1 Vorschule

Lösung 117-11

Eine Variante ist diese:

7, 5, 4, 6, 1, 2, 3

Lösung 117-12

Das Tier hat 4 Beine: man sieht von vorn und hinten je zwei Beine. Ebenso sieht man von links und von rechts je zwei Beine.

Lösung 117-13

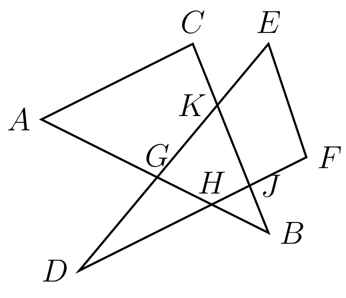
A	B	C	D
B	C	D	A
C	D	A	B
D	A	B	C

Lösung 117-14

A-2, B-4, C-1, D-3

2 Klassen 1 und 2

Lösung 117-21



Es sind 5 Vierecke: $AGKC$, $AHJC$, $GHJK$, $EKJF$, $EGHJ$.

Lösung 117-22

a) $16 + 16 = 32$. Julius wirft 32 Meter weit. $32 - 21 = 11$. Er wirft 11 Meter weiter als Marie.

b) $82 - 17 = 65$. Der kürzeste Sprung war 65 Meter weit.

c) 1 Minute und 10 Sekunden sind 70 Sekunden. Sarah gewann und war 3 Sekunden schneller als Natascha.

Lösung 117-23

Da Diana weder neben Elias, noch neben Annika noch neben Conrad steht, gibt es zwei Fälle:

Diana steht ganz vorn und Bastian direkt hinter ihr oder Diana steht ganz hinten und Bastian direkt vor ihr.

Da Annika ihre Karte vor Bastian kauft, kann Diana nicht ganz vorn stehen. Diana kauft also ihre Karte als letze. Da Conrad und Elias nicht nebeneinander stehen, muss Annika zwischen beiden stehen, wobei Elias vor Annika kommt, weil er seine Karte früher kauft als sie. Es ist also nur diese Reihenfolge möglich:

Elias Annika Conrad Bastian Diana

Elias kauft seine Karte zuerst, die anderen folgen in der angegebenen Reihenfolge.

Lösung 117-24

Alter des Großvaters: $82 - 12 = 70$ Jahre.

$70 - 12 = 58$. Der Großvater ist 58 Jahre älter als der Enkel.

Lösung 117-25

Wenn es Robert war, haben Robert und Jan die Wahrheit gesagt und Klaus nicht. Wäre es Jan gewesen, hätte nur Klaus die Wahrheit gesagt, Jan und Robert aber nicht. Wäre es Klaus gewesen, hätten alle drei die Unwahrheit gesagt.

Daher muss Robert die Fensterscheibe getroffen haben.

Lösung 117-26

an Eigenbrodt, 7 Jahre, Klasse 2:

$$\begin{aligned} 1R &= 3B \\ 30G &= 2R \\ 15G &= 1R = 3B \end{aligned}$$

Also sind 5 gelbe Kugeln so schwer wie eine blaue.

Lösung 117-27

Jedes Kind bekommt vier ganze Äpfel und einen halben.

Lösung 117-28

a) 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16,18, 20, 22, 24, 26, 28

b) 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52

c) 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70

d) 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 120

e) 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39

f) 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72

g) 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88

3 Klassen 3 und 4

Lösung 117-31

a) 8 Zahlen zwischen 10 und 19 haben die Eigenschaft, 7 Zahlen zwischen 20 und 29, 6 Zahlen zwischen 30 und 39 usw. Das sind insgesamt $8+7+6+5+4+3+2+1=36$ Zahlen.

b) Es sind 4 Zahlen zwischen 50 und 59, 3 Zahlen zwischen 60 und 69 usw., insgesamt daher $4+3+2+1=10$ Zahlen.

Lösung 117-32

- Britta Broccoli isst am liebsten Paprika.
- Karla Karotte isst am liebsten Broccoli.
- Paula Paprika isst am liebsten Karotten.

