1 Vorschule

Lösung 114-11

Da eine Woche 7 Tage hat, hat sie dann $6 \cdot 7 = 42$ Vanille- Joghurts gegessen.

Lösung 114-12

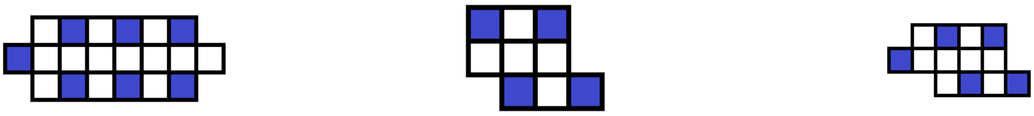
3 Mal

Lösung 114-13

Pia hat 17 Ostereier gefunden, Leo 18.

Lösung 114-14

Es gibt hier verschiedene Möglichkeiten. Eine ist diese:



2 Klassen 1 und 2

Lösung 114-21

x	y	$x+y$	$x+15$	$y-4$	$x+y-7$
8	6	**14**	**23**	**2**	**7**
12	9	**21**	**27**	**5**	**14**
23	10	**33**	38	**6**	**26**
15	**35**	50	30	**31**	**43**
32	**20**	**52**	**47**	16	45

Lösung 114-22

Justus schafft in einer Stunde 12 km: $12 + 12 + 12 = 3 \cdot 12 = 36$.

Eine Stunde kann man in 3 mal 20 Minuten einteilen. Daher schafft Hannes $5 \cdot 3 = 15$ Kilometer in einer Stunde.

Lösung 114-23

Als Summe kommen nur 9, 8, 7 und 6 in Frage, weil es für Summen kleiner als 5 nicht mehr 3 verschiedene Summanden gäbe. Wir zählen also alle verschiedenen Zerlegungen der Zahlen 9, 8, 7 und 6 in 3 verschiedene Summanden:

$$\begin{aligned} 6 &= 1+2+3 \\ 7 &= 1+2+4 \\ 8 &= 1+2+5 \\ &= 1+3+4 \\ 9 &= 1+2+6 \\ &= 1+3+5 \\ &= 2+3+4 \end{aligned}$$

Es gibt nur 7 Möglichkeiten. Anton hat also 7 verschiedene Farben verwendet.

Lösung 114-24

16	2	**3**	**13**
5	**11**	10	**8**
9	**7**	**6**	**12**
4	14	**15**	1

Lösung 114-25

Lila kauft die gleichen Buchstaben wie Li und La zusammen. Sie bezahlt also so viel wie Li und La zusammen, nämlich 80 Cent.

Lösung 114-26

a) $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

b) $x \in \{0, 1, 2, 3\}$

c) $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

d) $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Lösung 114-27

Aus jedem Stab erhält Jan durch Zersägen 5 Stücke der Länge 10 cm. Das sind zusammen 20 Stücke. Jeden Stab zersägt Jan dazu 4 Mal. Er führt also insgesamt 16 Schnitte aus.

Lösung 114-28

a) Weil immer 2 Seiten vom Würfel, die gegenüber liegen, 7 ergeben und davon gibt es 6 bzw. 12 sichtbare Seiten an der Seite. Deswegen muss man rechnen $6 \cdot 7$. Das sind 42 plus die Zahl oben drauf, von 1 bis 6. Das ergibt 43 bis 48 Augenzahlen.

b) Ich rechne 42 plus die Zahl oben. Dann habe ich das Ergebnis.

3 Klassen 3 und 4

Lösung 114-31

4000000cm = 40000m = 40km.

a)

Landstraße: 20km.

Bundesstraße: 80km.

A3: 200km

A98: 160km.

Straße in München: 20km

Die Famile ist 480km gefahren.

b)

Landstraße: 15 min

Bundesstraße: 40 min

A3: 1h 20min

A98: 1h

Straße in München: 30min

Die Fahrt dauerte 3h und 45min.

$4 \cdot 5 = 20$ Für 400km werden 20 Liter Diesel benötigt. $100 : 5 = 20$, $20 \cdot 4 = 80$ Für 80 km werden 4 Liter Diesel benötigt. Insgesamt sind das 24 Liter Diesel. $24 \cdot 1,2 = 28,80$ Der Diesel kostet 28,80 Euro.

