1 Vorschule

Lösung 116-11

Das schwarze Kätzchen wohnt im dritten Haus, da im ersten und zweiten kein schwarzes Kätzchen wohnt. Da das weiße Kätzchen im ersten Haus wohnt, muss das rotbraune Kätzchen im zweiten Haus wohnen.

erstes Haus: weißes Kätzchen

zweites Haus: rotbraunes Kätzchen

drittes Haus: schwarzes Kätzchen

Lösung 116-12

Leon ist 8 Jahre alt.

Da Paula ist 6 Jahre alt ist, muss Leon 8 Jahre alt sein.

Lösung 116-13

Das Lösungswort ist NIKOLAUS.

Lösung 116-14

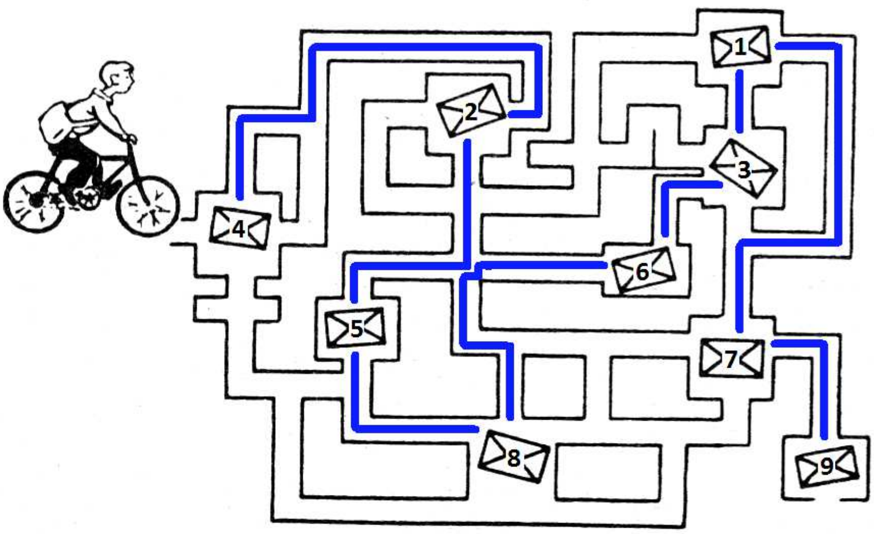
Wenn morgen Freitag ist, ist heute Donnerstag. Gestern war dann Mittwoch.

Ole hatte am Mittwoch Geburtstag.

2 Klassen 1 und 2

Lösung 116-21

Es gibt verschiedene Möglichkeiten. Eine ist diese:



Lösung 116-22

Äpfel und Birnen müssen gleich schwer sein: Wenn man von jeder Waagschale einen Apfel und eine Birne wegnimmt, bleibt sie im Gleichgewicht. Es liegt dann auf der einen Seite ein Apfel, auf der anderen Seite eine Birne.

Lösung 116-23

a) die größte zweistellige Zahl ist 86.

b) die kleinste zweistellige Zahl ist 30.

Lösung 116-24

a) 56

b) 28

c) 11

Lösung 116-25

$\bigcirc = 5$

Lösung 116-26

Die weißen Flächen bestehen zusammen aus 24 Quadraten, die grauen aus 12. Die weiße Fläche ist doppelt so groß wie die graue.

Lösung 116-27

Die gedachte Zahl ist immer gleich der ausgedachten Zahl.