Britta Broccoli isst nicht gern Broccoli und nicht gern Karotten (sofern man annimmt, dass sie keine Selbstgespräche führt). Also isst sie gern Paprika. Daher muss Karla gern Broccoli essen und Paula gern Karotten.

Lösung 117-33

Er muss mindestens 7 Murmeln herausnehmen.

Begründung: Nachdem er 6 Murmeln herausgenommen hat, hat er im ungünstigsten Fall von jeder der 3 Farben gerade 2 erwischt. Mit der 7. Murmel nimmt er dann sicher die dritte einer der 3 Farben heraus.

Lösung 117-34

Es sind 91 Geldstücke.

Begründung: Man kann alle Teiler der Zahl 7 bis zur 100 durchprobieren, welchen Rest sie bei Division durch 2, 3, 5 und 6 lassen. Nur die 91 lässt jedes Mal den Rest 1.

Lösung 117-35

V + III = VIII

Lösung 117-36

$231 + 453 + 675 + 897 = 2256$

Lösung 117-37

$$\square; \quad 9\square; \quad 99; \quad 850; \quad 85\square; \quad 9\square\square; \quad \square 2 \square 7$$

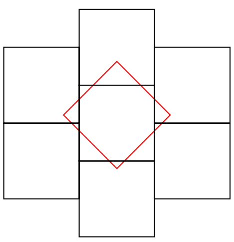
Lösung 117-38

a)	$275 < 70 \cdot x < 631$	$x = 4, 5, 6, 7, 8, 9$
b)	$42 > 6 \cdot x > 17$	$x = 3, 4, 5, 6$
c)	$19 < 3 \cdot x + 5 < 24$	$x = 5, 6$

4 Klassen 5 und 6

Lösung 117-41

Tipp: zuerst die 7 weißen Quadrate so dicht wie möglich packen, danach das schwarze Quadrat darauflegen, so dass es alle weißen berührt.



Lösung 117-42

Lösung von Thekla Hamm, 10 Jahre, Klasse 5:

Wenn man 3 Tage markiert, gibt es 4 Möglichkeiten, wie die Lücken verteilt sind:

a) T L T L T

b) T L T L T L

c) L T L T L T

d) L T L T L T L

Die möglichen Ziffernanzahlen sind

- 53 für Monate mit 31 Tagen
- 51 für Monate mit 30 Tagen
- 49 für Monate mit 29 Tagen
- 47 für Monate mit 28 Tagen

Es wird behauptet, dass c) und d) nicht stimmen können. Das kann man so sehen:

Bei den Möglichkeiten c) und d) müssen alle Geburtstage 2 Ziffern haben, da L mindestens 10 Ziffern lang ist. Also nehmen die Geburtstage T 6 Ziffern weg. Zu verteilen bleiben

- 47 Ziffern für Monate mit 31 Tagen
- 45 Ziffern für Monate mit 30 Tagen
- 43 Ziffern für Monate mit 29 Tagen
- 41 Ziffern für Monate mit 28 Tagen

Für d) gibt es 4 Lücken L. Keine der Anzahlen lässt sich durch 4 teilen. Also geht d) nicht.

Für c) gibt es 3 Lücken L. 45 ist zwar durch 3 teilbar, aber wenn man erst 15 Ziffern abzählt, landet man beim Geburtstag 13, danach aber zwischen der 2 und der 1 von 21. Das geht auch nicht!

Andere Variante:

Annahme: Der erste Tag des Monats ist nicht angemalt.

Dann muss der erste angemalte Tag des Monats ein zweistelliges Datum haben, denn falls die 9 angemalt wäre, wäre jede der übrigen Zahlenketten genau 8 Ziffern lang. Das ginge nur, wenn der Monat genau 23 Tage hätte:

12345678**9**10111213**14**15161718**19**20212223

Bei jeder kleineren Zahl als 9 (außer bei 1) wäre die Zahl der Tage des Monats noch kleiner.

