1 Vorschule

Lösung 115-11

Die Ziffern 4, 6 und 7 kommen genau viermal vor. Die Ziffer 5 kommt nur dreimal vor.

Die größte dreistellige Zahl aus 4, 6 und 7 ist die 764.

Lösung 115-12

Es fehlen noch 6 Messer und 9 Gabeln.

Lösung 115-13

A und 1, B und 5, C und 6, D und 3, E und 4, F und 2

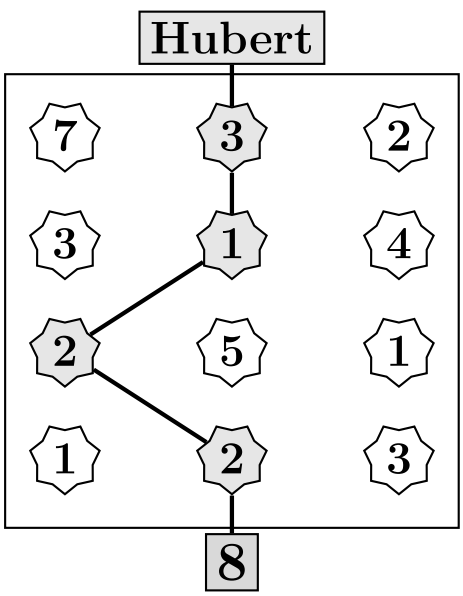
Lösung 115-14

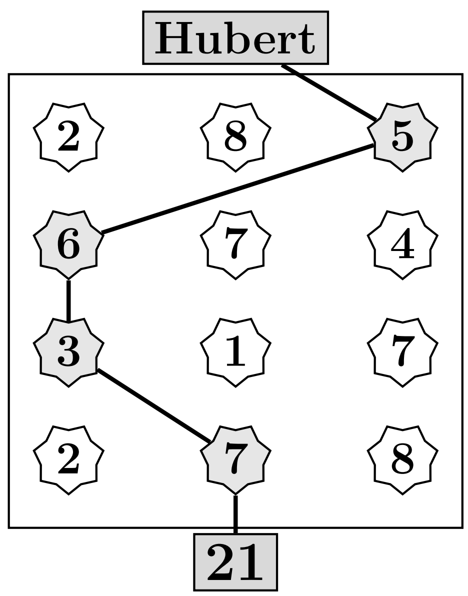
Das Kind, das die wenigsten Schritte machen muss, macht die längsten Schritte: also macht Jarod die längsten Schritte.

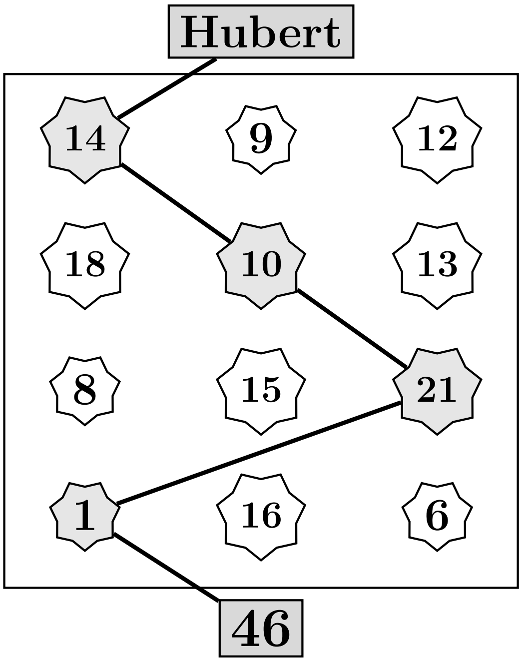
2 Klassen 1 und 2

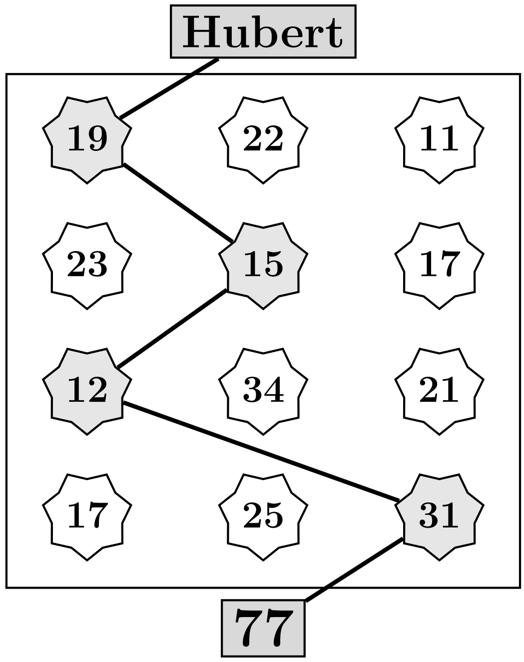
Lösung 115-21

Es gibt meist verschiedene Lösungen.









