:

60 → falsch, endet nicht mit 1 oder 6
72 → falsch, endet nicht mit 1 oder 6
84 → falsch, endet nicht mit 1 oder 6
96 → richtig, denn endet mit 6
Es sind insgesamt 96 Plätzchen.

Lösung 112-45

4 Quaderkanten sind doppelt so lang wie die acht untereinander gleichlangen übrigen Kanten. Die Länge der kürzeren Kanten ergibt sich also zu 96 cm : 16 = 6 cm.

Der Quader ist 6 cm lang, 6 cm breit und 12 cm hoch.

Probe: Länge aller Kanten =

$$6 \text{ cm} \cdot 8 + 12 \text{ cm} \cdot 4 = 48 \text{ cm} + 48 \text{ cm} = 96 \text{ cm}$$

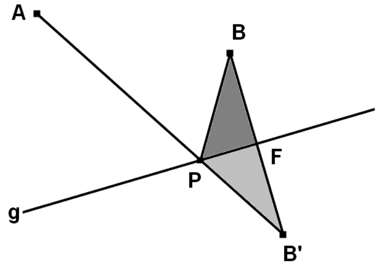
Lösung 112-46

Wir haben zwei Fälle zu unterscheiden:

1. g trennt die Punkte A und B, d.h. A und B liegen in verschiedenen Halbebenen bezüglich g.

2. g trennt die Punkte A und B nicht, d.h. A und B liegen in der gleichen Halbebene bezüglich g.

Im **Fall 1** ist wegen der Dreiecksungleichung P der Schnittpunkt der Strecke AB mit g.



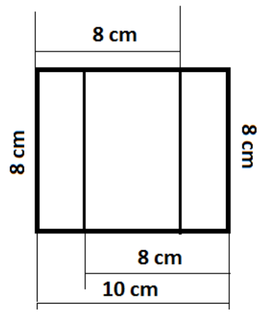
Im **Fall 2** spiegelt man zunächst B an g. Sei B' der Bildpunkt der Spiegelung, dann liegen A und B' in verschiedenen Halbebenen bezüglich g.

Behauptung: Der Schnittpunkt der Strecke AB' mit g ist der gesuchte Punkt P.

Beweis: Sei F der Schnittpunkt der Strecke BB' mit g. Dann folgt aus der Kongruenz der Dreiecke $\triangle PFB$ und $\triangle PFB'$ (Kongruenzsatz sws) die Gleichheit der Abstände $\mid PB \mid$ und $\mid PB' \mid$. Da $\mid AP \mid + \mid PB' \mid$ nach Fall 1 minimal ist, ist auch $\mid AP \mid + \mid PB \mid = \mid AP \mid + \mid PB' \mid$ minimal.

Lösung 112-47

Lägen beide Blätter Kante an Kante zusammen, so wäre die eine Seite des Rechtecks 16 cm lang. Da sie aber nur 10 cm lang ist, müssen sich 6 cm der Blätter überlappen. Die einander überlappenden Teile bilden folglich ein Rechteck der Seitenlängen 8 cm x 6 cm.



Lösung 112-48

Aus dem Innenwinkelsatz in den Dreiecken $\triangle ADE$ und $\triangle CDB$ folgt zwingend $\epsilon = \delta$, also $\epsilon = 80°$. Wegen $2\gamma + \delta = 2\gamma + 80° = 180°$ ist $\gamma = 50°$. Innenwinkelsatz im Dreieck $\triangle ABC$ ergibt $2\alpha = 180° - \gamma - \delta = 180° - 130° = 50°$, also $\alpha = 25°$. Innenwinkelsatz im

Dreieck $\triangle DBC$ ergibt damit $\beta = 180° - \alpha - \delta = 75°$. Die gesuchten Winkelgrößen sind also

$$\begin{aligned} \alpha &= 25° \\ \beta &= 75° \\ \gamma &= 50° \\ \delta &= 80° \\ \epsilon &= 80° \end{aligned}$$

5 Klassen 7 und 8

Lösung 112-51

Angenommen, es gäbe zwei natürliche Zahlen a, b so dass

$$a^2 - b^2 = 2018$$

ist. Dann gilt

$$(a+b)(a-b) = 2018$$

2018 hat die Primfaktorzerlegung $2018 = 2 \cdot 1009$. Es ergeben sich also folgende 2 Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} (a+b)(a-b) &= 2018 \cdot 1 \\ (a+b)(a-b) &= 1009 \cdot 2 \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt $2a = 2019$, aus der zweiten $2a = 1011$. Beide Gleichungen sind für keine natürliche Zahl erfüllt. Also war die Annahme falsch.

