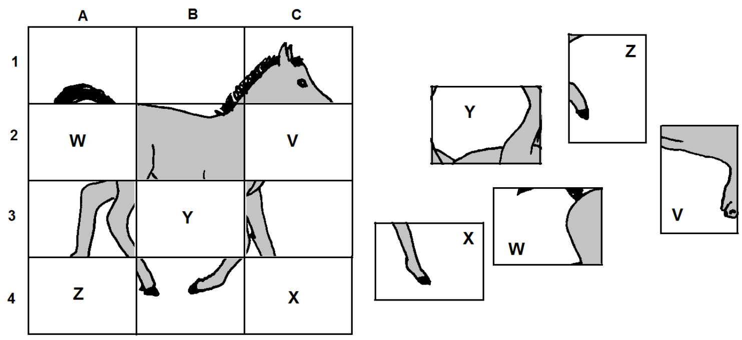
1 Vorschule

Lösung 118-11

Die Maus ist 17 Wochen alt, der Kater 25 Wochen.

Lösung 118-12

V: C2, W: A2, X: C4, Y: B3, Z: A4



Lösung 118-13

Die wenigsten Ostereier hat Hans gefunden. Dann kommen Tim, Anne, Julia und Max.

Lösung 118-14

Bild B zeigt die 1 oben.

2 Klassen 1 und 2

Lösung 118-21

$$17 - 8 = 9 \Rightarrow a < 9 \Rightarrow a = 8$$
$$36 - 12 = 24 \Rightarrow b < 24 \Rightarrow b = 23$$
$$54 + 18 = 72 \Rightarrow c < 72 \Rightarrow c = 71$$
$$29 : 2 > 14 \Rightarrow d = 14$$

Lösung 118-22

Die Hälfte der Zeit ist 30 Minuten nach 11:45. Bis 12:00 vergehen 15 Minuten, die restlichen 15 Minuten sind um 12:15 vergangen.

Das Ei fiel um 12:15 herunter.

Lösung 118-23

Hier stehen die Zahlen in der Reihenfolge, in der man sie herausbekommt:

$$\begin{aligned} O &= 3 \\ S &= 5 \\ T &= 9 \\ E &= 2 \\ R &= 7 \\ N &= 8 \end{aligned}$$

Probe:

$$2 + 9 + 8 + 5 + 7 + 3 = 34$$

Lösung 118-24

2	**6**	**7**	**10**	**1**	**9**	**5**	**8**	**0**	**17**
gelb	grau	rot	grün	blau	weiß	lila	rosa	olive	orange

Lösung 118-25

a)

12	+	6	=	18
+		+		+
7	+	8	=	15
=		=		=
19	+	14	=	33

b)

12	+	6	=	18
+		−		+
7	−	6	=	1
=		=		=
19	+	0	=	19

Lösung 118-26

Juri muss dieeinstellige Zahl stets 11 Mal addieren, um die zweistellige Zahl zu erhalten:

$$\begin{aligned} 1 &\Rightarrow 11\,;\ 11 = 11 \cdot 1 \\ 2 &\Rightarrow 22\,;\ 22 = 11 \cdot 2 \\ 3 &\Rightarrow 33\,;\ 33 = 11 \cdot 3 \\ \ldots \end{aligned}$$

Lösung 118-27

Lennart, 8 Jahre, Klasse 2 hat diese Aufgabe so gelöst:

Der zweite Lastwagen bringt 35 Mützen pro Lieferung.

1) Zusammen bringen sie 520 Mützen.

2) Der erste Lastwagen kommt jeden Monat 4 oder 5 Mal. Er bringt 220 oder 275 Mützen. Der zweite Lastwagen kommt jeden Monat 6 oder 7 Mal. Er bringt 210 oder 245 Mützen. Wenn der erste Lastwagen 4 Mal kommt und der zweite 7 Mal, bringt der zweite Lastwagen mehr Mützen. Und sonst bringt der erste Lastwagen mehr Mützen.

3) Der Mützenhändler hat am Ende des Monats 485 Mützen.

