1 Vorschule

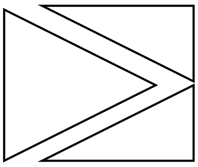
Lösung 113-11

Jonas hat jetzt $3 + 15 = 18$ Bücher.

Lösung 113-12

Bei C und D sind es keine Spiegelbilder.

Lösung 113-13



Lösung 113-14

Die Ameise landet beim Dreieck.

ein Weg zum Kreuz:

$$\rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \downarrow$$

ein Weg zum Kreis:

$$\rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow$$

2 Klassen 1 und 2

Lösung 113-21

Lösung 113-22

a) 102

b) 998

c) 499

Lösung 113-23

In 14 Jahren. Dann ist Anna 24 und ihre Mutter 48.

Lösung 113-24

Es ist möglich. Angenommen, es gibt die Sorten Erdbeer (E), Schoko (S) und Vanille (V). Dann kann man genau 6 verschiedene Eisportionen mit je 2 Kugeln wählen:

EE	ES	EV
SS	SV	
VV		

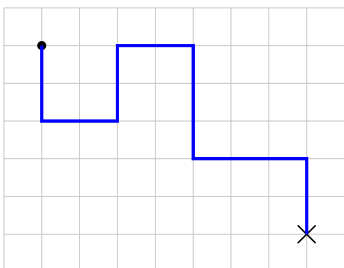
Lösung 113-25

Man muss 3 weiße Kugeln auf die obere Waagschale legen.

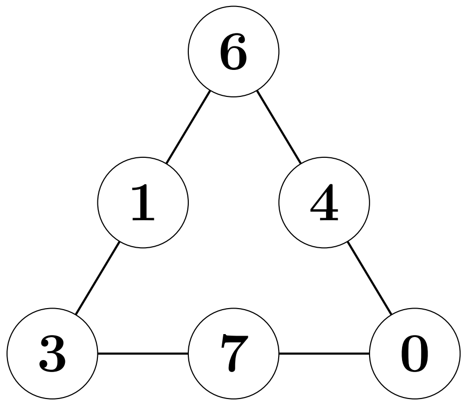
Lösung 113-26

Addiert man alle Preise, dann erhält man das Doppelte dessen, was Sascha bezahlt hat: $16 + 20 + 12 = 48$. Sascha muss 24€ bezahlen.

Lösung 113-27



Lösung 113-28



3 Klassen 3 und 4

Lösung 113-31

Das ist in allen Jahren der Fall, die keine Schaltjahre sind, denn $365 = 52 \cdot 7 + 1$.

Lösung 113-32

Wir unterscheiden 2 Fälle:

Fall 1: Peters Freund hat links die gerade Anzahl. Dann ist das Doppelte dieser Anzahl ebenfalls gerade und das Dreifache der (ungeraden) Anzahl in der rechten Hand ungerade. Die Summe ist dann ungerade.

Fall 2: Peters Freund hat links die ungerade Anzahl. Dann ist das Doppelte dieser Anzahl gerade und das Dreifache der (geraden) Anzahl in der rechten Hand ebenfalls gerade. Die Summe ist dann gerade.

Nennt Peters Freund also ein ungerades Ergebnis, so hatte er die gerade Anzahl Streichhölzer in der linken Hand, nennt er ein gerades Ergebnis, so hatte er eine gerade Anzahl Streichhölzer in der rechten Hand.

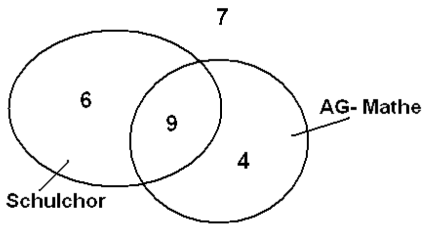
Lösung 113-33

Bei jedem Sprung gewinnt der Hund $9 - 7$ Fuß $= 2$ Fuß an Boden. Er holt den Hasen damit in $150 : 2 = 75$ Sprüngen ein.

Lösung 113-34

$$\square = 6, 7, 8$$

Lösung 113-35



In der Klasse sind 26 Schüler.

Lösung 113-36

Diese Aufgabe kann mit Hilfe einer Tabelle gelöst werden:

Anzahl 50- € - Scheine	**Anzahl 20- € - Scheine**	**Gesamtbetrag in €**
1	8	210
2	7	240
3	6	270
4	**5**	**300**
5	4	330

In jeder Zeile steigt der Gesamtbetrag um 30 € an. Es kann also nur **eine** Lösung geben:

Vier 50- € - Scheine und fünf 20- € Scheine.

Lösung 113-37

Mein Geburtstag ist der 9. März: vom 9. März bis zum 27. Februar sind 10 volle Monate vergangen (März und Februar sind keine vollständigen Monate).

Lösung 113-38

Da das Mädchen mit dem grünen Kleid neben dem Mädchen mit dem hellblauen Kleid steht und das Mädchen mit dem rosa Kleid neben dem Mädchen mit dem weißen Kleid steht, sind für die Kleidfarben nur zwei verschiedene Anordnungen möglich:

grün	rosa
hellblau	weiß

oder

grün	weiß
hellblau	rosa

(Wenn man in Tabelle 1 grün mit hellblau vertauscht, erhält man Tabelle 2 gedreht.)