Lösung 112-52

Das Trapez $EBFC$ hat zwei rechte Winkel bei E und bei B. Der Winkel mit Scheitel E ist nach Konstruktion ein rechter Winkel, der Winkel mit Scheitel B ist Gegenwinkel zu $\angle CEB$ an den Parallelen BF und CE. Analog hat das Trapez $CDBF$ hat nach Konstruktion und Gegenwinkelsatz zwei rechte Winkel bei C und bei D. Im Viereck $ABFC$ beträgt die Summe der Größen der gegenüberliegenden Winkel $\angle FCA$ und $\angle ABF$ folglich 180° und (nach Innenwinkelsatz im Viereck) gilt Gleiches für die Summe der Größe der Winkel $\angle BAC$ und $\angle BFC$. Das Viereck $ABFC$ ist somit ein Sehnenviereck, wobei der zugehörige Kreis k der Umkreis des Dreiecks ABC sein muss, da A, B, und C auf diesem Kreis liegen, qed.

Lösung 112-53

Wir multiplizieren beide Seiten von (1) mit bd und erhalten

$$ad + bc = bd \tag{3}$$

Nun dividieren wir beide Seiten von (3) durch $ac \neq 0$ und erhalten die Gleichung (2).

Lösung 112-54

a) Eine Lösung mit $V = 9$ ist

$$\begin{array}{cccccc} & & & 5 & 4 & 5 \\ + & & 3 & 5 & 1 & 3 \\ + & 8 & 6 & 1 & 7 & 3 \\ \hline = & 9 & 0 & 2 & 3 & 1 \end{array}$$

Da wir bereits eine Lösung mit $V = 9$ und $F = 8$ haben, können wir diese beiden Ziffern für die anderen Buchstaben in allem Folgenden ausschließen. Ferner kann nicht $E = 5$ sein, da in diesem Fall wegen $U + 2E = L$ oder $U + 2E = L + 10$ jeweils $U = L$ folgen würde. Außerdem ist klar, dass $E + A \geq 10$ oder $E + A + 1 \geq 10$ oder $E + A + 2 \geq 10$ sein muss denn der Übertrag aus $2U + L$ kann höchstens gleich 2 sein. Wir zeigen zunächst, dass der Übertrag von $2U + L$ nicht gleich 2 sein kann:

Wäre der Übertrag gleich 2, so folgte $2U + L + \{0, 1, 2\} \geq 20$, also $G = 2U + L \in \{20, 19, 18\}$. Das geht nur, wenn $G = 0$ ist (denn anderenfalls wäre $G = V$ oder $G = F$). Dann gilt auch $2U + L = 20$, woraus mit $U + 2E = L$ folgt $2U + 2E = 20$ oder $U + E = 10$. Da 0, 5, 8 und 9 ausgeschlossen sind, sind nur noch folgende Fälle möglich:

$$\begin{aligned} U = 3, E = 7 &\Rightarrow L = 7 \\ U = 7, E = 3 &\Rightarrow L = 3 \\ U = 4, E = 6 &\Rightarrow L = 6 \\ U = 6, E = 4 &\Rightarrow L = 4 \end{aligned}$$

Alle diese Fälle widersprechen der Voraussetzung, dass verschiedene Buchstaben für verschiedene Ziffern stehen.

Nun betrachten wir Ö $= 7$. In diesem Fall wären $E + A \in \{16, 17\}$ möglich (Übertrag 0 oder 1). Dies ist aber nur möglich, wenn eine der beiden Zahlen gleich 8 oder gleich 9 wäre, was ausgeschlossen wurde. Daher muss Ö ≤ 6 sein.

Wäre Ö $= 6$, so müsste gelten $E + A \in \{15, 16\}$. 16 wurde bereits als Summe ausgeschlossen. Auch 15 ist als Summe nur möglich, wenn einer der beiden Summanden gleich 8 oder gleich 9 ist.