Lösung 116-28

Es fehlt die 22:

$$23 + 22 + 62 - 42 + 22 = 87$$

3 Klassen 3 und 4

Lösung 116-31

$A = 1, B = 0, C = 2, D = 3, E = 4, F = 6$

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{10} & + & \mathbf{2} & = & \mathbf{12} \\
\cdot & & + & & + \\
\mathbf{3} & \cdot & \mathbf{4} & = & \mathbf{12} \\
\hline
\mathbf{30} & - & \mathbf{6} & = & \mathbf{24}
\end{array}$$

Lösung 116-32

Aussagen der Aufgabe	**Zeit**
Beginn des Meetings	9:00 Uhr
Ankunft auf der Arbeit	8:45 Uhr
halbe Strecke	8:25 Uhr
Zeit für halbe Strecke	20 Minuten
Abfahrt	8:05 Uhr

a) Magdalenas Mutter benötigt 40 min für die gesamte Strecke.

b) Sie ist 8:05 Uhr von zu Hause losgefahren.

Lösung 116-33

$21 - 8 = 13$ Schüler können nur Brustschwimmen, $12 - 8 = 4$ Schüler können nur Rückenschwimmen. $13 + 8 + 4 = 25$ Schüler können mindestens eine der beiden Schwimmarten. $28 - 25 = 3$ Schüler können weder Brust- noch Rückenschwimmen.

Lösung 116-34

(B) ist offensichtlich falsch.

Zunächst überlegen wir, wo sich der Hund aufhalten kann. Da es regnet, kann er an zwei Orten sein: im Wohnzimmer oder in seiner Hütte. Im Wohnzimmer kann er aber nicht sein, da in diesem Fall der Wellensittich im Käfig säße. Also muss der Hund in seiner Hütte liegen. (A) ist also ebenfalls falsch.

Da der Wellensittich frei herumfliegt und der Hund in seiner Hütte liegt, ist (D) richtig und (C) falsch.

Demnach stimmt (E) nicht.

Antwort (D) trifft mit Sicherheit zu.

Lösung 116-35

$2020 : 5 = 404$. Die mittlere Zahl ist also die 404:

$$402 + 403 + 404 + 405 + 406 = 2020$$

Der größte Summand ist 406.

Lösung 116-36

Ausgehend vom Ergebnis 7 kann man jede Rechenoperation umkehren:

$$\begin{aligned} 7 \cdot 5 &= 35 \\ 35 + 4 &= 39 \\ 39 : 3 &= 13 \\ 13 \cdot 2 &= 26 \\ 26 - 1 &= 25 \end{aligned}$$

Ich habe mir die 25 gedacht.

Lösung 116-37

Die Freunde müssen in jedem Zimmer 4 Wände und eine Decke also 5 Flächen streichen. Bei 12 Zimmern sind das 60 Flächen. Das dauert insgesamt 45 Stunden. Da es 6 Personen sind, brauchen sie aber nur 7,5 Stunden, denn $45 : 6 = 7,5$.

Die Renovierung dauert 7,5 Stunden.

Lösung 116-38

Nichts ist getan, wenn noch etwas zu tun übrig ist. Schema:

10	1	8
7	4	11
2	9	6
5	12	3

4 Klassen 5 und 6

Lösung 116-41

Der einzige zweistellige Teiler von 625 ist 25: $25 \cdot 25 = 625$. Also hätte Larry das Ergebnis $25 + 25 = 50$ erhalten müssen.

Lösung 116-42

Der Zug begegnet 14 Zügen.

Begründung: Wenn der Zug losfährt, fährt der Zug in den Bahnhof ein, der vor 7 Tagen am anderen Bahnnof gestartet ist. Jeden Tag trifft der zunächst einen der entgegenkommenden Züge, die vor $6, 5, 4, \cdots$ Tagen gestartet sind und anschließend noch die 7 Züge, die während seiner Fahrt starten.

Bemerkung: Wenn man den Zug, der gerade startet, während der Zug ankommt, mitzählt, sind es 15. Es ist ein bisschen Interpretationssache, was man unter „während der Fahrt " versteht.