Nach Aufgabe haben Galja oder Nadja das grüne Kleid an, aber da das Mädchen mit dem grünen Kleid neben Nadja steht, kann nur Galja das grüne Kleid tragen. Nadja trägt entweder das rosa oder das weiße Kleid, da sie dem Mädchen mit dem hellblauen Kleid gegenüber steht.

Walja trägt nicht das weiße Kleid und nicht das rosa Kleid (letzte Aussage im Aufgabentext), folglich also das hellblaue Kleid. Wir wissen jetzt also dies:

grün - Galja	rosa
hellblau - Walja	weiß

oder

grün - Galja	weiß
hellblau - Walja	rosa

Da Walja das hellblaue Kleid trägt, muss das Mädchen mit dem weißen Kleid neben dem Mädchen mit dem hellblauen Kleid stehen (letzte Aussage im Text). Nur die linke Anordnung ist daher noch möglich und es folgt (da Nadja und Walja einander gegenüber stehen müssen)

grün - Galja	rosa - Nadja
hellblau - Walja	weiß - Anja

4 Klassen 5 und 6

Lösung 113-41

Es muss $A < K$ sein, da sonst das Produkt einer einstelligen Zahl mit einer siebenstelligen Zahl nicht neunstellig sein kann. Das Quadrat einer einstelligen Zahl endet nur für 8 und 9 auf eine Zahl, die kleiner ist, als sie selbst:

$$1^2 = 1, 2^2 = 4, 3^3 = 9, 4^4 = 16, 5^5 = 25, 6^6 = 36, 7^7 = 49, 8^8 = 64, 9^9 = 81$$

Also kann K entweder 8 oder 9 sein. Wäre $K = 8$ so müsste $A = 4$ sein, aber 444444444 ist nicht durch 8 teilbar. also ist $K = 9$ und $A = 1$:

$$111111111 : 9 = 2345679$$

Lösung 113-42

Das Wasser aus jeder Quelle ist sowohl Gift als auch Gegengift, je nachdem, zu welchem Zeitpunkt man es trinkt. Iwan kann unmittelbar vor dem Duell aus Quelle 1 trinken. Jedes Wasser aus den Quellen 2 bis 10, welches er Zauberer mitbringen wird, ist dann Gegengift. Iwan muss darauf vertrauen, dass der Zauberer kein Wasser aus Quelle 1 mitbringt.

Lösung 113-43

Alle drei Mädchen aßen zusammen 20 Kekse:

$$2 \cdot (A + B + C) = 11 + 15 + 14 = 40$$

Da A und B zusammen 11 Kekse aßen, muss C 9 Kekse gegessen haben. Da A und C zusammen 14 Kekse gegessen haben, muss A 5 Kekse gegessen haben. Daher aß B 6 Kekse.

Probe:

$$\begin{aligned} A + B &= 5 + 6 = 11 \\ A + C &= 5 + 9 = 14 \\ B + C &= 6 + 9 = 15 \end{aligned}$$

Lösung 113-44

Joris Witte, Klasse 2:

Die Summe von zwei geraden oder zwei ungeraden Zahlen ist gerade. Weil 10 Unterschied sind, sind die blaue und die rote Anzahl entweder beide gerade oder beide ungerade. Weil Robin auch eine gerade Zahl herausgenommen hat, kann keine ungerade Anzahl drin gelegen haben.

Lösung 113-45

Die zweistellige Zahl darf nicht auf 5 enden, denn anderenfalls könnte sie kein Teiler einer nicht auf 5 oder 0 endenden 3stelligen Zahl sein. Von 120 verschiedenen Anordnungen bleiben damit 96 übrig.

Wenn die 3stellige Zahl ungerade ist, muss die zweistellige Zahl ebenfalls ungerade sein. Damit bleiben noch 60 Möglichkeiten.

Gruppe 1			
124	53	145	23
125	43	152	34
132	54	152	43
134	52	154	23
142	53	154	32
Gruppe 2			
214	53	245	13
215	**43**	245	31
234	51	251	43
235	41	253	41
241	53	254	13
243	51	254	31

Gruppe 3			
312	54	345	21
314	52	352	14
352	41	352	41
325	41	354	12
342	51	354	21
Gruppe 4			
412	53	432	51
415	23	435	21
421	53	451	23
423	51	452	13
425	13	452	31
425	31	453	21

Gruppe 5			
512	34	**532**	**14**
512	43	532	41
514	23	534	12
514	32	534	21
521	43	541	23
523	41	542	13
524	13	542	31
524	31	543	21

Überschlagsrechnungen unter Berücksichtigung der Einerstellen des Dividenten und Divisors schließen alle Paare in Gruppe 1 aus. In Gruppe 2 gibt es genau ein Paar, das den Forderungen der Aufgabe genügt: $215 : 43 = 5$. Damit haben wir eine Lösung der Aufgabe gefunden und könnten aufhören. Aber jetzt wollen wir auch wissen, wie viele Lösungen es insgesamt gibt.

Überschlagsrechnungen unter Berücksichtigung der Einerstellen des Dividenten und Divisors schließen alle Paare in den Gruppen 3 und 4 aus. In Gruppe 5 finden wir $532 : 14 = 38$.

Es gibt genau 2 Lösungen: (215,43) und (532,14).

Lösung 113-46

Die Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle ABC$ beträgt mit den üblichen Bezeichnungen $2\alpha + \gamma = 180°$. Wegen $\alpha + \gamma = 110°$ muss $\alpha = 70°$ sein und folglich $\gamma = 40°$. Damit kann das Dreieck wie folgt konstruiert werden: zunächst zeichnet man die Seite AC der Länge 6 cm. In A trägt man eine Gerade an, die mit AC den Winkel 70° einschließt, in C eine Gerade, die mit AC den Winkel 40° einschließt. Diese beiden Geraden schneiden einander im Punkt B.