Für Ö $= 5$ müsste gelten $A + E \in \{14, 15\}$. Wegen $14 = 9 + 5 = 8 + 6 = 7 + 7$ ist 14 nicht möglich. 15 wurde als Summe bereits ausgeschlossen. Daher kann nicht Ö $= 5$ sein.

Sei Ö $= 4$. Das ist möglich, wenn $E + A = 14$ und Übertrag 0 ist oder $E + A = 13$ und Übertrag 1. 14 haben wir als Summe bereits ausgeschlossen.

Betrachten wir daher $E + A = 13$ und Übertrag 1, also $10 \leq 2U + L + 1 < 20$. Dann kann nur $E = 6$ und $A = 7$ oder $E = 7$ und $A = 6$ gelten.

Im Fall $E = 6$ gilt $A = 7$ und wegen $U \in \{0, 1, 2, 3, 5\}$ ergäbe sich aus $L = U + 2E$ für L: $L \in \{2, 3, 4, 5, 7\}$. Nur $L = 2, L = 3$ und $L = 5$ sind möglich, also auch nur

$U = 0, U = 1$ und $U = 3$ in dieser Reihenfolge. Da $2U + L$ größer als 9 sein muss, bleibt nur $U = 3$ und $L = 5$, also $G = 1$. Dann müsste $H = 0$ und $K = 2$ gelten, was wegen $H + L + K + 1 = 0 + 5 + 2 = 7 \neq E$ nicht geht.

Im Fall $E = 7$ gilt $A = 6$ und wegen $U \in \{0, 1, 2, 3, 5\}$ ergäbe sich aus $L = U + 2E$ für L: $L \in \{4, 5, 6, 7, 9\}$. Nur $L = 5$ und $U = 1$ ist möglich, aber in diesem Fall gilt $2U + L < 10$. Es muss also Ö ≤ 3 gelten.

Sei Ö $= 3$. Bei Übertrag 0 wäre $E+A = 13$. Dieser Fall ist bereits ausgeschlossen. Übertag 1 ergibt $E+A = 12 = 3+9 = 4+8 = 5+7 = 6+6$. Nur $E = 7, A = 5$ ist möglich. Wegen $U \in \{0, 1, 2, 4, 6\}$ folgt dann für L: $L \in \{4, 5, 6, 8, 0\}$, also $U = 0, L = 4$ oder $U = 1, L = 5$ oder $U = 2, L = 6$ oder $U = 6, L = 0$. Es muss wieder $2U + L \geq 10$ sein, da wir den Fall $E + A = 12$, Übertrag 1 betrachten. Nur für die beiden letzten Fälle ist $2U + L \geq 10$. Mit $U = 2, L = 6$ folgt $G = 0, H = 1, K = 4$, mit $U = 6, L = 0$ folgt $G = 2, H = 1, K = 4$ und in beiden Fällen $H + K + 1 = 6$. Nur mit $L = 1$ kann dann $E = 7$ sein. Leider haben wir nur $L = 0$ oder $L = 6$. Damit ist gezeigt, dass Ö ≤ 2 sein muss.

Im Fall Ö $= 2$ gilt $E + A = 12$ und Übertrag 0 oder $E + A = 11$ und Übertrag 1. Im ersten Fall ergibt sich $E = 7, A = 5$ und wegen $2U + L < 10$ sind nur $U = 0, L = 4$ oder $U = 1, L = 5$ möglich. Mit $U = 0$ und $L = 4$ müsste $G \in \{4, 5\}$ sein, mit $U = 1$ und $L = 5$ müsste $G \in \{7, 8\}$. Aber das ist ausgeschlossen. Falls Ö=2 ist, kann also nur $A + E = 11$ sein und $20 > 2U + L \geq 10$. Es sind $E = 4, A = 7$, $E = 7, A = 4$ oder $E = 6, A = 5$ möglich. Für $E = 4, A = 7$ kann $U = 3, L = 1, G \in \{7, 8\}$ oder $U = 5, L = 3, U \in \{3, 4\}$ sein. Das geht nicht. Für $E = 7, A = 4$ kann nur noch $U = 1, L = 5, G \in \{7, 8\}$ sein, was unmöglich ist. Mit $E = 6, A = 5$ gibt es keine widerspruchsfreie Ersetzung von U, L und G. Daher kann Ö nicht gleich 2 sein.