Lösung 115-22

Der Lösungssatz heißt **Opas lieben Enten.**

$15 + 9 = 24$	O
$24 - 8 = 16$	P
$41 - 6 = 35$	A
$44 + 4 = 48$	S

$26 - 7 = 19$	L
$13 - 6 = 7$	I
$30 + 10 = 40$	E
$27 + 6 = 33$	B
$62 - 22 = 40$	E
$48 + 24 = 72$	N

$45 - 5 = 40$	E
$61 + 11 = 72$	N
$25 + 28 = 53$	T
$53 - 13 = 40$	E
$100 - 28 = 72$	N

Lösung 115-23

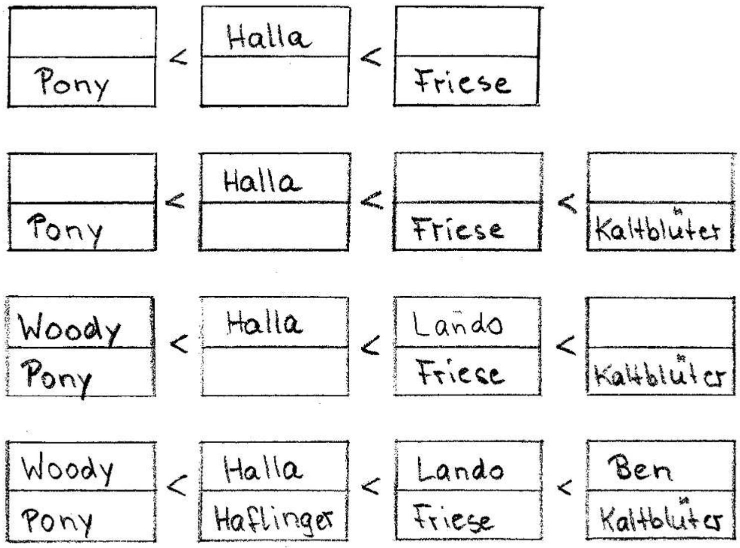
a) Jede Freundin bekommt erst mal eine Dose. 3 Dosen sind übrig und werden aufgeteilt. Das sind $3 \cdot 18 = 54$ Bonbons. $54 : 6 = 9$ Bonbons. Jede Freundin bekommt also 1 Dose und 9 Bonbons. Das sind 27 Bonbons.

b) Jede bekommt eine Dose. Es sind 4 Dosen übrig. Das sind $4 \cdot 18 = 72$ Bonbons. $72 : 5 = 14$ Rest 2. Jede Freundin bekommt also 1 Dose und 14 Bonbons. Das sind 32 Bonbons. Jede Freundin bekommt 5 Bonbons mehr und es bleiben 2 Bonbons übrig.

Lösung 115-24

Für beide kurze Seiten: 12 Zaunteile. Für beide lange Seiten: $30 - 12 = 18$. Für jede lange Seite braucht Vater 9 Zaunteile.

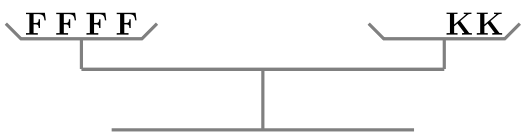
Lösung 115-25



Lösung 115-26

Ein Krokodil ist schwerer als ein Frosch.

Die Waage bleibt im Gleichgewicht, wenn man von jeder Schale 2 Frösche und ein Krokodil herunter nimmt:



Jetzt sieht man, dass 2 Krokodile genauso schwer sind wie 4 Frösche. Also muss ein Krokodil genauso schwer sein wie 2 Frösche.

Lösung 115-27

Beim ersten Mal hat Mia 8 Stücke Schnur. Eins davon zerschneidet sie wieder in 8 Stücke. Nun hat sie zusammen $7 + 8 = 15$ Stücke Schnur.

Lösung 115-28

3 Gänse.

3 Klassen 3 und 4

Lösung 115-31

$$10 \cdot 365 \cdot 2 = 7300$$

Je nachdem, ob es 2 oder 3 Schaltjahre gab, ist Max 7304 oder 7306 halbe Tage alt: $10 \cdot 365 : 2 = 7300$ und 2 oder 3 Schalttage.

Lösung 115-32

Die Anzahl der Goldmedaillen ist gleich $65 + 61 - 96 = 30$. Daher beträgt die Anzahl der Silbermedaillen 31, die der Bronzemedaillen 35.