Das Dreieck ist wegen des Innenwinkelsatzes und des Kongruenzsatzes *wsw* durch die gegebenen Größen eindeutig bestimmt.

Lösung 113-47

Klaus' Aussagen lassen nur 8 oder 9 als Lösung zu. Mit beiden Zahlen wird Reginas Aussage 1 wahr, also muss Reginas Aussage 2 falsch sein. D.h. die gesuchte Zahl ist 8.

Lösung 113-48

Die Kantenlänge des großen Quadrats beträgt 12 cm (wegen $12 \cdot 12 = 144$). Die weiße Fläche besteht aus zwei Dreiecken, die sich zu einem Rechteck mit den Kantenlängen 4cm und 8cm zusammensetzen lassen und zwei Dreiecken, die sich zu einem Quadrat der Kantenlänge 4cm zusammensetzen lassen. Die weiße Fläche hat also einen Flächeninhalt von

$$8\text{cm} \cdot 4\text{cm} + 4\text{cm} \cdot 4\text{cm} = 48\text{cm}^2$$

Der Flächeninhalt des grauen Sechsecks beträgt also

$$144\text{cm}^2 - 48\text{cm}^2 = 96\text{cm}^2$$

5 Klassen 7 und 8

Lösung 113-51

Nikola Kostadinov, Klasse 4

$2019 : 7 = 288$, Rest 3. $2019 - 3 = 2016$ ist die letzte durch 7 teilbare Zahl, die kleiner als 2019 ist.

$2016 : 7 = 288$.

$$7 + 14 + 21 + \ldots + 2002 + 2009 + 2016$$

Von außen nach innen addieren:

$$7 + 2016 = 14 + 2009 = 21 + 2002 = \ldots = 2023$$

Es sind $288 : 2 = 144$ Paare.

$144 \cdot 2023 = 291312$. Die Summe aller durch 7 teilbaren Zahlen bis 2019 ist 291312.

H.W.

Ist S die gesuchte Summe, so gilt $S = 7 \cdot S'$, wobei S' die Summe aller natürlichen Zahlen einschließlich 288 ist $(288 \cdot 7 = 2016)$. D.h.

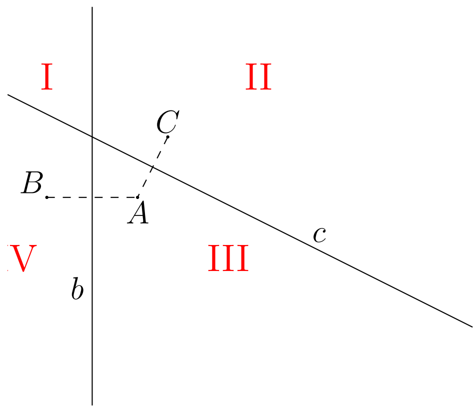
$$S = 7 \cdot \frac{288 \cdot 289}{2} = 291312$$

Lösung 113-52

Wir unterscheiden 2 Fälle:

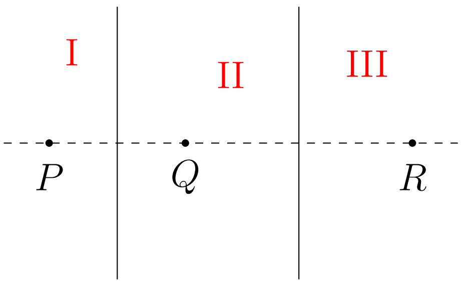
1. Die Punkte A, B und C liegen nicht auf einer Geraden.

2. Die Punkte A, B und C liegen auf einer Geraden.



Wir zeichnen die Mittelsenkrechte b der Strecke AB. Diese teilt die Ebene in 2 Halbebenen. Alle Punkte auf b haben den gleichen Abstand zu A und B. Alle Punkte in der Halbebene, in der Punkt B liegt, aber nicht auf der Mittelsenkrechten b, haben einen kleineren Abstand zu B als zu A.
Wir zeichnen die Mittelsenkrechte c der Strecke AC. Diese teilt die Ebene in 2 Halbebenen. Alle Punkte auf c haben den gleichen Abstand zu A und C. Alle Punkte in der Halbebene, in der Punkt C liegt, aber nicht auf der Mittelsenkrechten c, haben einen kleineren Abstand zu C als zu A.
Im **Fall 1.** sind die Mittelsenkrechten nicht parallel. Sie teilen die Ebene also in 4 Quadranten I, II, III, und IV. Alle Punkte im Inneren der Halbebene (I,IV) haben einen kleineren Abstand von B als von A. Alle Punkte im Inneren der Halbebene (I,II) haben einen kleineren Abstand von C als von A. Für alle Punkte M im Inneren und auf dem Rand von Quadrant I gilt folglich $AM \geq BM$ und $AM \geq CM$. Fall 1 ist damit augeschlossen.

Es gilt also **Fall 2.** In diesem Fall sind die Mittelsenkrechten parallel und unterteilen die Ebene in 3 Teilebenen I, II und III. Da wir noch nicht wissen, wie die Punkte A, B und C zueinander angeordnet sind, wählen wir 3 Punkte P, Q und R auf der Geraden, jeweils im Inneren einer der Teilebenen.