Sei Ö $= 1$. $E + A = 11$ und Übertrag 0 ergibt mit den Fällen $E = 4, A = 7$, $E = 7, A = 4$ oder $E = 6, A = 5$ wie oben Widersprüche. Bleibt also $E + A = 10$ und Übertrag 1. Es ist zunächst $E = 3, A = 7, U = 6, L = 2, G \in \{4, 5\}$ möglich. Mit $G = 4$ erhielte man $H+K+L+1 = 18$, aber E kann nicht 8 sein. Mit $G = 5$ ergäbe sich $H+K+L+1 = 17$, was ebenfalls $E = 3$ widerspricht. Für $E = 7, A = 3$ haben wir $U = 0, L = 4, G = 5, H = 2, K = 6$ und folglich $E = 3$ (Widerspruch) oder $U = 2, L = 6, G = 0, H = 4, K = 6$ und folglich $E = 6$ (Widerspruch). Für $E = 4, A = 6$ ergäbe sich nur $U = 2, L = 0, G = 5, H = 3, K = 7$, also $E = 1$ (Widerspruch). Für $E = 6, A = 4$ haben wir schließlich $U = 0, L = 2, G = 3, H = 5, K = 7$ oder $U = 3, L = 5, G = 2, H = 0, K = 7$, woraus im ersten Fall $H + K + L + 1 = 15$ folgt und $E = 5$ sein müsste, im zweiten Fall $H + K + L + 1 = 13$ und $E = 3$ sein müsste. Beides geht nicht.

Damit ist gezeigt: einen größeeren Wert als 0 kann Ö nicht annehmen. Die angegebene Lösung ist also die mit der größten Summe.

b)

$$\begin{array}{cccccccc} & & 6 & 5 & 6 & 5 & 4 \\ + & & 7 & 3 & 6 & 0 & 4 \\ + & & 2 & 4 & 6 & 8 & 4 \\ \hline = & 1 & 6 & 3 & 9 & 4 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccccc} & & 6 & 0 & 6 & 0 & 9 \\ + & & 2 & 5 & 6 & 3 & 9 \\ + & & 7 & 9 & 6 & 4 & 9 \\ \hline = & 1 & 6 & 5 & 8 & 9 & 7 \end{array}$$

Lösung 112-55

$$\begin{aligned}
\frac{x^4-2x^3-3x^2+8x-4}{x^4-3x^2+2x} &= 0\\
\frac{x^4-3x^2+2x-2(x^3-3x+2)}{x^4-3x^2+2x} &= 0\\
1-2\frac{x^3-3x+2}{x(x^3-3x+2)} &= 0\\
1-\frac{2}{x} &= 0\\
x &= 2
\end{aligned}$$

Probe:

$$\frac{16-16-12+16-4}{16-12+4}=\frac{0}{8}=0$$

Lösung 112-56

Wir nehmen zunächst an, dass die erste Teilaussage von (1) falsch sei. Dann ist die zweite wahr:
Es war also Tim und nicht Robert. Da dann die zweite Teilaussage von (2) wahr ist, muss die erste falsch sein. Dann müssten es sowohl Tim als auch Bernd gewesen sein. Da es aber nur einer der 4 Jungen war, haben wir hier einen Widerspruch. Es muss also die erste Teilaussage von (1) wahr sein und die zweite falsch:

Wenn es Tim nicht war, muss nach (2) die zweite Teilaussage falsch sein, die erste wahr, d.h. es war nicht Bernd. Folglich ist die erste Teilaussage von (4) falsch, d.h. die zweite Teilaussage von (4) wahr. D.h. es war nicht Fabian. Die erste Teilaussage von (3) ist also falsch und damit die zweite Teilaussage von (3) wahr. Das ist mit (1) kompatibel.

Robert hat die Fensterscheibe auf dem Gewissen.