Lösung 116-43

Er wiegt 20 kg, nämlich

$$10 \text{ kg } + \frac{20}{2} \text{ kg}$$

Lösung 116-44

Das ist möglich, indem er zunächst 5 mal zurück springt und anschließend einmal vorwärts:

$$5 \cdot 50 - 80 = 170$$

Lösung 116-45

Angenommen, die Zahl beginne mit 2. Das ist die kleinste Ziffer, mit der sie nach Bedingung 4) beginnen darf. Dann muss wegen 4) außerdem die zweite Ziffer die 5 sein. Für die Hunderter- bis Einerstelle bleiben noch die Ziffern 1, 3 und 4 übrig. Wegen 2) kann die Hunderterziffer nicht die 4 sein. Ferner dürfen 3 und 4 nicht nebeneinander stehen. Es ist also nur 314 möglich. Dann wäre die Ticketnummer aber gerade. Die Nummer kann also nicht mit 2 beginnen.

Die nächstgrößere Ziffer, mit der die gesuchte Nummer beginnen könnte, ist die 3. Die Tausenderziffer kann dann nur entweder 1 oder 5 sein. Damit die Nummer möglichst klein wird, nehmen wir an, dass die Tausenderziffer die 1 ist. Für die drei restlichen Stellen bleiben somit die Ziffern 2, 4 und 5 übrig. 4 und 5 dürfen nicht nebeneinander stehen. Es sind also 425 und 524 möglich. Nur mit 425 wird die Ticketnummer ungerade.

Da die Nummer systematisch mit der kleinstmöglichen Zehntausender- und Tausenderstelle aufgebaut wurde, kann es keine kleinere fünfstellige Zahl geben, die allen 4 Bedingungen genügt.

Die Nummer des Monatstickets ist die 31425.

Lösung 116-46

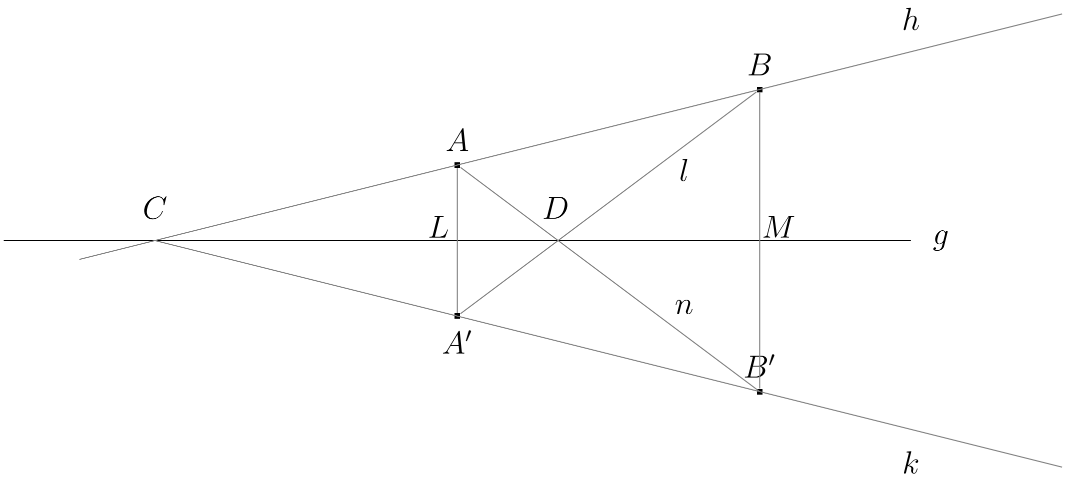
Es muss ein nicht quadratischer Rhombus (= Rhombus ohne rechten Winkel) gewesen sein, denn dieser ist gleichzeitig Trapez und Parallelogramm, aber nicht notwendig Quadrat. Nur in diesem Fall sind genau 3 der Antworten richtig.