Wenn der kleinste angemalte Tag zweistellig ist, so hat die Zahlenkette davor eine ungerade Anzahl Ziffern. Alle übrigen Zahlenketten bestehen aber aus einer geraden Anzahl Ziffern. Das widerspricht der Voraussetzung, dass alle Zahlenketten gleich lang sind.

In beiden Fällen kommen wir zu einem Widerspruch. Daher kann unsere Annahme nicht richtig sein. und eine der Freundinnen muss am ersten Tag des Monats Geburtstag haben.

Lösung 117-43

Da der Code mehr Zweien als Dreien enthält, gibt es folgende 4 Aufteilungen:

1) Sieben Zweien und keine Drei: Quersumme 14

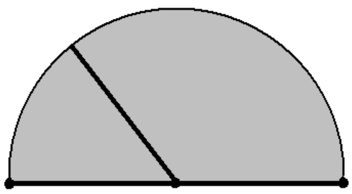
2) Sechs Zweien und eine Drei: Quersumme 15

3) Fünf Zweien und zwei Dreien: Quersumme 16

4) Vier Zweien und drei Dreien: Quersumme 17

Eine Zahl ist genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist. Das trifft nur auf Aufteilung 2) zu. Der Code besteht also aus 6 Zweien und einer 3. Eine Zahl ist genau dann durch 4 teilbar, wenn die aus den beiden Endziffrn (Zehner und Einer) gebildete Zahldurch 4 teilbar ist. Mögliche Endzifferanordnungen sind also die folgenden (und nur diese): 22, 23, 32. Von diesen ist nur die 32 durch 4 teilbar. Der Code lautet also 2222232.

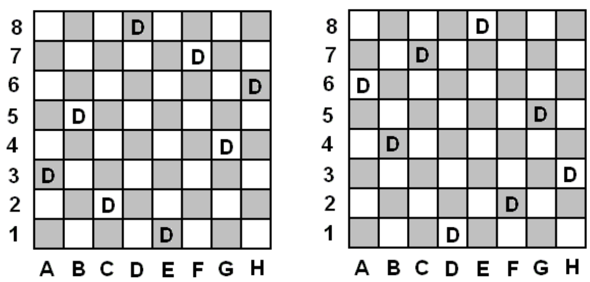
Lösung 117-44



An der geraden Seite der halbrunden Wiese einen Pfosten an beiden Seiten und in der Mitte befestigen. Mit der Schere das Seil durchschneiden. Mit dem einen Seil die Pfosten verbinden und mit dem anderen Seil die Kuh an dem mittleren Pfosten anbinden. Das Seil, wo die Kuh befestigt ist, muss genau solang sein wie der Radius der halbrunden Wiese.

Lösung 117-45

Der russische Mathematiker und Schachmeister Karl Jatiker hat bewiesen, dass es 92 solcher Stellungen gibt. Zwei mögliche sind hier dargestellt:



Lösung 117-46

Es gilt

$$\begin{aligned} S+T+U &= 2990 \\ S &= 2T \end{aligned}$$

also

$$3T = 2990 - U$$

$2990-U$ ist durch 3 teilbar. Einzig bei $U = \{E\}$ ist diese Bedingung erfüllt. Aus U kommt folglich der Teilnehmer E.

Damit ist

$$\begin{aligned} 3T &= 2670 \\ T &= 890 \\ S &= 1780 \end{aligned}$$

Beide Punktzahlen enden auf 0. Daher sind für die Endziffern der Punktzahlen in einer Mannschaft nur (6, 6, 8), in der anderen nur (2, 8) möglich. Es gibt 4 Möglichkeiten, die entsprechenden Punktzahlen für die Mannschaft aus T zu wählen:

1) $426 + 408 + 36 = 870$. Es fehlen 20 Punkte.

2) $426 + 238 + 36 = 700$.Es fehlen 190 Punkte.

3) $408 + 22 = 430$. Es fehlen 460 Punkte.

4) $238 + 22 = 260$. Es fehlen 630 Punnkte.