4) Der zweite Lastwagen muss alle 4 Tage kommen. Dann bringt er 280 Mützen.

5) Man kan sich ∞ Fragen ausdenken.

Variante 2 von Joel:

Der erste Laster bringt am 1., 8., 15., 22. und 29. jeweils 55 Mützen, der zweite am 1., 6., 11., 16., 21., 26. und 31. jeweils 35 Mützen.

1) $5 \cdot 55 + 7 \cdot 35 = 520$

2) Der erste LKW bringt 275, der zweite 245. Der erste bringt also mehr Mützen.

3) Wegen $31 = 4 \cdot 7 + 3$ sind es 5 Wochen. Der Laden verkauft also $7 \cdot 5 = 35$ Mützen und hat daher noch $520 - 35 = 485$ Mützen.

4) Da der erste LKW insgesamt 275 Mützen bringt, reicht es, wenn der zweite alle 4 Tage einmal kommt. Er käme dann wegen $31 = 4 \cdot 7 + 3$ insgesamt 8 Mal und brächte $8 \cdot 35 = 280$ Mützen.

5) Beliebig viele, z.B.auch: „Wie heißen die Fahrer?“

Lösung 118-28

Wenn die Summe 50 betragen soll, muss die Summe der Einerziffern der 3 ausgewählten Zahlen auf 0 enden. Folgende Einerziffern sind daher möglich:

$$(1, 9, 0), (1, 2, 7), (0, 5, 5), (9, 5, 6), (6, 7, 7)$$

Für $(1, 9, 0)$ wäre $21 + 19 + 30$ möglich. Die Summe ist aber größer als 50.

Für $(1, 2, 7)$ wäre $21 + 12 = 7 = 40$ möglich und $21 + 12 + 27 = 60$. Keine der Summen ist gleich 50.

Für $(0, 5, 5)$ wäre $30 + 25 + 15$ möglich. Die Summe ist größer als 50

Für $(9, 5, 6)$ wäre $19 + 25 + 6 = 50$ möglich. Das passt.

Drei Zahlen mit Summe 50 sind 6, 19 und 25.

Hinweis: Damit ist die Aufgabe gelöst, denn man sollte eine Dreiergruppe finden. Aber es ist ja auch interessant zu schauen, ob dies die einzige Dreiergruppe ist.

Die zweite Dreiergruppe mit den Einerziffern 9, 5 und 6 ist 19, 6 und 15. Da die Summe von 19, 25 und 6 aber gleich 50 ist, ist die Summe von 19, 6 und 15 kleiner als 50 (wir müssen sie gar nicht ausrechnen).

Für $(6, 7, 7)$ wäre $6 + 7 + 17$ möglich. Diese Summe ist aber kleiner als 50.

Es gibt genau eine Lösung der Aufgabe, nämlich **19, 25, 6**.

3 Klassen 3 und 4

Lösung 118-31

zu F1

$$\begin{aligned} 292 \text{ km} + 335 \text{ km} &= 627 \text{ km} \\ 660 \text{ km} - 627 \text{ km} &= 33 \text{ km} \end{aligned}$$

Der Umwg war 33 km lang.

zu F2

$$660 \text{ km} + 627 \text{ km} = 1287 \text{ km}$$

Her Wagner ist insgesamt 1287 Kilometer gefahren.

Lösung 118-32

Für ein DIN-A0-Blatt benötigt Anna 2 DIN-A1-Blätter.

Für ein DIN-A1-Blatt benötigt Anna 2 DIN-A2-Blätter.

Für ein DIN-A2-Blatt benötigt Anna 2 DIN-A3-Blätter.

Für ein DIN-A3-Blatt benötigt Anna 2 DIN-A4-Blätter.

Daher benötigt Anna

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

DIN-A4-Blätter für das Poster.

Lösung 118-33

$$21 : 7 = 3, 7 \cdot 9 = 63, 45 + 45 = 90, 80 - 18 = 62$$

Lösung 118-34

Das Mühmchen pflückte 255 Blümchen.