Lösung 114-32

Edward Franz, Klasse 3:

$$\frac{15}{240} = \frac{5}{8} = \frac{1}{16}$$

Der 16. Teil der Kinder besucht die Modelleisenbahn-AG.

Anderer Rechenweg:

$$240 : 15 = 16$$

Lösung 114-33

Sind in einem Rechteck alle Seiten gleich lang, ist es ein Quadrat.

Lösung 114-34

Tonja muss 4 Kisten Äpfel und 5 Kisten Orangen kaufen. Dann hat sie von jeder Sorte 60 Stück.

Lösung 114-35

a)	4	20	36	52	68	**84**	**100**	116	immer $+16$
b)	200	175	150	125	100	**75**	**50**	2	immer -25
c)	5	10	20	40	50	**100**	**110**	220	abwechselnd $\cdot 2, +10$

Lösung 114-36

Abkürzung der Namen mit Anfangsbuchstaben, > - „mehr Punkte als“.

(1) $D > G$ (wegen (a))

(2) $A > C > B$ (wegen (b))

(3) $E = 4$ (wegen (c))

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
F	D	G	E	A	C	B

(4) $A \neq 1, D \neq 1$ (wegen (d) und (e))

Wegen (2), (3) und (4) kann nur $A = 5, C = 6$ und $B = 7$ gelten. Da D nicht 1. ist (4), muss wegen (1) D Zweite und G Dritte sein. Folglich gewann F.

Die Reihenfolge lautet also

Fabienne, Dorothea, Gesa, Elisa, Anna, Carola, Bernicia.

Lösung 114-37

	x	y	z	$x \cdot (y + z)$	$x \cdot (y - z)$
a)	3	2	1	**9**	**3**
b)	**0**	7	4	**0**	0
c)	3	5	**5**	**30**	0
d)*	2	**8**	**2**	20	12

Lösung 114-38

Netz a)

4 Klassen 5 und 6

Lösung 114-41

Wenn die Ampel 18 Mal gelb gezeigt hat, dann hat sie zuvor insgesamt 8 Mal grün und 9 Mal rot gezeigt. Das Ganze fand in der Zeit von $17 \cdot 60 = 1020$ Sekunden statt. Sei x die Dauer der Gelbphase in Sekunden, dann dauert eine Rotphase $4 \cdot x$ Sekunden und eine Grünphase $6 \cdot x$ Sekunden und es gilt

$$18 \cdot x + 9 \cdot 4 \cdot x + 8 \cdot 6 \cdot x = 1020 \text{ bzw. } 102 \cdot x = 1020 \text{ also } x = 10$$

Eine Gelbphase dauert genau 10 Sekunden.

Lösung 114-42

In den Zahlen 5, 10, 15, 20, 30, 35, 40, 45, 55, 60, 65, 70, 80, 85, 90 und 95 kommt 5 genau einmal als Faktor vor. In 25, 50, 75 und 100 kommt die 5 genau zweimal als Faktor vor. Insgesamt kommt der Primfaktor 5 im Produkt der ersten 100 natürlichen Zahlen genau 24 mal als Faktor vor. Da die 2 in diesem Produkt mindestens 24 mal als Primfaktor vorkommt, endet das Produkt mit genau 24 Nullen.

Lösung 114-43

Wir nehmen an, es seien 5 Zeilen und 8 Spalten und Anja hätte eine mögliche Verteilung der Ziffern 0 bis 9 auf die 40 Zellen gefunden.

Für die Anordnung der Reihen gibt es 3 Möglichkeiten, wobei die gleichen Ziffern jeweils in den Zellen stehen, in denen die Zeilen und Spalten einander schneiden.

1. genau 2 Zeilen und genau 2 Spalten: genau 4 Schnittzellen

2. genau 3 Zeilen und genau 1 Spalte: genau 3 Schnittzellen

3. genau 1 Zeile und genau 3 Spalten: genau 3 Schnittzellen

Da es genau 10 verschiedene Ziffern sind und genau 40 Zellen, sind die Anordnungen 2 und 3 nicht möglich, denn es kämen einige Ziffern nur 3 Mal vor, so dass andere Ziffern mehr als 4 Mal vorkommen müssten und damit in mehr als 4 Reihen stünden.