Die fehlenden Punktzahlen unter 1) bis 3) lassen sich mit den verbleibenden Punkten nicht erreichen. Einzig für 4) gibt es eine Lösung:

$$630 = 480 + 100 + 40 + 10$$

Folglich ist $T = \{B, F, G, H, K, L\}$, $S = \{A, C, D, I\}$ und $U = \{E\}$. Die Punktsumme für S beträgt tatsächlich 1780.

Lösung 117-47

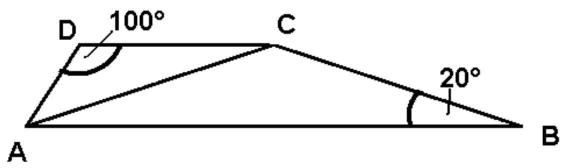
In einen Krug mit 10 Litern Fassungsvermögen kann man genau 3 Mal den Inhalt des kleineren Kruges schütten, ohne das er überläuft, wenn der kleine Krug ein Volumen von 3 Litern hat. Hat der kleine Krug hingegen ein Volumen von 4 Litern, würde bei der 3. Ladung der 10- Liter- Krug überlaufen. Tanja muss also den Inhalt des kleineren Kruges genau 3 mal in den 5- Liter- Krug füllen, wobei sie diesen leert, sobald er voll ist. Muss sie den großen Krug nur einmal leeren, dann passen in den kleinen Krug 3 Liter Wasser, muss sie ihn jedoch zweimal leeren, passen in den kleinen Krug 4 Liter Wasser.

Lösung 117-48

111111	63
101	5
100001	33
1100	12
110	6
1011	11

5 Klassen 7 und 8

Lösung 117-51



Aus $\mid AC \mid = \mid BC \mid$ folgt $\angle ABC = \angle CAB = 20°$ Innenwinkelsatz in $\Delta ABC \rightarrow \angle BCA = 180° - 20° - 20° = 140°$

Die Winkel $\angle CAB$ und $\angle ACD$ sind als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen gleich groß, d.h. gleich 20°.

Nach Innenwinkelsatz in ΔACB ist $\angle DAC$ gleich $180° - 20° - 100° = 60°$ groß.

Lösung 117-52

Es sei $z = 100a + 10b + c$ mit $1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b, c \leq 9$ eine dreistellige Zahl, die zwölf mal so groß ist wie ihre Quersumme. Dann gilt für a, b und c:

$$12(a + b + c) = 100a + 10b + c$$

bzw.

$$2b = 11 \cdot (8a - c)$$

Wegen $b \geq 0$ folgt hieraus $8a \geq c$.

Wegen $b \leq 9$ folgt außerdem $11 \cdot (8a - c) \leq 18$, also $8a \leq c + 1$. Insgesamt gilt damit

$$0 \leq c \leq 8a \leq c + 1 \leq 10$$

Diese Ungleichungen sind nur für $c = 8$ und $a = 0$ erfüllt. Für diese a und c ergibt sich $b = 1$

108 ist die einzige Zahl, die der Bedingung der Aufgabe genügt.

Lösung 117-53

Lösung von Yuxuan, 10 Jahre, Klasse 5:

Weil 85 Farbwürfel eine blaue und 80 eine rote Seite haben, gibt es mindestens $(85+80)-100 = 65$ Würfel mit blauen und roten Seiten. Weil gleichzeitig 75 Würfeln eine grüne Seite haben, müssen mindestens $(65 + 75) - 100 = 40$ Würfel alle drei Farben zeigen.

Antwort: Es müssen mindestens 40 Würfel alle 3 Farben zeigen.

Variante 2:

Wir nehmen an, die 100 Würfel sind ungefärbt und färben sie so, dass sie anschließend die geforderte Farbverteilung haben und möglichst wenige Würfel 3 verschiedene Farben aufweisen. Wir färben also bei 75 der Würfel eine Seite grün. Anschließend färben wir bei 85 der Würfel eine Seite blau, wobei wir mit den 25 noch nicht gefärbten Würfeln beginnen. Dann haben $85 - 25 = 60$ Würfel je eine grüne und eine blaue Seite. Nun müssen noch 80 der Würfel mit rot gefärbt werden. Damit so wenig wie möglich Würfel alle 3 Farben abbekommen, beginnen wir nun mit den 40 Würfeln, die nur entweder eine blaue oder eine grüne Seite, aber keine zwei verschiedene Farben haben. Bleiben 40 Würfel übrig, die jeweils eine blaue **und** eine grüne Seite haben und mit rot gefärbt werden müssen, damit 80 Würfel mindestens eine rote Seite haben.