Lösung 116-47

Die Zahl 24 hat die Teiler 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 und 24. Eine dieser 8 Zahlen ist a, die andere ist b. Da $a > b$ ist, kann b höchstens gleich 4 sein. Angenommen, $b = 3$. Dann ist $a = 8$ und wegen (3) müsste $c = 5$ sein. Das ist aber nicht möglich, denn dann wäre $c > b$. Auch für $b = 2$ und $b = 1$ ergäbe sich jedesmal eine Zahl $c > b$. b muss also gleich 4 sein. Daraus folgt $a = 6$, $c = 3$ und $d = 2$.

Wir haben damit gezeigt: die Aufgabe hat genau eine Lösung, nämlich $a = 6$, $b = 4$, $c = 3$ und $d = 2$.

Lösung 116-48



(1) Man zeichne die Gerade h durch A und B. Diese schneidet g im Punkt C, da laut Voraussetzung h nicht parallel zu g ist.

(2) Man zeichne die Gerade k durch C und A'.

(3) Man zeichne die Gerade l durch A' und B. Diese schneidet g im Punkt D, da A' und B auf verschiedenen Seiten bezüglich g liegen und l somit ebenfalls nicht parallel zu g ist.

(4) Die Gerade n durch A und D schneidet die Gerade h im gesuchten Bildpunkt B'.

Begründung: Es seien L der Schnittpunkt von g mit der Strecke AA' und M der Schnittpunkt von g mit der Strecke BB'. Da A' Spiegelbild von A bezüglich g ist, sind die Dreiecke $\triangle LA'D$ und $\triangle LDA$ spiegelsymmetrisch (sie gehen durch Spiegelung an g ineinander über). Die Geraden h und k gehen ebenfalls durch Spiegelung an g ineinander über.

Die Punkte A, B und C liegen nach Konstruktion auf einer Geraden; ebenso liegen A', B' und C auf einer Geraden. Die Winkel $\angle BAD$ und $\angle B'A'D$ sind damit gleich groß. Ebenso sind die Winkel $\angle ADB$ und $\angle A'DB'$ gleich groß, denn es sind Schenkelwinkel. Die Dreiecke $\triangle ADB$ und $\triangle A'DB'$ sind folglich deckungsgleich, denn sie stimmen in zwei Winkeln und der von diesen eingeschlossenen Seite überein. Somit sind BD und $B'D$ gleich lang. Das Dreieck $\triangle DB'B$ ist damit gleichschenklig und g halbiert den Winkel $\angle B'DB$. Das bedeutet aber, dass g auf BB' senkrecht steht und die Dreiecke $\triangle DMB$ und $\triangle DMB'$ durch Spiegelung an g ineinander über gehen. B' ist damit tatsächlich das Spiegelbild von B bezüglich g.

5 Klassen 7 und 8

Lösung 116-51

Da sich das Gewicht der Kugeln proportional zur dritten Potenz der Radien vergrößert, bestehen sie zusammen aus 432 Masseeinheiten Gold, die man wie folgt aufteilen kann:

$$3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^2 = 432 = 216 + 216 = (3^3 + 4^3 + 5^3) + 6^3$$

Eine der Schwestern nimmt also die größte Kugel, die andere die 3 kleineren.

Lösung 116-52

Lösung von Kim Holtze, 12 Jahre, Klasse 7:

Beim 1. Mal werden die Ecken C, F, H genannt. Wenn eine dieser Ecken richtig war, ist man schon fertig. Sonst wäre eine der Positionen A, B, D, E, G richtig gewesen. Von dieser kann man zu einer der Positionen A, B, C, D, E, F, H nicht aber zu G ziehen. Beim 2. Mal nennt man B, D, E. Wenn eine dieser Ecken richtig war, ist man fertig. Sonst wäre eine der Positionen A, C, F oder H richtig gewesen (da G ja nicht möglich war). Von dieser kann man nur zu B, D, E oder G gelangen, nicht möglich sind A, C, F oder H. Beim 3. Mal nennt man (noch einmal, H.W.) B, D, E. Wenn eine dieser Ecken richtig war, ist man fertig. Sonst kann es nur G gewesen sein, und von G kann man nur zu F, H oder C ziehen. Also nennt man beim 4. Mal F, H, C. Jetzt muss die richtige Ecke dabei sein.