Lösung 115-33

$$\begin{aligned}
7 - 7 + 7 : 7 &= 1\\
7 : 7 + 7 : 7 &= 2\\
(7 + 7 + 7) : 7 &= 3\\
77 : 7 - 7 &= 4\\
7 - (7 + 7) : 7 &= 5\\
(7 \cdot 7 - 7) : 7 &= 6\\
(7 - 7) \cdot 7 + 7 &= 7\\
(7 \cdot 7 + 7) : 7 &= 8\\
(7 + 7) : 7 + 7 &= 9\\
(77 - 7) : 7 &= 10
\end{aligned}$$

Lösung 115-34

Wenn es 4 unentschiedene Partien gab, dann gab es 26 Gewinn- oder Verlustpartien, wenn es 5 unentschiedene Partien gab, gab es 25 Gewinn-oder Verlustpartien.

Fall 1: 4 unentschiedene Partien:

Anzahl gewonnen	Anzahl verloren	verbleibende Gummibärchen
13	13	78 - 39 = 39 $<$ 42
14	12	84 - 36 = 48 $>$ 42

Bei 4 unentschiedenen Partien kann Jan nicht 40 Gummibärchen behalten haben.

Fall 1: 5 unentschiedene Partien:

Anzahl gewonnen	Anzahl verloren	verbleibende Gummibärchen
12	13	72 - 39 = 33 $<$ 42
13	**12**	**78 - 36 = 42**
14	11	84 - 33 = 51 $>$ 42

Es gab 5 unentschiedene Partien und Jan hat 13 Partien gewonnen.

Lösung 115-35

Die dritte Gleichung ist nur für $M = 0$ und $M = 1$ erfüllt. Wäre $M = 0$, so wäre nach Gleichung 1 auch $A - T = 0$, was wegen der 4. Gleichung nicht geht. Daher muss $M = 1$ sein. Es ergibt sich $H = 2$, $A - T = 1$ und $E = 2 : 1 = 2$. $A - T = 1$ bedeutet, dass A Nachfolger von T ist. In der letzten Gleichung kann man schon M, H und E einsetzen, so dass gilt

$$A + T + 5 = 16$$

Da A Nachfolger von T sein muss (wegen der ersten Gleichung und $M = 1$) muss $A = 6$ und $T = 5$ sein.

Ergebnis:

$$M = 1, A = 6, T = 5, H = 2, E = 2$$

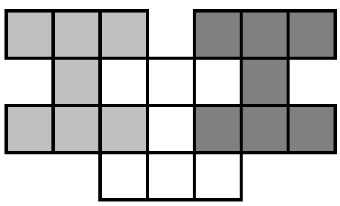
Probe:

$$\begin{aligned} 6 - 5 &= 1 \\ 2 &= 2 \cdot 1 \\ 1 &= 1 \cdot 1 \\ 2 &= 2 : (6 - 5) \\ 1 + 6 + 5 + 2 + 2 &= 16 \end{aligned}$$

Lösung 115-36

9l	9	5	5	1	1	0	9	**6**
4l	0	4	0	4	0	1	1	4

Lösung 115-37



Lösung 115-38

Lösung von Andrea, 9 Jahre, 4. Klasse:

Auf 56 verschiedene Weisen kann sie die Ringe tragen.

Begründung: Ich habe mir überlegt, dass es 8 Finger sind. Dann gibt es ja immer 7 Möglichkeiten und $8 \cdot 7 = 56$.

Lösung von Sebastian, 9 Jahre, 4. Klasse:

56 Möglichkeiten hat die Dame.

Begründung: Man muss $8 \cdot 7$ rechnen. 8 Finger ohne Daumen stehen zur Verfügung. Also gibt es für jeden Ring 7 Möglichkeiten, weil es ja zwei Ringe sind. Und 7 Möglichkeiten mal 8 Finger sind 56.

Lösung von Chloe, 9 Jahre, 4. Klasse:

Chloe hatte angenommen, dass die Dame die Ringe nur an einer Hand trägt. Das kam auch aus der Aufgabenstellung nicht ganz deutlich heraus. Unter dieser Annahme hat sie die Aufgabe aber richtig gelöst und vollständig begründet, so dass ihre Lösung durchaus Mustercharakter hat.

Die Dame kann die Ringe auf 12 verschiedene Weisen tragen.