Mindestens 40 Würfel haben also alle 3 Farben.

Bemerkung: Es spielt übrigens keine Rolle, in welcher Reihenfolge wir die Würfel färben, wenn wir dabei der Regel folgen, dass immer so wenig wie möglich Würfel mehr als eine oder zwei Farben erhalten.

Lösung 117-54

Es müssen auf jeden Fall 2 schwarze Hüte dabei sein, denn anderenfalls könnte eine der drei Personen sofort auf ihre Hutfarbe schließen, weil sie ja einen weißen und einen grünen Hut sähe. Die dritte Person kann aber erst WEGEN der Aussagen der beiden anderen auf ihre Hutfarbe schließen.

Bleiben 2 Fälle zu unterscheiden:

Fall 1: die dritte Person hat keinen schwarzen Hut auf. Dann sähe sie 2 schwarze Hüte und könnte NICHT auf ihre Hutfarbe schließen.

Fall 2: die dritte Person hat einen schwarzen Hut auf. Dann sieht die erste Person einen schwarzen und einen nichtschwarzen, könnte also selbst einen schwarzen oder einen nichtschwarzen Hut tragen,was zu ihrer Aussage führt. Das selbe gilt für die zweite Person.

Die dritte Person hat also einen schwarzen Hut auf.

Lösung 117-55

Die Schalter seien mit 1, 2, und 3 numeriert. Man knipst z.B. mit dem Schalter 1 eine Lampe an und wartet 10 Minuten. Dann knipst man diese Lampe wieder aus (Schalter 1 ist aus) und stattdessen mit Schalter 2 eine andere Lampe an. Nun läuft man so schnell wie möglich hoch und stellt Folgendes fest: Eine der Lampen ist aus und heiß, eine der Lampen ist aus und kalt, die dritte Lampe brennt. Zur ausgeschalteten heißen Lampe gehört daher Schalter 1, zur ausgeschalteten kalten Lampe Schalter 3 und zur brennenden Lampe Schalter 2.

Lösung 117-56

Wegen $4^2 = 16$, $34^2 = 1156$, $334^2 = 111556$ kommt man auf folgende Annahme:

Es sei

$$a_0 = 16, a_1 = 1156, \dots, a_n = 1\underbrace{1\dots1}_{n}\underbrace{5\dots5}_{n}6, \dots$$

Dann gilt

$$a_n := \underbrace{1\dots1}_{n+1}\underbrace{5\dots5}_{n}6 = \underbrace{3\dots3}_{n}4^2 \tag{1}$$

Für $n = 0, 1, 2$ haben wir das schon nachgeprüft. Wir nehmen an, dass es für irgendein $n \geq 1$ gilt und schauen uns a_{n+1} an. Wenn wir beweisen können, dass

$$a_{n+1} := \underbrace{1\dots1}_{n+2}\underbrace{5\dots5}_{n+1}6 = \underbrace{3\dots3}_{n+1}4^2 \tag{2}$$

ist, haben wir gezeigt, dass die gegebene Zahlenfolge aus lauter Quadratzahlen besteht, nämlich genau aus den Quadraten der Zahlen aus einer beliebigen Anzahl Dreien gefolgt von genau einer Vier.