Lösung 118-35

Lösung von Thekla Hamm, 9 Jahre, Klasse 3

Jenny kann 18 Zahlen aufschreiben. Jan kann 24 Zahlen aufschreiben.

Erklärung: Jan hat zunächst 4 Möglichkeiten wohin er die 6 setzt:

$$xxx6, xx6x, x6xx, 6xxx$$

Für jede davon hat er drei Möglichkeiten wohin er die 7 setzt. Das macht insgesamt $4 \cdot 3 = 12$ Möglichkeiten:

$$xx76, x7x6, 7xx6, xx67, x76x, 7x6x, x6x7, x67x, 76xx, 6xx7, 6x7x, 67xx$$

Für jede davon hat er noch 2 Möglichkeiten wohin er die 8 setzt. Das sind dann $12 \cdot 2 = 24$ Möglichkeiten. Die schreibe ich jetzt aber nicht mehr alle auf. Wenn er die 8 gesetzt hat, ist nur noch 1 Platz für die 9 frei. Also gibt es nicht noch mehr Möglichkeiten.

Bei Jenny ist es anders. Sie hat nur 3 Möglichkeiten wohin sie die 0 setzt, weil die 0 ja nicht ganz links stehen darf. Danach hat sie je 3 Möglichkeiten für die 1 und dann je 2 Möglichkeiten für die 2. Das sind zusammen $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ Möglichkeiten.

Lösung 118-36

2	9	16	7	12	6	4	11
8	15	10	3	13	7	3	14

Lösung 118-37

212	+	**371**	−	**477**	=	106
+		−		+		+
477	−	106	+	0	=	**371**
−		+		−		−
636	−	**0**	−	318	=	318
=		=		=		=
53	+	265	−	**159**	=	159

Lösung 118-38

Die Gummibärchen kosten 79 Cent. Lars hatte 78 ct dabei und Sarah gar kein Geld.

4 Klassen 5 und 6

Lösung 118-41

Er hatte keinen Grund dazu, denn der Käufer hatte ihn um 40 Euro betrogen. Die erste Uhr und die Kette hatte er zurückgelassen, so als hätte er sie nie gekauft und dem Verkäufer also eine Uhr für 84 Gulden für nur 44 Gulden abgekauft.

Lösung 118-42

a) Es sei s_a die Länge des Weges, den das aus A startende Fahrzeug bis zum Treffpunkt zurücklegt, s_b die Länge des Weges, den das in B startende Fahrzeug bi dahin zurücklegt. Dann gilt

$$\begin{aligned} s_a &= \frac{2}{3} s_b \\ s_a + s_b &= 100\text{km} \end{aligned}$$

Auflösen dieses Gleichungssystems ergibt $s_a = 40\text{km}$, $s_b = 60\text{km}$. Das Fahrzeug aus B ist folglich das schnellere. Es fährt 80 km/h. Bis zum Treffpunkt vergehen daher

$$t = 60\text{km} : 80\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{3}{4}\ \text{h}$$

Die beiden Fahrzeuge treffen sich nach 45 Minuten.

b)Die Geschwindikeit des Fahrzeugs aus A ist gleich $40\text{km} : \frac{3}{4}\text{h} = 53\frac{1}{3}\text{km/h} \approx 53{,}3\ \text{km/h}$.

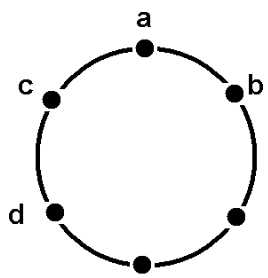
Lösung 118-43

Für die Einer-, Zehner und Hunderterziffer kommen die Zahlen $1, \ldots, 8$ in Frage. Das ergibt $8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$ dreistellige Zahlen. Hinzu kommen $8 \cdot 8 = 64$ zweistellige Zahlen und 8 einstellige Zahlen.

Insgesamt gibt es also 584 Ziffern zwischen 1 und 1000,die weder die 0 noch die 9 enthalten.