Das bedeutet, dass in jeder Spalte gleiche Ziffern paarweise auftreten müssen. Da es aber eine ungerade Anzahl Zeilen sind, ist dies nicht möglich.

Lösung 114-44

Wegen $22+30 = 52$ und $52-40 = 12$ hielten 12 Kinder sowohl einen Jungen als auch eine Mädchen an der Hand. Folglich hielten $30 - 12 = 18$ Kinder nur Mädchen an der Hand. Das sind $18 \cdot 2 = 36$ Mädchenhände. Das sind insgesamt $36 + 12 = 48$ Mädchenhände, also 24 Mädchen.

Lösung 114-45

Es seien a und b die beiden gesuchten Zahlen. Da die Addition kommutativ ist, können wir annehmen, dass Tina an die Zahl a eine 0 angehängt hat. Sie hat dieses Zahl dadurch verzehnfacht, also statt

$$a + b = 2019 \text{ hat sie } 10 \cdot a + b = 3828$$

gerechnet. Daher muss $9 \cdot a = 3828 - 2019 = 1809$ sein, d.h. $a = 201$ und folglich $b - 2019 - 201 = 1818$.

Probe:

$$201 + 1818 = 2019, \quad 2010 + 1818 = 3828$$

Die Zahlen waren 201 und 1818.

Lösung 114-46

Eine mögliche Verteilung der Eier ist:

Nest 1	4 rote	5 gelbe	7 blaue	8 violette
Nest 2	5 rote	8 gelbe	4 blaue	7 violette
Nest 3	7 rote	4 gelbe	8 blaue	5 violette

Lösung 114-47

Jede zweistellige natürliche Zahl z kann man darstellen als

$$z = 10a + b$$

mit $a, b \in \mathbb{N}$, $1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$. Die Quersumme von z ist dann gleich $a + b$, das Querprodukt gleich $a \cdot b$. Nach Aufgabenstellung gilt für den gesuchten Geheimcode

$$z = 10a + b = a + b + ab$$

Daraus folgt durch äquivalente Umformung

$$(9 - b) \cdot a = 0$$

Diese Gleichung ist wegen $a \neq 0$ für $b = 9$ und jedes a mit $1 \leq a \leq 9$ erfüllt.

Alle zweistelligen natürlichen Zahlen mit Einerziffer 9 kommen also für den Geheimcode in Frage.

Lösung 114-48

Thekla Hamm, 11 Jahre, Klasse 5:

Lösung: Sascha wohnt in der 3. Etage.

Erklärung: In einem Aufgang gibt es n Wohnungen. Die erste Wohnung im ersten Aufgang trägt die Nummer 1. Die letzte Wohnung im 1. Aufgang trägt die Nummer n. Im nächsten Aufgang beginnt die Nummerierung mit $n + 1$ und endet mit $2n$. So geht es dann immer weiter. Der 10. Aufgang beginnt dann mit $9n + 1$. Also ist $9n + 1 \leq 333$ und $333 \leq 10n$.

Dann liegt also n zwischen 33 und 37. Weil in jedem Aufgang 9 Etagen sind, muss n durch 9 teilbar sein. Das geht nur für $n = 36$. Dann gibt es in jedem Aufgang in jeder Etage 4 Wohnungen. Im 10. Aufgang fängt es in der 1. Etage links mit 325 an. Wenn man weiter zählt, liegt 333 in der 3. Etage.

5 Klassen 7 und 8

Lösung 114-51

$$\begin{aligned}a^4 - b^2(a^2+1) + b^2 &= a^4 - b^2(a^2+1-1)\\ &= a^4 - a^2b^2\\ &= a^2(a^2-b^2)\\ &= a^2(a+b)(a-b)\end{aligned}$$

Lösung 114-52

Keine der 3 Zahlen ist eine Primzahl.

Die Einerziffer der Potenzen einer auf 9 endenden Zahl ist abwechselnd 9 (bei ungeraden Exponenten) und 1 (bei geraden Exponenten). Daher ist die Einerziffer von 2019^{2019} gleich 1 und die Einerziffer von 19^{20} eine 9.