Andere Variante mit gefärbten Ecken:

Wir denken uns die Eckpunkte schwarz und weiß gefärbt: A, C, F, H schwarz, die übrigen weiß. Dann haben benachbarte Eckpunkte immer verschiedene Farben.

Fabia nennt zunächst die Eckpunkte (C, F, H). Falls die Ameise in einer schwarzen Ecke saß, hat Fabia sie entweder sofort gefunden, oder sie saß in der vierten schwarzen Ecke A. In diesem Fall läuft die Ameise in einen der Eckpunkte B, D oder E. Rät Fabia nun (B, D, E), dann hat sie die Ameise gefangen.

Saß die Ameise anfangs in einer weißen Ecke, dann wird sie nach zwei Eckenwechseln wieder in einem weißen Eckpunkt sitzen. Hat Fabia also mit (B, D, E) die Position der Ameise nicht erraten, so ist klar, dass die Ameise anfangs in einer weißen Ecke saß und nun wieder in einer weißen Ecke sitzt. Fabia rät daher nun (D, E, G). Hat sie die Ameise nicht gefunden, dann muß die Ameise in B gesessen haben. Sie wechselt also in eine der Nachbarecken. Spätestens mit (A, C, F) hat Fabia die Ameise folglich gefangen.

Eine Lösung ist also (in dieser Reihenfolge): (C, F, H), (B, D, E), (D, E, G), (A, C, F)

Lösung 116-53

Zur vollständigen Lösung gehören zwei Teile: es ist eine Mindestanzahl an Chips zu ermitteln und anschließend zu zeigen, dass sich diese Anzahl Chips zu einem Rechteck legen lässt, so dass die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind.

Teil 1: Es seien $m, n > 0$ ganze Zahlen und wir nehmen an, dass wir insgesamt mn Chips haben. Laut Voraussetzung sind $\frac{mn}{100}$ davon rot. Ferner liegt in nicht weniger als $\frac{30m}{100}$ Spalten ein roter Chip. Daraus folgt

$$\frac{mn}{100} \geq \frac{30m}{100}$$

D.h. $n \geq 30$. Analog liegt in nicht weniger als $\frac{40n}{100}$ Zeilen ein roter Chip, woraus $m \geq 40$ folgt. Damit beträgt die gesuchte Mindestzahl an Chips $30 \cdot 40 = 1200$. Eine kleinere Zahl kann die Bedingungen der Aufgabe nicht erfüllen, da wir nach unten immer genau abgeschätzt haben ($\geq$).

Teil 2: Wir können 1200 Chips zu einem Rechteck aus 30 Zeilen und 40 Spalten legen.Wir legen dabei genau 12 rote Chips entlang einer Diagonalen. Dann liegt in 12 Zeilen und 12 Spalten je ein roter Chip und die Bedingung der Aufgabe ist erfüllt.

Lösung 116-54

Es sei $x \in \mathbb{R}^+$ eine positive reelle Zahl, die die gegebene Gleichung erfüllt. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{c^2(a+x)}{c^2+ax} &= c \\ c(a+x) &= c^2+ax \\ ac+cx &= c^2+ax \\ x(c-a) &= c(c-a) \end{aligned}$$

Wegen $c > a$ ist $c-a > 0$, so dass $x = c$ folgt. Wenn es also eine positive reelle Zahl x gibt, die die gegebene Gleichng erfüllt, so kann dies nur $x = c$ sein. $x = c$ erfüllt tatsächlich die gegebene Gleichung:

$$\frac{a+c}{1+\frac{a}{c}} = \frac{c(a+c)}{c+a} = c$$

Lösung 116-55

Quadratzahlen enden auf eine der Ziffern 0, 1, 4, 5, 6 und 9.