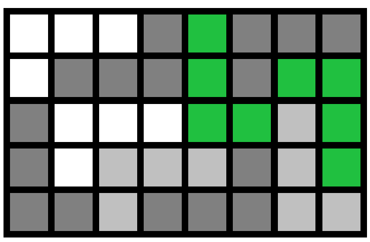
Lösung 118-44

An alle Punkte muss die Zahl 1 geschrieben werden. Das sieht man wie folgt:



Es seien a, b, c und d positive natürliche Zahlen. Angenommen $a > 1$. Dann muss wegen $a = b \cdot c$ gelten $b < a$ oder $c < a$. Beispielsweise sei $c < a$. Laut Aufgabenstellung ist $c = a \cdot d$. Es gibt keine natürliche Zahl d, mit der diese Gleichung erfüllt wäre, da das Produkt zweier natürlicher Zahlen nie kleiner ist als seine Faktoren. Damit kann in keinem der 6 Punkte eine von 1 verschiedene Zahl stehen.

Lösung 118-45



Lösung 118-46

Sei $z = 10m + n$ mit $m, n \in \mathbb{N}, 1 \leq m \leq 9, 0 \leq n \leq 9$ das Lebensalter von Herrn L. Da die Aussagen (1) bis (4) falsch sind, gelten folgende Aussagen für z:

(1′) $z \leq 45$

(2′) $m + n \geq 10$

(3′) $n \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$

(4′) $m \in \{2, 4, 6, 8\}$

Aus (1′) und (4′) folgt $m \in \{2, 4\}$. Hieraus folgt mit (2′) und (3′): $n \in \{7, 9\}$, wobei wegen (2′) nicht alle Kombinationen der beiden Ziffern möglich sind. Herr L. kann wegen (2′) nur 29 oder 47 Jahre alt sein. Wegen (1′) muss er 29 Jahre alt sein.

Lösung 118-47

Das Feriencamp liege x Kilometer von Hans' Zuhause entfernt. Dann gilt

$$\frac{x}{2} - 335 = \frac{x}{3}$$

335 km sind also ein Sechstel der gesamten Strecke. Das Ferienlager liegt $6 \cdot 335 = 2010$ Kilometer entfrent.

Probe: $\frac{2010}{2} - 335 = 1005 - 335 = 670 = \frac{2010}{3}$.

Lösung 118-48

Aus Bedingung (1) folgt für die Primzahl $p = 5n - 2$:

$$53 \leq p \leq 89$$

Diese Doppelungleichung wird von den Primzahlen 53, 59, 67, 71, 73, 79, 83 und 89 erfüllt. Nur für die Primzahlen 53, 73 und 83 ist $p + 2$ durch 5 teilbar. Es gibt also genau 3 Zahlen n, die beide Bedingungen erfüllen:

$$n \in \{11, 15, 17\}$$

5 Klassen 7 und 8

Lösung 118-51

Seien a und b Petjas Zahlen, c und d Wasjas Zahlen, dann gilt

$$a + b = cd, ab = c + d$$

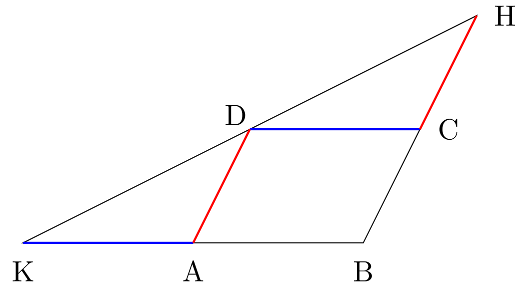
Nun gilt

$$\begin{aligned}
(a+1)(b+1)(c+1)(d+1) &= (ab + a + b + 1)(cd + c + d + 1) \\
&= (c + d + a + b + 1)(a + b + c + d + 1) \\
&= (a + b + c + d + 1)^2 \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

Das Produkt der Nachfolger der 4 Zahlen a, b, c, d ist folglich nie negativ.