Die Einerziffer der Potenzen einer auf 4 endenden Zahl ist abwechselnd 4 (bei ungeraden Exponenten) und 6 (bei geraden Exponenten). Daher ist die Einerziffer von 14^3 gleich 4.

Die erste der 3 Zahlen endet folglich mit 5, ist also keine Primzahl.

Die Zahl $20^{19} - 19^{20}$ ist durch 3 teilbar, denn $20 \equiv 2(3)$ und $19 \equiv 1(3)$, so dass die Summe in der Restklasse 0 modulo 3 liegt. Diese Zahl ist also ebenfalls keine Primzahl. $2019^{2019} - 20^{19}$ ist durch 7 teilbar:

Lösung 114-53

U.Warnecke:

Da x und y im Nenner vorkommen, müssen beide von Null verschieden sein. Umformung der Gleichungen liefert

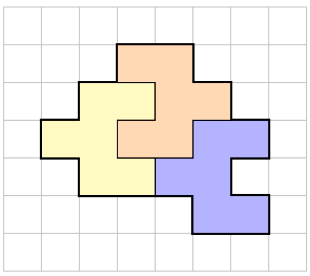
$$xy + 1 = 11y \quad \text{und} \quad xy + 1 = 13x.$$

Multiplikation dieser beiden Gleichungen ergibt

$$(xy+1)^2 = 143xy \;\Leftrightarrow\; (xy)^2 + 2xy + 1 = 143xy \;\Leftrightarrow\; (xy)^2 + 1 = 141xy,$$

und Division der letzten Gleichung durch xy bringt das gesuchte Ergebnis $xy + \frac{1}{xy} = 141$.

Lösung 114-54



Lösung 114-55

Es ist möglich, indem man zunächst dreimal vorbei wirft und anschließend einmal trifft. Das sieht man am einfachsten, indem man die 8019 Punkte in Faktoren zerlegt:

$$8019 = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 11$$

Nach dem ersten Fehlwurf hat man noch 9000 Punkte, nach dem zweiten noch 8100, nach dem dritten noch 7290 Punkte. Nach dem folgenden Treffer hat man dann genau 8019 Punkte.

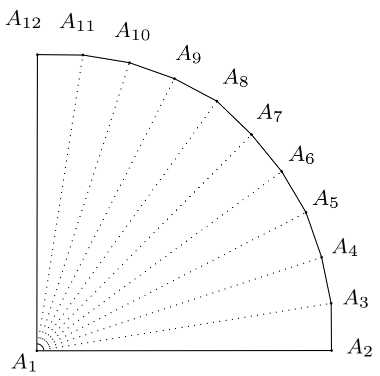
Lösung 114-56

Es seien E der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden, $\gamma = \angle BCD$, $\delta = \angle CDA$. Dann gilt $\angle BCE = \frac{\gamma}{2}$, $\angle CDE = \frac{\delta}{2}$.Nach dem Satz über Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen gilt $\angle CEB = \frac{\gamma}{2}$und $\angle AEB = \frac{\delta}{2}$. Die Dreiecke $\triangle EBC$ und $\triangle AED$sind folglich gleichschenklig mit $\mid AE \mid = \mid AD \mid$ und $\mid EB \mid = \mid BC \mid$. Da E auf AB liegt, folgt daraus die Behauptung, w.z.b.w.

6 Klassen 9 bis 13

Lösung 114-61

Ulrich Warnecke



Die gestrichelt eingezeichneten Diagonalen (vgl. Fig.) zerlegen das Zwölfeck in 10 überschneidungsfreie Dreiecke. Die Innenwinkelsumme des Zwölfecks ist $(12-2) \cdot 180\,° = 1800\,°$. Abzüglich der drei rechten Winkel bei A_1, A_2 und A_{12} bleibt für die übrigen Innenwinkel die Summe $1800\,° - 270\,° = 1530\,°$. Sollte darunter ein spitzer Winkel sein, so wäre die Summe der restlichen Winkel größer als $1530\,° - 90\,° = 1440\,°$. Da das Zwölfeck aber konvex ist, müsste diese Summe andererseits kleiner als $8 \cdot 180\,° = 1440\,°$ sein. Da beides zugleich unmöglich ist, kann das Zwölfeck keine spitzen Winkel besitzen.