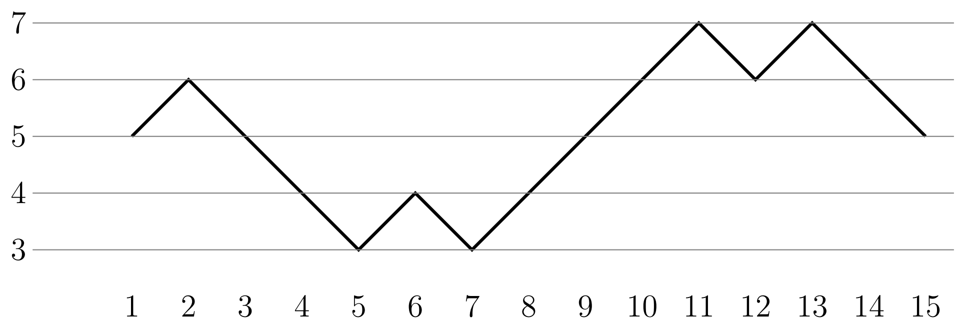


Für alle Punkte M in Teilebene I und Teilebene II, aber nicht auf dem rechten Rand von II gilt $QM < RM$. Für alle Punkte M in Teilebene III und Teilebene II, aber nicht auf dem linken Rand von II gilt $QM < PM$. Daher muss $Q = A$ sein. B und C sind wahlweise gleich P oder R. Die betrachteten Gebiete erfassen **jeden** Punkt M der Ebene.
Liegen die Punkte A, B und C auf einer Geraden, wobei A zwischen B und C liegt, so gilt für jeden Punkt M der Ebene $AM < BM$ oder $AM < CM$.

Die Punkte A, B und C müssen folglich auf einer Geraden liegen, wobei A zwischen B und C liegt.

Lösung 113-53

Bild 20



a) Das Bild zeigt eine grafische Darstellung der Drachenreihe (1 bis 15) und deren Kopfzahlen. Es sind genau 4 listige Drachen und genau 3 starke Drachen mit den geforderten Kopfzahlen.

b) Zwischen zwei listigen Drachen muss immer ein starker Drache stehen. Wenn wir die Drachenreihe entlang laufen und zu einem listigen Drachen gelangen, dann nimmt direkt danach die Anzahl der Köpfe um 1 ab. Läuft man weiter, so muss zu einem bestimmten Zeitpunkt die Anzahl der Köpfe wieder um 1 ansteigen und zwar genau nach der Stelle, an der ein starker Drachen steht.

Einer der starken Drachen muss zwischen den beiden listigen Drachen mit 7 Köpfen stehen. Die beiden anderen starken Drachen stehen dann entweder auf der gleichen Seite des 767-Tripels (wie im Beispiel a)) oder auf verschiedenen Seiten dieses Drachentripels. Für die Anordnung der Drachen gibt es daher folgende Fälle:

Fall 1: . . . 6 . . . 343 . . . 767 . . .

Anz. Köpfe	5	**6**	5	4	**3**	**4**	**3**	4	5	6	**7**	**6**	**7**	6
Position	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

In diesem Fall ist die Anordnung der Drachen den Vorgaben entsprechend bis zur Position 14 gezeigt. Der Drache an der Position 15 muss genau 5 Köpfe haben, da es sonst 4 starke Drachen wären.

Fall 2: . . . 43 . . . 6 . . . 3 . . . 767 . . .

Anz. Köpfe	3	**4**	**3**	4	5	**6**	5	4	**3**	4	5	6	**7**	**6**	**7**	6
Position	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Fall 3: . . . 43 . . . 767 . . . 3 . . . 6 . . .

Anz. Köpfe	3	**4**	**3**	4	5	6	**7**	**6**	**7**	6	5	4	**3**	4	5	**6**	5
Position	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

Die Fälle 2 und 3 sind nicht möglich, da eine solche Anordnung der Drachen mehr als 15 Drachen erforden würde. Damit ist gezeigt, dass der erste und der letzte Drachen gleich viele Köpfe haben müssen.

Lösung 113-54

Die gegebene Folge wird gebildet als

$$a_n = 5n, n \in \mathbb{N}_0$$

Es sei $\overline{b_k b_{k-1} \cdots b_1 b_0}$, $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$, $0 \leq b_{k-1}, \ldots, b_1, b_0 \leq 9$, $1 \leq b_k \leq 9$, die erste Zahl der Folge mit Quersumme 45, also

$$b_k + b_{k-1} + \cdots + b_1 + b_0 = 45$$

Dabei gilt $b_0 \in \{0, 5\}$.

Für $b_0 = 0$ erhält man als kleinste Zahl mit Quersumme 45 die 999990.

Falls $b_0 = 5$ ist, muss gelten

$$b_k + b_{k-1} + \cdots + b_1 = 40$$

Die Zahl ist am kleinsten genau dann, wenn die Anzahl der Stellen minimal wird und die Startziffer am kleinsten ist. Dies gilt wegen $40 = 4 \cdot 9 + 4$ für 49999. Die Zahl 499995 gehört zu der gegebenen Zahlenfolge, hat die Quersumme 45 und ist kleiner als 999990. Sie ist damit die kleinste Zahl der gegebenen Fole mit Quersumme 45. Wegen $499995 = 5 \cdot 99999$ ist 499995 das 100000. Element der Folge. (Die Folge beginnt mit $n = 0$)

Zusatz:

Eine Zahl ist genau dann durch 36 teibar, wenn sie durch 4 und durch 9 teilbar ist. Ist ihre Quersumme gleich 27, dann ist sie schon einmal durch 9 teilbar. Weiter sind alle Elemente der gegebenen Zahlenfolge, die auf 00, 20, 40, 60 und 80 enden, durch 4 teilbar. Die Zahl kann umso kleiner werden, je dichter die Quersumme der beiden Endziffern an 27 liegt. Das ist bei 80 der Fall. Die kleinste Zahl, die zur gegebenen Folge gehört, die Quersumme 27 hat und durch 36 teilbar ist, ist folglich die 19980. Mit allen anderen Endziffern sind nur größere Zahlen erreichbar. Das gesuchte Element ist also das 3997te Folgenelement.