Lösung 118-52

Da $ABCD$ ein Parallelogramm ist, gilt $AB = DC$ bzw. $BC = AD$. Nach Definition der Punkte H und K folgt hiermit $KA = DC$ (blau gezeichnet) und $AD = CH$ (rot gezeichnet). Die Winkel $\angle DAB$ und BCD sind kongruent (Parallelogrammeigenschaft). Damit sind auch die Winkel $\angle KAD$ und $\angle DCH$ kongruent, denn sie ergänzen sich mit $\angle DAB$ bzw. $\angle BCD$ jeweils zu einem Winkel der Größe 180°. Nach Kongruenzzsatz sws sind die Dreiecke $\triangle KAD$ und $\triangle DCH$ kongruent. Daraus folgt die Behauptung: $KD = DH$, w.z.b.w.



Lösung 118-53

Hier muß man nur die Definition für $f(x)$ anwenden:

$$f(z+1) = (z+1)^2 - 3 = z^2 - 3 + 2z + 1 = f(z) + 2z + 1$$

Lösung 118-54

U.Warnecke:

Berechnung des Verhältnisses, in dem die von den Eltern, Theo und Ria gepflückten Mengen stehen:

$$3\frac{3}{4} : 2\frac{1}{4} : 3\frac{1}{4} = \frac{15}{4} : \frac{9}{4} : \frac{13}{4} = 15 : 9 : 13.$$

In diesem Verhältnis muss der nach Abzug der Einkochmenge verbleibende Rest aufgeteilt werden. Dieser Rest beträgt $\frac{2}{5}$ der Ernte:

$$\frac{2}{5} \cdot \left(3\frac{3}{4} + 2\frac{1}{4} + 3\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{5} \cdot 9\frac{1}{4} = \frac{2}{5} \cdot \frac{37}{4} = \frac{37}{10}.$$

Da

$$\frac{37}{10} = \frac{15}{10} + \frac{9}{10} + \frac{13}{10}$$

ist, erhalten die Eltern 1,5 kg, Theo 0,9 kg und Ria 1,3 kg der verbliebenen Erdbeeren.

Lösung 118-55

U.Warnecke:

Man kann die Möglichkeiten als dreistellige „Zahlen“ notieren, wobei die einzelnen Ziffern jeweils der Anzahl der Kühe in diesem Stall bedeuten. Dabei sind führende Nullen hier ausnahmsweise gestattet. So bedeutet zum Beispiel 700, dass alle 7 Kühe im ersten Stall stehen und 007, dass alle Kühe im dritten Stall stehen. Nun verteilt man systematisch z.B. absteigend von 700 die 7 Kühe auf die einzelnen Ställe:

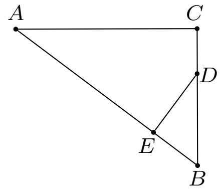
700							
610	601						
520	511	502					
430	421	412	403				
340	331	325	313	304			
250	241	232	223	214	205		
160	151	142	133	124	115	106	
070	061	052	043	034	025	016	007

Es gibt also

$$1 + 2 + 3 \cdots + 7 + 8 = \frac{8 \cdot 9}{2} = 36$$

Möglichkeiten, 7 vollkommen gleiche Kühe auf 3 Ställe zu verteilen.

Lösung 118-56



Die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle BDE$ sind einander ähnlich: ihre Winkel sind paarweise gleich groß, da die Dreiecke beide rechtwinklig sind und den Winkel $\angle ABC$ gemeinsam haben (Innenwinkelsatz im Dreieck). Das Verhältnis der Umfänge der beiden Dreiecke ist gleich dem Verhältnis der Hypothenusenlängen der Dreiecke. Dieses ist gleich

$$\frac{|\, AB \,|}{|\, BD \,|} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$$

Nach Satz des Pythagoras ist die Länge der Seite AC in cm gleich

$$\sqrt{25^2 - 15^2} = \sqrt{400} = 20$$

Der Umfang des Dreiecks $\triangle ABC$ ist also gleich

$$15 \text{ cm } + 20 \text{ cm } + 25 \text{ cm } = 60 \text{ cm}$$

Folglich ist der gesuchte Umfang des Dreiecks $\triangle BDE$ gleich

$$\frac{2}{5} \cdot 60 \text{ cm } = 24 \text{ cm}$$

6 Klassen 9 bis 13

Lösung 118-61

U.Warnecke:

Beweis durch vollständige Induktion über m.