Lösung 114-62

Ursel Willrett

a) Zuerst zeigen wir, dass $f_c(x) = f_c(-(x-1))$ ist.

$$f_c(-(x-1)) = (x+1)^2 - (x+1) + c = x^2 + 2x + 1 - x - 1 + c = x^2 + x + c = f_c(x)$$

b) Nun bestimmen wir alle x, für die $P(x)$ eine Quadratzahl ist.

Im Folgenden sei $x \geq 0$, da sich alle $x < 0$, für die $P(x)$ Quadratzahl ist, nach a) bestimmen lassen.

$$P(x) = x^2 + x + 41 = n^2, \quad \text{d.h. } n > x$$

Da $x^2 = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2x - 1)$ ist, muss $x + 41 \geq 2x + 1$ sein, d.h. $x \leq 40$. $P(x)$ ist Primzahl für $0 \leq x \leq 39$, d.h. $P(x)$ ist Quadratzahl für $x = 40$ und $x = -41$.

c) Aus

$$f_c(x) = x^2 + x + c = z^2 \quad (c, x, z \in \mathbb{Z})$$

folgt (Multiplikation mit 4 und Addition einer 0 in der Form 1-1)

$$\begin{aligned} 4x^2 + 4x + 1 + 4c - 1 &= 4z^2 \\ 4c - 1 &= 4z^2 - (2x+1)^2 = (2z + 2x + 1)(2z - 2x - 1) \end{aligned}$$

Jede Zerlegung von $4c - 1$ in zwei ganzzahlige Faktoren führt zu einer Lösung von

$$f_c(x) = x^2 + x + c = z^2$$

Ulrich Warnecke

Man kann sofort sehen, dass $P(-41) = 41^2$, also Quadratzahl ist.
Jede Quadratzahl ist darstellbar durch

$$n^2 = \sum_{i=1}^{n} (2i - 1).$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} P(x) = x^2 + x + 41 &= \sum_{i=1}^{x} (2i - 1) + x + 41 = 1 + 3 + \ldots + (2x - 1) + x + 41 \\ (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 &= \sum_{i=1}^{x+1} (2i - 1) = 1 + 3 + \ldots + (2x - 1) + (2x + 1) \end{aligned}$$

Der Vergleich zeigt: $P(x)$ liefert eine Quadratzahl, nämlich 41^2, falls $x + 41 = 2x + 1$ ist, d. h. $x = 40$. Aus diesen Darstellungen geht hervor, dass $P(x)$ für kein weiteres $x \in \mathbb{Z}$ eine Quadratzahl liefern kann.

Fazit: Nur für $x = -41$ und $x = 40$ ist $P(x)$ eine Quadratzahl.

Im verallgemeinerten Fall $P_c(x) = x^2 + x + c$ mit $c \in \mathbb{Z}$ kann man sofort ein $x \in \mathbb{Z}$ so finden, dass $P_c(x)$ gleich einer Quadratzahl ist, nämlich $x = -c$; dann ist $P_c(-c) = c^2$. Eine weitere mögliche Wahl ist $x = c - 1$; denn

$$P_c(c - 1) = (c - 1)^2 + c - 1 + c = c^2 - 2c + 1 + c - 1 + c = c^2.$$

Eine noch weiter gehende Verallgemeinerung liefert mit $k \in \mathbb{Z}$ der Ansatz

$$x^2 + x + c = x^2 + 2kx + k^2,$$

aus dem sich $c - k^2 = (2k - 1)x$ ergibt und hieraus insbesondere, dass $2k - 1$ Teiler von $c - k^2$ ist, so dass $x = \frac{c-k^2}{2k-1}$ ganzzahlig ist. Nun findet man für diese Wahl von x

$$\begin{aligned} P_c\left(\frac{c - k^2}{2k - 1}\right) &= \left(\frac{c - k^2}{2k - 1}\right)^2 + \frac{c - k^2}{2k - 1} + c \\ &= \frac{c^2 - 2ck + k^4 + 2ck - 2k^3 + k^2 + 4ck^2 - 4ck + c}{(2k - 1)^2} \\ &= \frac{c^2 + 2ck(k - 1) + k^2(k^2 - 2k + 1)}{(2k - 1)^2} \\ &= \frac{c^2 + 2k(k - 1)c + k^2(k - 1)^2}{(2k - 1)^2} \\ &= \left(\frac{c + k(k - 1)}{2k - 1}\right)^2, \end{aligned}$$

also eine Quadratzahl.