Begründung: Wir nennen die vier Finger (Zeigefinger, Mittelfinger, Ringfinger, kleiner Finger) 1, 2, 3 und 4. Einer der beiden Ringe kann auf dem Finger 1, 2, 3 oder 4 sein. Wenn dieser Ring auf einem der Finger 1, 2, 3 oder 4 ist, dann kann der andere Ring noch auf den restlichen 3 Fingern sein. Die Ringe können also auf $4 \cdot 3 = 12$ verschiedenen Weisen getragen werden.

4 Klassen 5 und 6

Lösung 115-41

a) Es müssen $25 \cdot 10 + 2 \cdot (10 \cdot 1.5) + 2 \cdot (25 \cdot 1.5) = 355$ Quadratmeter Schwimmbeckenwände gefliest werden. Daher muß der Bademeister 35500 Fliesen bestellen.

b) Die Fliesen kosten 2.5 € $\cdot 35500 = 88750$ € .

Lösung 115-42

Sei $x > 0$ die Anzahl der Kamele, dann lässt sich aus der Aufgabe folgende Gleichung ableiten:

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} + 11 = x$$

$x = 220$ ist die einzige Lösung dieser Gleichung. Daher hatte der Kamelzüchter 220 Kamele.

ältester Sohn: 110 Kamele

älteste Tochter: 55 Kamele

jüngste Tochter: 44 Kamele

jüngster Sohn: 11 Kamele

Lösung 115-43

Wir zerlegen 420 in Primfaktoren:

$$420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

Diese Faktoren gruppieren wir nun in 5 Summanden, deren Summe gleich 20 ist. Dabei müssen wir eine 1 hinzunehmen, weil es sonst nicht klappt:

$$1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 = 420 \quad , \quad 1 + 3 + 4 + 5 + 7 = 20$$

Lösung 115-44

Es sei a die Anzahl der Piroggen, die Lena und Oleg anfangs hatten. Dann gilt

$$\frac{a+8}{3} < \frac{a}{2} < \frac{a+8}{3} + 2$$

Aus diesen Ungleichungen folgt, dass a eine gerade Zahl echt zwischen 16 und 28 sein muss, für die $a + 8$ durch 3 teilbar ist (vorausgesetzt, die Piroggen werden als ganze verteilt).

Einzig $a = 22$ erfüllt diese Bedingungen. Die Kinder hatten anfangs also 22 Piroggen und anschließend 30 Piroggen. Anfangs hätte Lena 11 Piroggen bekommen, während sie nun 10 Piroggen bekommt. 12 Piroggen hätte sie essen können, wenn Kolja 6 Piroggen mehr mitgebracht hätte.

Jedes Kind isst 10 Piroggen.

Lösung 115-45

a) Sei x die gesuchte Zahl, dann muss gelten

$$\begin{aligned} 3x + 3 &= 3^3 - 3x \mid +3x - 3 \\ 6x &= 24 \mid: 6 \end{aligned}$$

Diese Gleichung wird nur für $x = 4$ wahr. Wenn es also eine solche Zahl gibt, dann muss dies die 4 sein. Tatsächlich gilt für 4:

$$15 = 3 \cdot 4 + 3 = 3^3 - 3 \cdot 4 = 27 - 12 = 15$$

b) Sei x die gesuchte Zahl, dann muss gelten

$$\begin{aligned} \frac{x}{4} + 4 &= 4x - 4 \mid \cdot 4 \\ x + 16 &= 16x - 16 \mid +16 \mid -x \\ 32 &= 15x \mid: 15 \\ x &= \frac{32}{15} \end{aligned}$$

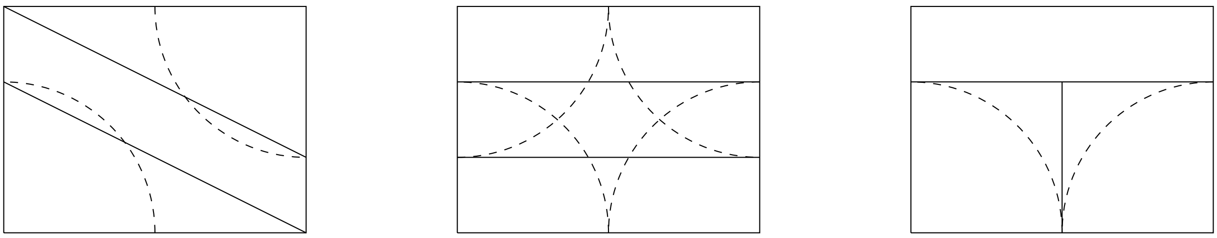
Wenn es also eine solche Zahl gibt, dann muss dies die $\frac{32}{15}$ sein. Tatsächlich gilt für $\frac{32}{15}$:

$$\frac{32}{15} : 4 + 4 = \frac{8}{15} + 4 = \frac{68}{15} = \frac{128 - 60}{15} = 4 \cdot \frac{32}{15} - 4$$

Lösung 115-46

U.Warnecke:

Zunächst werden die Mittelpunkte der beiden längeren Rechtecksseiten konstruiert; das ist mit Zirkel und Lineal allein möglich. Alles Weitere entnimmt man den drei folgenden Bildern.