Lösung 113-55

Teil 1:

Aus den Voraussetzungen über a und b folgt

$$\frac{1}{a} \leq \frac{1}{2} \quad , \quad \frac{1}{b} \leq \frac{1}{2}$$

also

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq 1$$

Multiplikation mit ab ergibt die behauptete Ungleichung.

Teil 2:

Wir zeigen, dass Gleichheit genau dann gilt, wenn a = b = 2 ist. Falls $a = b = 2$ ist, dann ist offensichtlich $a + b = 4 = ab$. Die gegebene Gleichung ist äquivalent mit

$$a = 1 + \frac{1}{b-1}$$

Falls $b > 2$ ist, ist der zweite Summand kleiner als 1, also $a < 2$, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Lösung 113-56

Jeder der 4 Jungen kauft 6 Eier.

Am einfachsten findet man die Lösung mittels folgender Gleichung, wobei x die Gesamtzahl der verkauften Eier sei:

$$x = \left(\frac{x}{2} - 6\right) + \frac{x}{4} + \left(\frac{x}{3} - 2\right) + \left(\frac{x}{8} + 3\right)$$

6 Klassen 9 bis 13

Lösung 113-61

Wir setzen hier die Gaußsche Summenformel (Summe der ersten N natürlichen Zahlen) sowie die Formel für die Summe der ersten N Quadratzahlen als bekannt voraus:

$$1 + 2 + \cdots + N = \frac{n(n+1)}{2} \text{ und } 1^2 + 2^2 + \cdots + N^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

Beide lassen sich z.B. durch vollständige Induktion beweisen. Nach Definition der arithmetischen Folge gilt

$$x_k = x_1 + (k-1)d, \quad k \in \{1, \dots, n\}$$

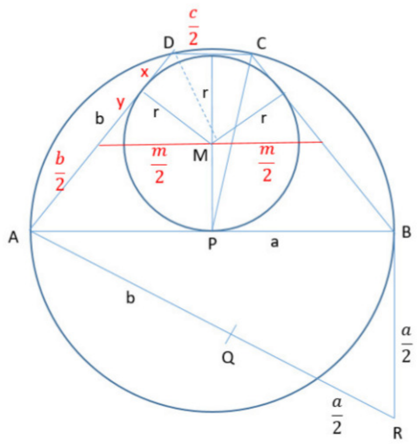
mit einer reellen Zahl d, womit für S_n folgt

$$\begin{aligned}
S_n &= x_1^2 + (x_1+d)^2 + \cdots + (x_1+(n-1)d)^2 \\
&= nx_1^2 + 2dx_1(1+2+\cdots+(n-1)) + (1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2) \\
&= nx_1^2 + (n-1)ndx_1 + \frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6}d^2 \\
&= n\left(x_1^2 + (n-1)dx_1 + \frac{2(n-1)^2+n-1}{6}d\right) \\
&= n\left(x_1^2 + (n-1)d\left(x_1 + \frac{2n-1}{6}d\right)\right)
\end{aligned}$$

Lösung 113-62

U.Willrett:

Das Trapez $ABCD$ ist gleichschenklig, weil AB parallel CD ist, C und D auf dem Kreisbogen über P liegen und der Kreisbogen über AB achsensymmetrisch zur Gerade durch die Punkte P und M ist.



$$\begin{aligned}
4r^2 + \frac{c^4}{4} = \frac{a^4}{4} \quad &\rightarrow \quad 4r^2 = \frac{1}{4}\left(a^4 - c^4\right) && (1) \\
r^2 + \frac{c^4}{4} = r^2 + x^2 \quad &\rightarrow \quad \frac{c}{2} = x && (2) \\
y = b - \frac{b}{2} - x \quad &= \quad \frac{1}{2}(b-c) && (3) \\
b^2 \quad &= \quad \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + 4r^2 && (4) \\
\frac{m}{2} \quad &= \quad \frac{1}{4}(a+c) && (5)
\end{aligned}$$

$$r^2 + y^2 = \left(\frac{m}{2}\right)^2$$

mit (3) und (5) folgt

$$r^2 + \frac{1}{4}(b-c)^2 = \frac{1}{16}(a+c)^2$$

Mit (4):

$$16r^2 + \frac{16}{4}\left(\frac{1}{4}(a-c)^2\right) + 4r^2 - 2c\sqrt{\frac{1}{4}(a-c)^2 + 4r^2} + c^2 = (a+c)^2$$

Mit (1):

$$\begin{aligned}
a^2 - c^2 + a^2 - 2ac + c^2 + a^2 - c^2 - 4c\sqrt{2a(a-c)} + 4c^2 &= (a+c)^2 \\
2a^2 - 4ac + 2c^2 &= 4c\sqrt{2a(a-c)} \\
(a-c)^2 &= 2c\sqrt{2a(a-c)} \\
(a-c)^3 &= 8ac^2
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$(c+a)(c^2+4ac-a^2)=0$$