Falls a auf 1 endet, dann endet $a + 51$ auf 2 und kann daher keine Quadratzahl sein. Damit können 1. und 2. nicht gleichzeitig wahr sein.

Falls a auf 1 endet, dann endet $a - 38$ auf 3, kann also ebenfalls keine Quadratzahl sein. Daher können auch 2. und 3. nicht gleichzeitig wahr sein.

Da genau eine Aussage falsch ist, kann es sich bei der falschen Aussage nur um 2 handeln. Es gibt also natürliche Zahlen m, n so dass gilt

$$\begin{aligned} a+51 &= m^2 \\ a-38 &= n^2 \end{aligned}$$

Subtrahiert man Gleichung 2 von Gleichung 1, so erhält man folgende Bedingung für m und n:

$$m^2 - n^2 = (m+n)(m-n) = 89$$

89 ist eine Primzahl m und n müssen also folgendem Gleichungssystem genügen:

$$\begin{aligned} m+n &= 89 \\ m-n &= 1 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind erfüllt für $m = 45$ und $n = 44$ und nur für diese m und n. Hieraus folgt $a = 1974$. Tatsächlich erfüllt $a = 1974$ die beiden Bedingungen 1 und 3 der Aufgabe und Bedingung 2 nicht:

1. $1974 + 51 = 2025 = 45^2$
2. 1974 endet **nicht** auf 1.
3. $1974 - 38 = 1936 = 44^2$

Die gesuchte Zahl ist 1974.

Lösung 116-56

Es seien $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Lose und $1 \leq k \leq n$ die Nummer des Loses mit dem Hauptgewinn. Dann gewinnt nach Voraussetzung das Los mit der Nummer k wenn

$$1 + 2 + \cdots + (k-1) = (k+1) + \cdots + n$$

gilt. Die Summe auf der linken Seite ist nach der Gaußschen Summenformel gleich

$$\frac{k(k+1)}{2}$$

Die Summe auf der rechten Seite erhält man, indem man von der Summe $1+2+\cdots+n$ die Summe der ersten k natürlichen Zahlen subtrahiert, also mit Gaußscher Summenformel:

$$\frac{n(n+1)}{2} - \frac{k(k+1)}{2}$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned} \frac{(k-1)k}{2} &= \frac{n(n+1)}{2} - \frac{k(k+1)}{2} \\ k(k-1) + k(k+1) &= n(n+1) \\ 2k^2 &= n(n+1) = 288 \cdot 289 \\ k^2 &= 144 \cdot 289 \end{aligned}$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen -204 und 204. Da es keine negativen Losnummern gibt, gewinnt das Los mit der Nummer 204.

6 Klassen 9 bis 13

Lösung 116-61

Insgesamt sind es a_1 Personen, denn jeder spendet mindestens 1 Euro. Die Anzahl der Personen, die mindestens n Euro spenden, ist gleich a_n.

Angenommen, b_1 Personen spenden genau 1 Euro, b_2 Personen spenden genau 2 Euro, b_n Personen spenden genau n Euro. Dann ist das Sammelergebnis gleich

$$S_n = 1 \cdot b_1 + 2 \cdot b_2 + \ldots + n \cdot b_n \tag{1}$$

Wie verhalten sich nun a_x und b_x?

$$\begin{array}{rcl} b_n & = & a_n \\ b_{n-1} & = & a_{n-1} - a_n \\ \ldots & & \\ b_2 & = & a_2 - a_3 \\ b_1 & = a_1 - a_2 & \end{array}$$

Setzt man nun diese Gleichungen in (1) ein, erhält man

$$S_n = 1 \cdot (a_1 - a_2) + 2 \cdot (a_2 - a_3) + \ldots + (n-1) \cdot (a_{n-1} - a_n) + n \cdot a_n$$