6 Klassen 9 bis 13

Lösung 112-61

Es ist $f(f(x)) = a(f(x)+b = a(ax+b)+b = a^2x+ab$. Damit gilt $f(f(x)) = 2x+1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned}
a^2x+ab+b &= 2x+1 && (4)\\
(a^2-2)x+b(a+1)-1 &= 0 && (5)
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ ist. Die linke Seite kann nur dann für alle reellen Zahlen x gleich 0 sein, wenn dies gleichzeitig für die Koeffizienten gilt, also genau dann, wenn

$$a^2 = 2$$

und

$$b(a+1) = 1$$

Ist. Die erste Gleichung hat genau 2 reelle Lösungen: $a = \sqrt{2}$ und $a = -\sqrt{2}$. Für beide Lösungen ist $a + 1 \neq 0$ und es ergibt sich für jede dieser beiden Lösungen aus der zweiten Gleichung genau eine Lösung für b:

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1 \quad , \quad b = \frac{1}{1-\sqrt{2}} = -\sqrt{2} - 1$$

Es gibt also genau 2 lineare Polynome f, die den Bedingungen der Aufgabe genügen:

$$f(x) = \sqrt{2}x + \sqrt{2} - 1 \tag{6}$$
$$f(x) = -\sqrt{2}x - \sqrt{2} - 1 \tag{7}$$

Lösung 112-62

Angenommen, die Gleichung hätte 2 verschiedene Lösungen $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$. Dann ist

$$a^3 + a + q = 0 \tag{1}$$
$$b^3 + b + q = 0 \tag{2}$$

(1) - (2) und geeignete Umformung ergibt:

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 + (a-b) &= 0 \\ (a-b)(a^2 + ab + b^2) + (a-b) &= 0 \\ (a-b)(a^2 + ab + b^2 + 1) &= 0 \end{aligned}$$

Für $a \neq b$ ist $(a^2 + ab + b^2 + 1) \neq 0$. Daher muss $a - b = 0$ sein, d.h. $a = b$, womit wir einen Widerspruch konstruiert haben. Die Annahme ist daher falsch.

Lösung 112-63

Stefan Knott:

(1) kann umgeformt werden zu

$$2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = 1 \tag{3}$$

Mit

$$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

und (3) ergibt sich das zu (1), (2) äquivalente Gleichungssystem

$$\cos(x) + \cos(y) = 1, \quad \cos(x)\cos(y) = \frac{1}{4} \tag{4}$$

Für $\cos(x)$ erhält man durch äquivalente Umformungen

$$\left(cos(x) - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

und mit der ersten Gleichung aus (4) folgt

$$\cos(x) = \cos(y) = \frac{1}{2}$$

Im Intervall $[0, 2\pi)$ haben dieser Gleichungen die Lösungsmenge

$$x, y \in \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$$

woraus sich wegen der Periodizität der Kosinusfunktion die Lösungsmenge

$$x, y \in \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

ergibt.

Lösung 112-64

Zunächst ist klar, dass $x \neq -1, 2, -3, 4$ sein muss. Wir fassen den 1. und 3. Summanden zusammen und den 2. und 4. Summanden, wobei wir den 4. Summanden noch äquivalent umformen zu

$$-\frac{x+4}{x-4}$$

und die Zusammenfassung auf die andere Seite bringen:

$$\begin{aligned}
\frac{x-1}{x+1} + \frac{3-x}{x+3} &= \frac{x+4}{x-4} - \frac{x+2}{x-2} \\
\frac{(x-1)(x+3) + (3-x)(x+1)}{(x+1)(x+3)} &= \frac{(x+4)(x-2) + (x+2)(x-4)}{(x-2)(x-4)} \\
\frac{x^2 + 2x - 3 + 3 - x^2 + 2x}{(x+1)(x+3)} &= \frac{x^2 + 2x - 8 - x^2 + 2x + 8}{(x-2)(x-4)} \\
\frac{4x}{(x+1)(x+3)} &= \frac{4x}{(x-2)(x-4)}
\end{aligned}$$

$x = 0$ ist also offensichtlich Lösung der Gleichung. Sei $x \neq 0$, dann kann äquivalent umgeformt werden zu

$$\begin{aligned}
(x+1)(x+3) &= (x-2)(x-4) \\
x^2 + 4x + 3 &= x^2 - 6x + 8 \\
10x &= 5 \\
x &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Probe:

für $x = 0$:

$$-1 - 1 + 1 + 1 = 0$$

für $x = 1/2$:

$$-\frac{1}{3} - \frac{5}{3} + \frac{5}{7} + \frac{9}{7} = -\frac{6}{3} + \frac{14}{7} = -2 + 2 = 0$$