Die einzige Lösung (>0) ergibt sich aus

$$(c^2+4ac-a^2)=0$$

D.h.

$$c \;=\; a(\sqrt{5}-2) \tag{6}$$

Zur Konstruktion:

Aus (5) und (6) erhält man $m=\frac{1}{2}a(\sqrt{5}-1)$

Aus (4), (1) und (6) erhält man $b=\frac{1}{2}a(2(3-\sqrt{5})-1)$ Nun ist aber

$$\sqrt{5}-1=\sqrt{(2(3-\sqrt{5})}$$

denn

$$\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}=\sqrt{(6-2\sqrt{5})}$$

und

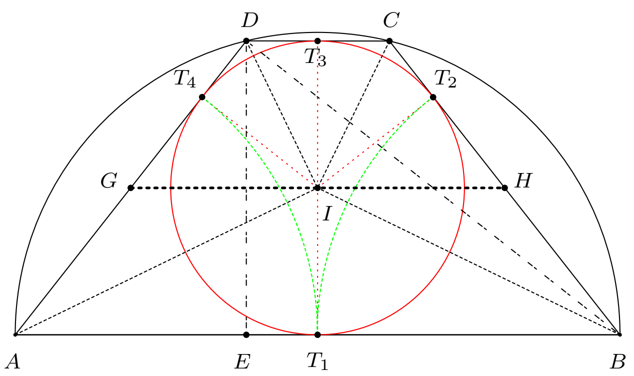
$$\sqrt{(2(3-\sqrt{5})}=\sqrt{(6-2\sqrt{5})}$$

D.h.

$$m=b=\frac{1}{2}a(\sqrt{5}-1)$$

Dabei ist $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ das Verhältnis des Goldenen Schnitts. Konstruktion der Strecke $b=AQ$ siehe obere Zeichnung. Der Kreis um R mit dem Radius $\frac{a}{2}$ schneidet AQ in Q. Dabei ist $AQ=\frac{1}{2}a(\sqrt{5}-1)$.

U.Warnecke:



Aus einer schon „fertigen“ Figur liest man ab:
$|AT_1|=|AT_4|=|BT_1|=|BT_2|=\frac{1}{2}a$,
$|DT_4|=|DT_3|=\frac{1}{2}|CD|=\frac{1}{2}c$,
$b\stackrel{\text{def}}{=}|AD|=|BC|$,
$\rho\stackrel{\text{def}}{=}|T_1I|=|T_2I|=|T_3I|=|T_4I|$.

Nun gilt

$$\begin{aligned} m\stackrel{\text{def}}{=}|GH|&=\frac{1}{2}(a+c)=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}c\\ &=|AT_4|+|DT_4|=|AD|=b. \end{aligned}$$

Weiter sei $\alpha\stackrel{\text{def}}{=}|\angle BAD|$ und $\delta\stackrel{\text{def}}{=}|\angle ADC|$. Man erkennt jetzt, dass die Dreiecke $\triangle AT_1I,\ \triangle IT_3D$ und $\triangle AID$ ähnlich sind; denn
$|\angle AIT_1|=90\,°-\frac{1}{2}\alpha,\ |\angle T_3ID|=90\,°-\frac{1}{2}\delta$, sodass $|\angle AIT_1|+|\angle T_3ID|=180\,°-\frac{1}{2}(\alpha+\delta)=180\,°-\frac{1}{2}\cdot 180\,°=90\,°$,
und hieraus folgt $|\angle DIA|=90\,°$.
Nach dem Höhensatz des Euklid gilt daher $|T_4I|^2=|AT_4|\cdot|DT_4|$, anders geschrieben

$\rho^2 = \frac{a}{2} \cdot \frac{c}{2}$, d. h. $\rho = \frac{1}{2}\sqrt{ac}$.
Schließlich hat man noch $|DE| = |T_1T_3| = 2\rho$ und $|BE| = |BT_1| + |ET_1| = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}(a + c)$. Nach der Methode „Berechne auf zwei verschiedene Weisen, und setze dann gleich“ findet man jetzt einerseits

$$|BD|^2 = |DE|^2 + |BE|^2 = (2\rho)^2 + \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 = ac + \frac{a^2+2ac+c^2}{4} = \frac{1}{4}(a^2+6ac+c^2)$$

und andererseits (da D auf dem THALES-Kreis über AB, so $|\angle ADB| = 90\,°$)

$$|BD|^2 = |AB|^2 - |AD|^2 = a^2 - \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2+2ac+c^2}{4} = \frac{1}{4}(3a^2-2ac-c^2)$$