Lösung 115-47

Variante 1 - Diskussion aller Zugmöglichkeiten:

Von der Ausgangsstellung gibt es zwei voneinander verschiedene Züge mit diesen Ergebnissen:

1. fünfmal blau

2. zweimal rot, dreimal blau

Von 1. gelangt man beim nächsten Zug in eine Verteilung wie bei der Ausgangssituation. Von 2. gibt es wieder 2 voneinander verschiedene Züge mit diesen Ergebnissen

3. viermal rot, einmal blau (= Ausgangssituation)

4. zweimal blau, dreimal rot (= Situation 2)

Keine der möglchen Spielvarianten führt also zum erhofften Ergebnis.

Variante 2 - Analogieschluss:

Denken wir uns die roten Seiten mit $+1$, die blauen Seiten mit -1 beschriftet. Dann wechselt Anna bei jedem Spielzug gleichzeitig genau 4 Vorzeichen. Lagen zunächst 4 rote und eine blaue Seite oben, dann ist das Produkt der entsprechend zugeordneten Zahlen gleich -1. Wenn Anna genau 4 Vorzeichen umkehrt, ändert sich das Produkt um den Faktor $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 1$. Es bleibt also bei jedem Zug gleich. Die Zielanordnung hat aber das Produkt $+1$, so dass Anna die gewünschte Farbverteilung nicht erreichen kann.

Lösung 115-48

Zuerst gehen sie zur deutschen Eisdiele und Alfredo isst ein Eis. 9 Euro bleiben übrig. Nun gehen sie zur schweizer Bank. für 9 Euro bekommen sie dort 10 Franken.

Dann gehen sie zur schweizer Eisdiele und Carsten isst eine Kugel Eis. 9 Franken bleiben übrig. Zurück zur deutschen Bank für 9 Franken bekommen sie dort 10 Euro.

Jetzt gehen sie wieder zur deutschen Eisdiele und Harry isst Eis. 9 Euro bleiben übrig.

5 Klassen 7 und 8

Lösung 115-51

Da ich mitesse, sind es also 4 oder 5 Personen.

Jede Aufteilung in weniger als 8 Stücke kann nicht gerecht unter 4 oder 5 Personen verteilt werden. Zunächst ist klar, dass es mindestens 5 Stücke sein müssen. 5 Stücke können aber ohne weiteres Zerschneiden nicht auf 4 Personen verteilt werden.

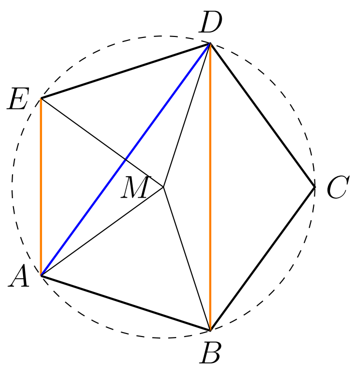
Auch 7 Stück reichen nicht aus, denn wenn man die Torte, zerschnitten in 7 (verschieden große) Stücke, gleichmäßig unter 4 Personen aufteilt, erhält jede $\frac{1}{4}$ der Torte. Dabei **muss** eins der Stücke genau $\frac{1}{4}$ groß sein. Sonst bekäme man mehr als 7 Tortenstücke. Wegen $\frac{1}{4} > \frac{1}{5}$ lassen sich diese 7 Stücke aber nicht gerecht auf 5 Personen aufteilen.

Man braucht also mindestens 8 Stück.

Bei 8 Stück findet man eine gerechte Verteilung: zuerst wird die Torte gefünftelt, anschließend viertelt man eins der Fünftel noch einmal. Sind es 5 Personen, dann bekommt jede ein Fünftel der Torte, sind es nur 4 Personen, so bekommt jede ein Fünftel und zusätzlich noch ein Zwanzigstel.

Fazit: Ich muss meine Torte mindestens in 8 Stücke zerschneiden, damit ich sie gerecht sowohl mit 3 als auch mit 4 Gästen teilen kann und habe dann nicht mehr geschnitten als absolut notwendig.