Also

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

Lösung 116-62

U.Warnecke

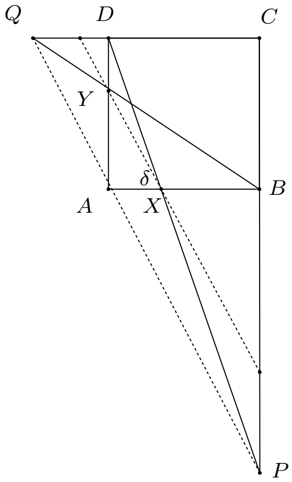
Zum Beweis wird gezeigt: 1.) (AQ) ist parallel zu (XY), und 2.) (AP) ist parallel zu (XY). Aus 1.) und 2.) folgt dann sofort $A \in PQ$.

Zu 1.) Nach Voraussetzung ist $|AX| = |DY|$, und sei $\delta = |\angle YXA|$. Die Dreiecke ABY und DQY sind wegen gleicher Weite entsprechender Winkel ähnliche Dreiecke; daher gilt zusammen mit $|AB| = |AD|$

$$\frac{|AB|}{|AY|} = \frac{|DQ|}{|DY|} = \frac{|DQ|}{|AX|} \quad \Rightarrow \quad \frac{|AX|}{|AY|} = \frac{|DQ|}{|AB|} = \frac{|DQ|}{|AD|},$$

sodass auch DQA und AXY ähnliche Dreiecke sind und damit $|\angle AQD| = |\angle YXA| = \delta$. Also sind (AQ) und (XY) parallele Geraden.

Zu 2.) Im Quadrat $ABCD$ gilt wegen $|AX| = |DY|$ auch $|AY| = |BX|$. Die Dreiecke BXP und AXD sind wegen gleicher Weite entsprechender Winkel ähnliche Dreiecke; daher gilt zusammen mit $|AD| = |AB|$



$$\frac{|AX|}{|AD|} = \frac{|BX|}{|BP|} = \frac{|AY|}{|BP|} \quad \Rightarrow \quad \frac{|AX|}{|AY|} = \frac{|AD|}{|BP|} = \frac{|AB|}{|BP|},$$

sodass auch BAP und AXY ähnliche Dreiecke sind und damit $|\angle PAB| = |\angle YXA| \underbrace{=}_{\text{nach 1.)}} |\angle AQD| = \delta$. Also sind auch (AP) und (XY) parallele Geraden, womit der verlangte Beweis erbracht ist.

Lösung 116-63

Angenommen, an der Tafel standen zunächst die Zahlen $a_1, \ldots, a_n$. Dann gilt

$$a_1 + \cdots + a_n = Mn$$

Nach Hinzufügen von 15 gilt

$$a_1 + \cdots + a_n + 15 = (M+2)(n+1)$$

Nach Hinzufügen von 1 gilt

$$a_1 + \cdots + a_n + 15 + 1 = (M+1)(n+2)$$

Ersetzt man in den beiden letzten Gleichungen jeweils $a_1 + \cdots + a_n$ durch Mn, erhält man ein lineares Gleichungssystem für M und n:

$$Mn + 15 = (n+1)(M+2) \qquad (2)$$
$$Mn + 16 = (n+2)(M+1) \qquad (3)$$

Dieses hat als einzige Lösung $n = 4, M = 5$.

Lösung 116-64

U.Warnecke:

Damit $2^n + 2$ Teiler von $8^n + n^3$ sein kann, muss $8^n + n^3$ und damit auch n gerade sein. Nun ist

$$8^n + n^3 = (2^n)^3 + n^3 = (2^n + n)\Big((2^n)^2 - 2^n \cdot n + n^2\Big).$$

Hieraus entnimmt man, dass $2^n + 2$ und $2^n + n$ nur für $n = 2$ übereinstimmen und nur dann die gewünschte Teilbarkeit gelingt: 6 ist dann Teiler von 72.