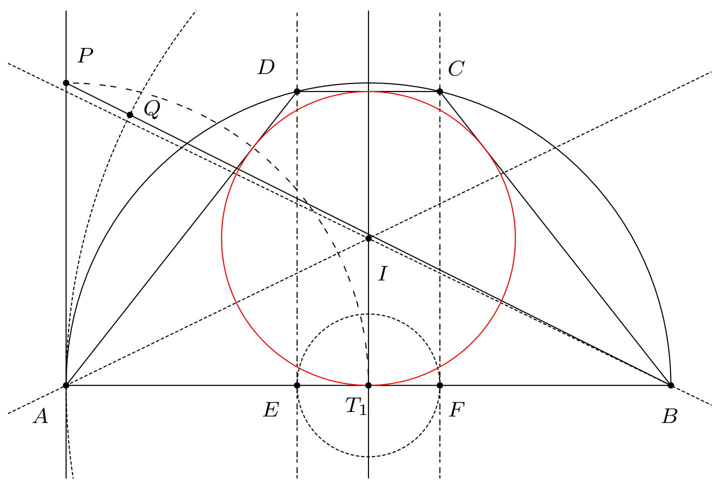
Gleichsetzung der Ergebnisse liefert

$$\begin{aligned} a^2+6ac+c^2 &= 3a^2-2ac-c^2 \\ 2c^2 &= 2a^2-8ac \\ c^2+4ac-a^2 &= 0 \\ c &= -2a \pm \sqrt{4a^2+a^2} \\ c &= (-2 \pm \sqrt{5})a \end{aligned}$$

Da c als Seitenlänge einen positiven Wert haben muss, kommt nur $c = (-2+\sqrt{5})a \approx 0,2361 \cdot a$ in Betracht.
Dieses Ergebnis liefert auch den Radius des Inkreises:

$$\rho = \frac{1}{2}\sqrt{ac} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2(-2+\sqrt{5})} = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{5}-2} \cdot a \approx 0,2429 \cdot a.$$

Mittels dieser Werte kann die gestellte Konstruktionsaufgabe leicht bewerkstelligt werden.



Gegeben ist die Strecke AB mit $|AB| = a$ und der Halbkreisbogen über AB. T_1 sei der Mittelpunkt von AB.
1. Senkrechte zu AB in A errichten.
2. Der Kreis $k_1(A, |AT_1|)$ schneidet die Senkrechte im Punkt P; P mit B verbinden. ($|BP| = \sqrt{5} \cdot \frac{a}{2}$.)
3. Der Kreis $k_2(B, |AB|)$ schneidet BP im Punkt Q. ($|PQ| = (\sqrt{5}-2)\frac{a}{2} = \frac{c}{2}$.)
4. Der Kreis $k_3(T_1, |PQ|)$ schneidet AB in den Punkten $E(\in AT_1)$ und $F(\in BT_1)$. ($|EF| = c$.)
5. Die Senkrechten zu AB in E und in F schneiden den Halbkreisbogen über AB in den Punkten D bzw. C.
6. Der Schnittpunkt I der Halbierenden der Winkel $\angle BAD$ und $\angle CBA$ ist Mittelpunkt des Inkreises (Radius $\rho = |T_1I| = \frac{1}{2}\sqrt{ac}$) des Trapezes $ABCD$.

Lösung 113-63

U.Warnecke:

Wie man als Erstes erkennt, haben x und y gleiche Parität; überdies sind x und y ungerade Zahlen; denn wären x und y gerade, so wäre y^2 durch 4 teilbar, nicht aber y^2+2 und damit auch x^3 nicht durch 4 teilbar, was aber der Teilbarkeit von x^3 durch 4 für gerades x widerspräche. Also sind x und y beide ungerade.
Die Situation werde ab jetzt betrachtet im Integritätsring $\mathbb{Z}[\sqrt{2}\,i] = \{a+\sqrt{2}\,i\,b \,\big|\, (a;b) \in \mathbb{Z}^2\}$; er ist faktoriell (auch ZPE-Ring genannt) und Hauptidealring; seine einzigen Einheiten sind $1, -1, i, -i$. Daher kann man schreiben

$$x^3 = y^2+2 = (y+\sqrt{2}\,i)(y-\sqrt{2}\,i).$$

Sei d ein Teiler von $y+\sqrt{2}\,i$ und von $y-\sqrt{2}\,i$; dann gilt auch $d \,\big|\, ((y+\sqrt{2}\,i)-(y-\sqrt{2}\,i))$. Das bedeutet, dass irgend ein Teiler von $y+\sqrt{2}\,i$ und von $y-\sqrt{2}\,i$ auch ein Teiler von $y+\sqrt{2}\,i$ und von $2\sqrt{2}\,i$ ist. Ebenso ist irgend ein Teiler von $y+\sqrt{2}\,i$ und von $2\sqrt{2}\,i$ auch ein Teiler von $y+\sqrt{2}\,i$ und von $y-\sqrt{2}\,i$. Das hat zur Folge

$$\mathrm{ggT}(y+\sqrt{2}\,i;\ y-\sqrt{2}\,i) = \mathrm{ggT}(y+\sqrt{2}\,i;\ 2\sqrt{2}\,i) = \mathrm{ggT}(y+\sqrt{2}\,i;\ (\sqrt{2}\,i)^3).$$

(Eigentlich ist $(\sqrt{2}\,i)^3 = -2\sqrt{2}\,i$; aber hinsichtlich Teilbarkeit spielt das Vorzeichen hier keine Rolle.)
$\sqrt{2}\,i$ ist irreduzibel. Angenommen, dass $\sqrt{2}\,i \,\big|\, (y+\sqrt{2}\,i)$, so hätte man

$$y+\sqrt{2}\,i = \sqrt{2}\,i\,(a+\sqrt{2}\,i\,b) = -2b+\sqrt{2}\,i\,a.$$

Also wäre $a=1$ und $y=-2b$ und demnach y eine gerade Zahl im Widerspruch zum eingangs gemachten Nachweis, dass x und y beide ungerade sind. Somit muss man davon ausgehen, dass $\sqrt{2}\,i$ kein Teiler von $y+\sqrt{2}\,i$ ist:

$$\mathrm{ggT}(y+\sqrt{2}\,i;\ \sqrt{2}\,i) = 1 \quad \text{und} \quad \mathrm{ggT}(y+\sqrt{2}\,i; y-\sqrt{2}\,i) = 1.$$