Lösung 115-52



Wir beweisen, dass die Diagonale BD und die Fünfeckseite AE parallel sind.
Es sei M der Mittelpunkt des Fünfecks $ABCDE$. Aus der Tatsache, dass $ABCDE$ gleichseitig ist, folgen:

(1) $\triangle AMD \cong \triangle BDM$ (Kongruenzsatz *sws*),

(2) $\triangle AMD$ gleichschenklig mit $\mid AM \mid = \mid MD \mid$,

(3) $\triangle AME$ gleichschenklig mit $\mid \angle AME \mid = 360° : 5 = 72°$ und

(4) $\mid \angle AMB \mid = 2 \cdot \mid \angle ADB \mid$ (Peripherie-Zentriwinkelsatz im Umkreis von $ABCDE$), also $\mid \angle ADB \mid = 36°$.

Aus (1) folgt, dass DM den Winkel $\angle BDA$ halbiert. Es ist also zusammen mit (4)

(5) $\mid \angle MDA \mid = \mid \angle MAD \mid = 18°$.

Aus (3) folgt

(6) $\mid \angle MAE \mid = (180° - 72°) : 2 = 54°$ (Innenwinkelsatz im Dreick $\triangle AME$).

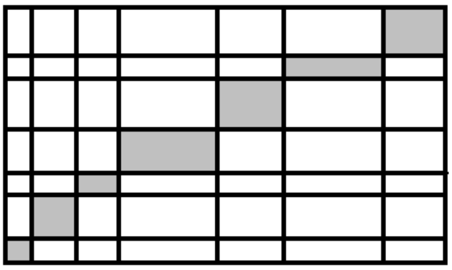
Nun ergibt sich aus (4), (5) und (6)

$$\mid \angle DAE \mid = 54° - 18° = 36° = \mid \angle BDA \mid$$

$\angle DAE$ und $\angle BDA$ sind also gleich groß. Gleichzeitig sind beide Wechselwinkel bezüglich der von AD geschnittenen Strecken AE und BD. Daher müssen AE und BD parallel sein, q.e.d.

Lösung 115-53

Es folgt zwingend:



Nach Voraussetzung haben alle grau gezeichneten Rechtecke einen ganzzahligen Umfang. Ferner ergibt sich der Umfang des ursprünglichen Rechtecks als Summe der Umfänge aller dieser grau gezeichneten Rechtecke und ist damit ganzzahlig.

Lösung 115-54

Antwort: 909090909.

Nach der Teilbarkeitsregel für 11 ist der Rest einer Zahl bei Division durch 11 gleich dem Rest der alternierenden Quersumme bei Division durch 11. Ändert man eine der Ziffern um 1, ändert sich auch der Rest der alternierenden Quersumme bei Division durch 11 um 1. Anjas Zahl muss also bei Division durch 11 entweder den Rest 10 oder den Rest 1 haben.

Angenommen, Anjas Zahl hat bei Division durch 11 den Rest 10. Dann muss Anja dafür sorgen, dass jede mögliche Änderung einer ihrer Ziffern auf deren Vorgänger oder Nachfolger den Rest der alternierenden Quersumme bei Division durch 11 um 1 erhöht. Das heißt, Anja muss dafür sorgen, dass Boris die Ziffern an den ungeraden Positionen (von rechts gesehen) nur um 1 erhöhen kann, die Ziffern auf den geraden Positionen nur um 1 verringern kann. Die Zahl muss also die Form $\cdots 909090$ haben. Die kleinste Zahl dieser Form, die bei Division durch 11 den Rest 10 hat, ist 9090909090.

Wenn Anjas Zahl bei Division durch 11 den Rest 1 hat, dann hat sie (wie man analog schießt) die Form $\cdots 90909$, da die Änderung einer Ziffer um 1 den Rest um 1 verringern muss. Dies ergibt eine kleinere Ausgangszahl als die mit Rest 10, nämlich 909090909.

Lösung 115-55

Antwort 24 Minuten.

Der Minutenzeiger bewegt sich mit der Geschwindigkeit 360° pro Stunde, der Stundenzeiger mit 30° pro Stunde. Daher ist die relative Bewegungsgeschwindigkeit beider Zeiger 330° pro Stunde. Für den Übergang von einem glücklichen Moment zum nachfolgenden glücklichen Moment muss der Minutenzeiger $2\cdot 66°$ überstreichen, wofür er $2\cdot 66/330$ einer Stunde benötigt. Das sind 24 Minuten.

Lösung 115-56

Antwort: 990

In ein und dem selben Dorf können nicht 2 Ritter leben, denn anderenfalls hätten sie gelogen. Andererseits muss in jedem Dorf ein Ritter leben, sonst hätten die Lügner die Wahrheit gesagt. Daher gibt es in jedem Dorf genau einen Ritter, also insgesamt 10 Ritter. Folglich sind es 990 Lügner.