Nun ist

$$\begin{aligned}
\underbrace{3\dots3}_{n+1}4^2 &= \left(3\underbrace{0\dots0}_{n+1} + \underbrace{3\dots3}_{n}4\right)^2 \\
&= 9\underbrace{0\dots0}_{2(n+1)} + \left(2\cdot 3\underbrace{0\dots0}_{n+1}\cdot\underbrace{3\dots3}_{n}4\right) + \underbrace{1\dots1}_{n+1}\underbrace{5\dots5}_{n}6
\end{aligned}$$

In der letzten Gleichung haben wir nach dem Ausmultiplizieren unsere Annahme (1) für n verwendet, die für gewisse n ja richtig ist. Betrachten wir den mittleren Summanden auf der rechten Seite. Er ist gleich

$$\underbrace{6\dots6}_{n}8\cdot 3\cdot\underbrace{0\dots0}_{n+1} = 2\underbrace{0\dots0}_{n}4\underbrace{0\dots0}_{n+1},$$

denn die Überträge aus der Multiplikation mit 3 ergeben zusammen mit den n Ziffern 6 genau n Ziffern 0. Nun müssen wir nur noch korrekt addieren:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & 9 & 0 & 0\cdots0 & 0\cdots0 & 0 \\
+ & & 2 & 0 & 0\cdots4 & 0\cdots0 & 0 \\
+ & & & 1 & 1\cdots1 & 5\cdots5 & 6 \\
\hline
= & 1 & 1 & 1 & 1\cdots5 & 5\cdots5 & 6
\end{array}$$

Der erste Summand ist eine 9 gefolgt von $2n+2$ Nullen - also eine $(2n+3)$- stellige Zahl. Der zweite Summand ist eine 2 gefolgt von n Nullen, einer 4 und $n+1$ Nullen - also eine $(2n+3)$- stellige Zahl. Der dritte Summand sind $n+1$ Einsen gefolgt von n Fünfen und einer 6 - also eine $(2n+2)$- stellige Zahl. Die Addition ist somit ganz einfach und ergibt die behauptete Summe

$$\underbrace{1\ldots1}_{n+2}\underbrace{5\ldots5}_{n+1}6$$

Damit haben wir gezeigt, dass auch a_{n+1} eine Quadratzahl ist, wofür wir nur die Annahme (1) für ein $n \geq 1$ und ein bisschen Elementarmathematik verwendet haben. Aus der Gültigkeit für $n = 3$ folgt so die Gültigkeit für $n = 4$, hieraus die Gültigkeit für $n = 5$ usw., also für jedes $n \geq 1$.

Bemerkung: Wir haben hier die Beweismethode der vollständigen Induktion angewendet, die in Klasse 7/8 noch nicht bekannt ist und diese daher sehr ausführlich erläutert.

6 Klassen 9 bis 13

Lösung 117-61

Ergebnis: $(2020^2 + 1) = 4080401$.

Wir verwenden die Formel

$$a^4 + 4 = a^4 + 4a^2 + 4 - 4a^2 = (a^2+2)^2 - (2a)^2 = \Big((a-1)^2+1\Big)\Big((a-1)^2-1\Big)$$

Damit kann man den Term im Zähler umschreiben als Produkt:

$$(2^2+1)\cdot(4^2+1)\cdot(6^2+1)\cdot\ldots\cdot(2018^2+1)\cdot(2020^2+1)$$

und den Term im Nenner als

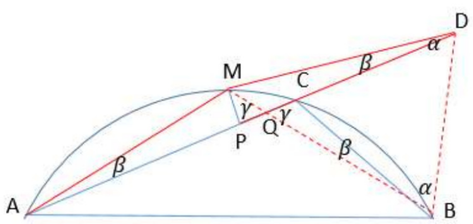
$$(0^2+1)\cdot(2^2+1)\cdot(4^2+1)\cdot\ldots\cdot(2016^2+1)\cdot(2018^2+1)$$

Alles bis auf (2020^2+1) kürzt sich weg.