Lösung 114-63

Ulrich Warnecke

Quadrisch sind alle ungeraden Zahlen und alle Vielfachen von 4; denn

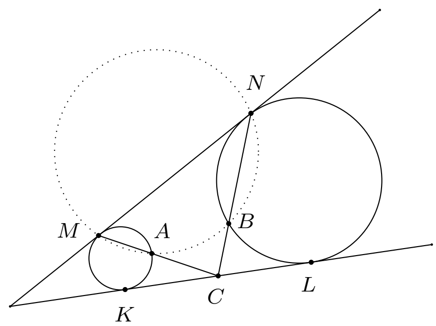
$$\begin{aligned} 2k+1 &= k^2+2k+1-k^2 = (k+1)^2-k^2, \\ 4k &= k^2+2k+1-k^2+2k-1 = (k+1)^2-(k-1)^2. \end{aligned}$$

Dagegen sind alle Zahlen der Form $4k+2$ nicht quadratisch, da sie nicht in der Form x^2-y^2 darstellbar sind; denn $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$ ist als Produkt zweier gerader Faktoren $x+y$ und $x-y$ ein Vielfaches von 4 und im Falle zweier ungerader Faktoren $x+y$ und $x-y$ selbst ungerade.

In der Menge $\{1;2;3;\ldots;2019\}$ gibt es 504 Zahlen der Form $4k+2$ und 1010 ungerade Zahlen und somit $504+1010=1514$ quadrische Zahlen.

Lösung 114-64

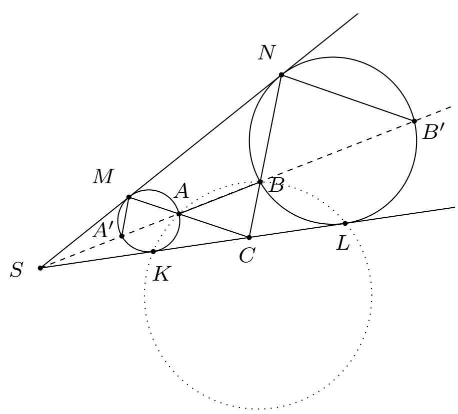
Ulrich Warnecke



a) Nach dem Sekanten-Tangenten-Satz, bezogen auf den kleineren Kreis, gilt $|CA|\cdot|CM|=|CK|^2$, und bezogen auf den größeren Kreis gilt nach dem gleichen Satz $|CB|\cdot|CN|=|CL|^2$.
Da nach Voraussetzung $|CK|=|CL|$, so folgt

$$|CA|\cdot|CM|=|CB|\cdot|CN|.$$

Damit ist die Voraussetzung der Umkehrung des Sekantensatzes erfüllt, so dass die Punkte M, A, B und N auf einem gemeinsamen Kreis liegen.
b) Die Parallele zu NB durch M schneidet den kleinen Kreis im Punkt A', und die Parallele zu MA durch N schneidet den großen Kreis im Punkt B'. Jetzt erkennt man, dass das Dreieck $A'AM$ zusammen mit dem kleinen (Um-)Kreis durch zentrische Streckung vom Punkt S aus in das Dreieck $BB'N$ zusammen mit dessen großen (Um-)Kreis abgebildet wird, sodass die Punkte S, A', A, B, B' auf derselben Geraden liegen.



Nach Teil a) der Aufgabe gilt dann nach dem Sekantensatz $|SA|\cdot|SB|=|SM|\cdot|SN|$. Wegen $|SM|=|SK|$ und $|SN|=|SL|$ folgt

$$|SA|\cdot|SB|=|SK|\cdot|SL|.$$

Wieder liefert jetzt die Umkehrung des Sekantensatzes, dass K, A, B und L auf einem gemeinsamen Kreis liegen.