6 Klassen 9 bis 13

Lösung 115-61

U.Warnecke

Im Hinblick darauf, dass es um ungerade Quadratzahlen geht, sei $n = 2m - 1$ gewählt. Durch Umordnung findet man dann

$$\begin{aligned} S_{2m-1} &= 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2m-1)^2 + 2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + (2m-2)^2 \\ &= \underbrace{1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2m-1)^2}_{m \text{ Summanden}} + 2^2(\underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (m-1)^2}_{m-1 \text{ Summanden}}) \\ &= U_m + 2^2 \cdot S_{m-1} \end{aligned}$$

Direkte Rechnung liefert nun

$$\begin{aligned} U_m = S_{2m-1} - 2^2 \cdot S_{m-1} &= \frac{1}{6} \cdot \Big((2m-1)2m(4m-1) - 4(m-1)m(2m-1)\Big) \\ &= \frac{1}{6} \cdot 2m(2m-1)\Big(4m-1-2(m-1)\Big) \\ &= \frac{1}{6} \cdot (2m-1)2m(2m+1) \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$U_{10^k} = \frac{1}{6} \cdot (2 \cdot 10^k - 1) 2 \cdot 10^k (2 \cdot 10^k + 1) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Das ergibt

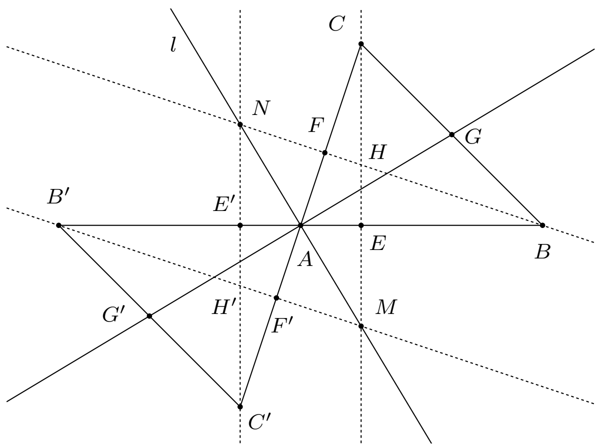
$$\begin{aligned} U_{10} = U_{10^1} &= \frac{1}{6} \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21 = 1\,330 \\ U_{100} = U_{10^2} &= \frac{1}{6} \cdot 199 \cdot 200 \cdot 201 = 1\,333\,300 \\ U_{1000} = U_{10^3} &= \frac{1}{6} \cdot 1999 \cdot 2000 \cdot 2001 = 1\,333\,333\,000 \end{aligned}$$

Die Anfangsziffer ist also stets 1. Die Anzahl der Ziffer 3 wird gegeben durch $2k$, die Anzahl der Ziffer 0 durch k, wobei k der Exponent des Zehnerpotenz-Indexes von U ist.

Lösung 115-62

U.Warnecke

Das gegebene Dreieck ABC werde um den Punkt A um 180° gedreht. Dann liegen die Strecken AB und AB', AC und AC' sowie AG und AG' jeweils in derselben Geraden. Die Dreickseiten BC und $B'C'$ sind parallel. Auch die Verlängerungen der Höhen CE und $C'E'$ sind parallel; gleiches gilt für BF und $B'F'$. (CE) und $(B'F')$ treffen sich auf der Geraden l im Punkt M; $(C'E')$ und (BF) treffen sich auf der Geraden l im Punkt N. Daher ist die Strecke MN Diagonale in dem von dem Durchschnitt der Parallelenstreifen gebildeten Parallelogramm $MHNH'$ (vgl. Figur), und sie wird durch den Punkt A halbiert. Somit gilt $|AM| = |AN|$.



Lösung unter Verwendung von Vektoren

Es seien $\vec{AB} = \vec{b}$, $\vec{AC} = \vec{c}$, $\vec{AM} = \vec{u}$ und $\vec{AN} = \vec{v}$. Die Gerade MN ist senkrecht zum Median, also gilt

$$\vec{u} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = 0$$

Andererseits gilt $BM \perp AC$ und $CN \perp AB$, woraus folgt

$$(\vec{b} - \vec{u}) \cdot \vec{c} = (\vec{v} - \vec{c}) \cdot \vec{b} = 0$$

Durch Addition der 3 so erhaltenen Gleichungen ergibt sich

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{b}=0$$

Das ist nur möglich, wenn $\vec{u}+\vec{v}$ null ist, da die Gerade MN nicht senkrecht zu AB ist. Daraus folgt $AM = AN$.