1. Variante
Nun benutzt man die eindeutige Faktorisierbarkeit der folgenden beiden konjugierten Elemente in $\mathbb{Z}[\sqrt{2}\,i]$:

$$y+\sqrt{2}\,i = z_1 z_2 \dots z_n \quad \text{und} \quad y-\sqrt{2}\,i = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \dots \bar{z}_n.$$

Aus $\mathrm{ggT}(y+\sqrt{2}\,i;\ y-\sqrt{2}\,i) = 1$ folgt $z_j \neq \bar{z}_k$ für jedes Indexpaar $(j;\ k) \in \{1;2;\dots;n\}^2$. Zusammen mit $x^3 = (y+\sqrt{2}\,i)(y-\sqrt{2}\,i)$ bedeutet dies, dass jeder Faktor z_j dreimal in der Faktorisierung vorkommt. Daher gibt es $(a;\ b) \in \mathbb{Z}^2$ mit $y+\sqrt{2}\,i = (a+\sqrt{2}\,i\,b)^3 = (a^3-6ab^2)+\sqrt{2}\,i\,b(3a^2-2b^2)$.
Insbesondere liefert dies $b(3a^2-2b^2)=1$, und das heißt

$$(b=1 \ \wedge\ 3a^2-2b^2=1) \ \vee\ (b=-1 \ \wedge\ 3a^2-2b^2=-1).$$

Der zweite der beiden Fälle liefert $3a^2=1$, für den es keine ganzzahlige Lösung gibt. Deshalb bleibt nur $b=1$ und $a^2=1$, und Letzteres heißt $a=1 \vee a=-1$.
Schließlich ist dann

$$y+\sqrt{2}\,i = (\pm 1+\sqrt{2}\,i)^3 = \pm 5+\sqrt{2}\,i$$

und damit $y = 5$ oder $y = -5$.
Setzt man diese Werte in $x^3 = y^2 + 2$ ein, so erhält man beide Male $x^3 = 27$, d. h. $x = 3$.
Die Lösungsmenge der gegebenen Gleichung ist somit $\{(3; 5); (3; -5)\}$.

2. Variante

Wegen der eindeutigen Primfaktorzerlegung in $\mathbb{Z}[\sqrt{2}\,i]$ und wegen der Teilerfremdheit von $y + \sqrt{2}\,i$ und $y - \sqrt{2}\,i$ ist $y + \sqrt{2}\,i$ bis auf eine Einheit, also bis auf das Vorzeichen, eine dritte Potenz:

$$\begin{aligned} y + \sqrt{2}\,i &= \pm(x_1 + x_2\sqrt{2}\,i)^3 \\ &= \pm(x_1^3 + 3x_1^2x_2\sqrt{2}\,i - 3x_1 \cdot 2x_2^2 - x_2^3 \cdot 2\sqrt{2}\,i) \\ &= \pm(x_1(x_1^2 - 6x_2^2) + x_2(3x_1^2 - 2x_2^2) \cdot \sqrt{2}\,i). \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt daraus

$$\begin{aligned} 1 &= \pm x_2(3x_1^2 - 2x_2^2), \\ y &= \pm x_1(x_1^2 - 6x_2^2), \end{aligned}$$

und aus der ersten dieser beiden Gleichungen erhält man $(x_2 = x_1 = 1) \vee (x_2 = x_1 = -1)$ und damit aus der zweiten Gleichung $(x_1 = x_2 = 1 \wedge y = -5) \vee (x_1 = x_2 = -1 \wedge y = +5)$, sodass für $y = 5$ sowie auch für $y = -5$

$$x^3 = 25 + 2 \;\Leftrightarrow\; x = 3.$$

Wie in der 1. Variante ist die Lösungsmenge der gegebenen Gleichung somit $\{(3; 5); (3; -5)\}$.

Lösung 113-64

Es sei

$$N = 2^k \cdot p_2^{q_2} \cdots p_n^{q_n}$$

die Primfaktorzerlegung von N, wobei $p_2, \ldots, p_n$ die ungeraden Primfaktoren von N seien. Alle Teiler einer Potenz einer Primzahl p^q sind $1, p, p^2, \ldots, p^q$. D.h. $1, 2, 2^2, \ldots, 2^k$ sind die Teiler des Elements 2^k der Primfaktorzerlegung von N und diese Teiler erzeugen in Kombination mit den ungeraden Teilern der Zahl N alle geraden Teiler der Zahl N. Daraus folgt: sei U die Summe aller ungeraden Teiler von N, dann ist $(2 + 2^2 + \ldots + 2^k)U$ die Summe aller geraden Teiler von N. Das Produkt ist folglich gleich

$$(2 + 2^2 + \ldots + 2^k)U^2 \tag{1}$$

Die 2 geht in U^2 mit gerader Potenz ein (möglicherweise mit Potenz 0), in $2+2^2+\ldots+2^k = 2(1 + \ldots + 2^{k-1}) = 2(2^k - 1)$ aber mit Potenz 1, so dass $2 + 2^2 + \ldots + 2^k$ nicht durch 4 teilbar ist. Damit ist (1) keine Quadratzahl.