Hinweis: Man kann auch die Identität von Sophie Germain verwenden:

$$\begin{aligned}
a^4+4 &= (a^2)^2+2^2\\
&= (a^2+2-\sqrt{2a^2\cdot 2})(a^2+2+\sqrt{2a^2\cdot 2})\\
&= (a^2+2-2a)(a^2+2+2a)\\
&= \Big((a-1)^2+1\Big)\Big((a+1)^2+1\Big)
\end{aligned}$$

Lösung 117-62



Es wird AC verlängert, so dass $AP = PD$ ist. Dann ist das Dreieck $\triangle ADM$ gleichschenklig, d.h.

$$\angle MAD = \angle ADM =: \beta$$

Es ist $AM = MD = BM$, d.h. das Dreieck $\triangle BDM$ ist gleichschenklig, d.h.

$$\angle MBD = \angle BDM =: \alpha$$

Peripheriewinkel über gleichen Kreisbögen sind gleich. D.h $\angle BMA = \angle BCA$. Die Geraden AC und MB schneiden einander in Q. D.h. die beiden Dreiecken $\triangle AQM$ und $\triangle QBC$ sind paarweise alle Winkel gleich: Peripheriewinklel und β und γ. D.h. die beiden Dreiecke sind ähnlich und $\angle QBC = \beta$. Daraus ergibt sich, dass im Dreieck $\triangle CBD$ gilt $\angle CBD = \angle BDC = \alpha - \beta$. Damit ist das Dreieck $\triangle CBD$ gleichschenklig, d.h. $BC = CD$. Daraus folgt die Behauptunf $AP = PC + BC$.

Lösung 117-63

Alle 49 Zahlen sind paarweise verschieden, denn anderenfalls wäre die Summenbedingung verletzt, da die Summe der beiden gleichen Zahlen mit einer beliebigen dritten ebenfalls gleich wären.

Seien die 49 Zahlen

$$a_1 < a_1 < \ldots < a_{48} < a_{49}$$

der Größe nach geordnet. Betrachten wir nun die Differenzen benachbarter Zahlenpaare a_i, a_{i+1} und a_j, a_{j+1} in dieser Zahlenfolge. Angenommen, wir fänden Zahlen $a_i, a_{i+1}, a_j, a_{j+1}$ mit

$$a_{i+1} - a_i = a_{j+1} - a_j$$

Dann gilt

$$a_{i+1} + a_j = a_{j+1} = a_i$$

Das ist aber nur möglich, wenn $j+1 = i$ ist, denn sonst hätte man 4 paarweise verschiedene Zahlen gefunden, bei denen 2 Summen gleich wären.

Daher können die Differenzen zwischen 2 benachbarten Zahlen in der Folge höchstens für 3 benachbarte Zahlen gleich sein. Die Abstände der benachbarten Zahlen bilden also ebenfalls eine Zahlenfolge paarweise verschiedener Zahlen. Addieren wir alle Differenzen benachbarter Zahlen, so erhalten wir den Abstand zwischen der kleinsten Zahl a_1 und der größten Zahl a_{49}. Für diesen gilt

$$a_{49} - a_1 \geq 2(1 + 2 + \ldots 24) = 600$$

und wegen $a_1 \geq 1$ folgt $a_{49} \geq 601$.

Lösung 117-64

Aus Gleichung (2) folgt $k \neq 0$. Durch Multiplikation mit k^2 erhalten wir aus Gleichung (2)

$$kx + 5k^2y = 2k^2 \tag{3}$$

und aus (1) folgt

$$-kx + 3y = -18 \tag{4}$$

und durch Addition von (3) und (4)

$$y(5k^2 + 3) = 2k^2 - 18, \quad y = \frac{2(k^2 - 9)}{5k^2 + 3} \tag{5}$$

Ferner erhalten wir aus (2)

$$x = k(2 - 5y) = k\left(2 - \frac{10(k^2 - 9)}{5k^2 + 3}\right) = \frac{96k}{5k^2 + 3} \tag{6}$$

Wegen $5k^2 + 3 > 0$ gilt $y < 0$ genau dann, wenn $k^2 < 9$, also $-3 < k < 3$ ist, also für ganzzahlige k nur in den Fällen $k = -2, -1, 0, 1, 2$. Andereseits gilt wegen (6) $x < 0$ nur für $k < 0$. Daher hat das gegebene Gleichungssystem nur für $k = -1$ und $k = -2$ negative rationale Lösungen.