Lösung 115-63

Antwort: 432

Wir färben die Zellen des Gitters wie ein Schachbrett derart, dass alle Zellen in der Hauptdiagonalen, um die es geht, weiß sind. Aufeinanderfolgende Zahlen stehen auf diese Weise niemals in Zellen gleicher Farbe. Außerdem haben alle Zahlen in der Diagonale die gleiche Parität, sind also entweder alle gerade oder alle ungerade.

Wir suchen nun den möglichen Maximalwert der kleinsten aller Zahlen, die in der Diagonale stehen können.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass die 1 nicht oberhalb der Diagonale steht.

Unterhalb der Diagonale gibt es genau 12 weiße Zellen, so dass eine der Zahlen $1,\ldots,26$ in der Diagonale stehen muss. Die größtmögliche dieser Zahlen ist die 26. Alle Zahlen kleiner als 26 befinden sich unterhalb der Diagonale.

Da 26 gerade ist, müssen auch alle anderen Zahlen in der Diagonale gerade sein. Daher kann die Summe aller Zahlen auf der Diagonale nicht größer sein als die Summe von 26 und aller geraden Zahlen von 64 bis 52, d.h. nicht größer als

$$26+52+54+56+58+60+62+64=432$$

Tatsächlich gibt es eine Zuordnung der Zahlen von 1 bis 64 den Bedingungen der Aufgabe entsprechend, bei welcher die Summe der Zahlen auf der Diagonalen gleich 432 ist:

52	**51**	**50**	**49**	**44**	**43**	**34**	**33**
53	**54**	**55**	**48**	**45**	**42**	**35**	**32**
6	**7**	**56**	**47**	**46**	**41**	**36**	**31**
5	**8**	**57**	**58**	**59**	**40**	**37**	**30**
4	**9**	**16**	**17**	**60**	**39**	**38**	**29**
3	**10**	**15**	**18**	**61**	**62**	**63**	**28**
2	**11**	**14**	**19**	**22**	**23**	**64**	**27**
1	**12**	**13**	**20**	**21**	**24**	**25**	**26**

Stefan Knott hat folgende allgemeine Lösungsformel für $(k\times k)$-Gitter mit geradem k hergeleitet:

$$S=k^3-\frac{3}{2}k^2+2k$$

Die vollständige Lösung findet man unter Materialien

Lösung 115-64

Die Gleichung hat genau 3 reelle Lösungen.

Es gilt $x \geq 1$ denn anderenfalls wäre der linke Teil der Gleichung negativ oder nicht definiert. Wir bezeichnen $[x]$ mit m. Dann ist $[2x] = 2m$, falls $x \in [0, 1/2)$ ist und $[2x] = m + 1$, falls $\{x\} \in [1/2, 1)$ ist.

Im ersten Fall erhalten wir

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{m} = \frac{1}{[x]} + \frac{1}{[2x]} = \{x\} + \frac{2}{5} \in \left[\frac{2}{5}, \frac{9}{10}\right)$$

Woraus $\frac{1}{m} \in \left[\frac{4}{15}, \frac{3}{5}\right)$, d.h. $m \in \left[\frac{5}{3}, \frac{15}{4}\right)$ folgt. Also ist $m \in \{2, 3\}$. Für x ergeben sich hieraus die Lösungen

$$x = 2\frac{7}{20} \text{ und } x = 3\frac{1}{10}$$

Im zweiten Fall erhalten wir die Bedingung

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{2m+1} = \frac{1}{[x]} + \frac{1}{[2x]} = \{x\} + \frac{2}{5} \in \left[\frac{9}{10}, \frac{7}{5}\right)$$

welche nur die Lösung $m = 1$ hat, da für alle $m \geq 2$

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{2m+1} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{7}{10} < \frac{9}{10}$$

ist.

Mit $m = 1$ erhalten wir die dritte Lösung $x = 1\frac{14}{15}$.

Probe:

$$\begin{aligned}
x = 2\frac{7}{20} &\Rightarrow [x] = 2, [2x] = 4, \{x\} = \frac{7}{20} \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \frac{15}{20} = \frac{7}{20} + \frac{2}{5} \\
x = 3\frac{1}{10} &\Rightarrow [x] = 3, [2x] = 6, \{x\} = \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} = \frac{5}{10} = \frac{1}{10} + \frac{2}{5} \\
x = 1\frac{14}{15} &\Rightarrow [x] = 1, [2x] = 3, \{x\} = \frac{14}{15} \Rightarrow 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} = \frac{20}{15} = \frac{14}{15} + \frac{2}{5}
\end{aligned}$$