Induktionsanfang: Die Behauptung gilt für $m = 1$; denn es gilt $(2 \cdot 1)! = 2 \geq 2 = \frac{(2^1 \cdot 1!)^2}{1+1}$.

Induktionsschritt: Für eine fest gewählte natürliche Zahl m gelte $(2m)! \geq \frac{(2^m m!)^2}{m+1}$; dann gilt auch, wie im Anschluss gezeigt wird, $(2(m+1))! \geq \frac{(2^{m+1}(m+1)!)^2}{(m+1)+1}$.

Für alle natürlichen m gilt $10m \geq 8m$, und damit gelten auch die nachfolgenden Ungleichungen:

$$\begin{aligned}
4m^2 + 10m + 4 &\geq 4m^2 + 8m + 4 \\
(2m+1)(2m+4) &\geq (2m+2)^2 \\
(2m+1)2(m+2) &\geq 2^2(m+1)^2 \\
(2m+1)2(m+1)(m+2) &\geq 2^2(m+1)^3 \\
(2m+1)(2m+2) &\geq \frac{2^2(m+1)^3}{(m+2)}
\end{aligned}$$

und zusammen mit der Induktionsvoraussetzung weiter

$$\begin{aligned}(2m)!(2m+1)(2m+2) &\geq \frac{(2^m m!)^2}{m+1}\cdot\frac{2^2(m+1)^3}{m+2}\\ (2m+2)! &\geq \frac{2^{2m+2}(m!)^2(m+1)^2}{m+2}\\ (2(m+1))! &\geq \frac{(2^{m+1}(m+1)!)^2}{(m+1)+1}.\end{aligned}$$

Lösung 118-62

Stefan Knott:

$$\frac{xy}{x+y} = 325 \tag{1}$$

Wir formen die Gleichung (1) um und erhalten:

$$(x-325)(y-325) = 5^4 \cdot 13^2 \tag{2}$$

Damit das Produkt zweier Faktoren nicht negativ bzw. gleich null wird, müssen beide Faktoren positiv sein. Deshalb kommen für die Variablen x und y nur Zahlenwerte größer als 325 in Frage, d.h.

$$x, y > 325 \tag{3}$$

Wegen der Teileranzahlfunktion lässt sich das Produkt $5^4 \cdot 13^2$ nun unter alleiniger Verwendung der Primzahlen 5 und 13 auf genau $(4+1)(2+1) = 5 \cdot 3 = 15$ verschiedene Arten darstellen, wobei das erste bzw. letzte Zahlenpaar aus den Faktoren eins und dem jeweiligen Produkt selbst besteht. Die nachfolgende Tabelle zeigt alle diese Möglichkeiten. Gleichzeitig wurden in der sechsten und siebten Spalte der Tabelle jeweils die Variablen x und y berechnet, indem zu dem jeweiligen Faktor die Zahl 325 addiert wurde (wegen $x-325, y-325$

erster Faktor als Potenz	zweiter Faktor als Potenz	erster Faktor	zweiter Faktor	x	y
1^1	$5^4 \cdot 13^2$	1	105625	326	105950
5^1	$5^3 \cdot 13^2$	5	21125	330	21450
13^1	$5^4 \cdot 13^1$	13	8125	338	8450
5^2	$5^2 \cdot 13^2$	25	4225	350	4550
$5^1 \cdot 13^1$	$5^3 \cdot 13^1$	65	1625	390	1950
5^3	$5^1 \cdot 13^2$	125	845	450	1170
13^2	5^4	169	105625	494	950
$5^2 \cdot 13^1$	$5^2 \cdot 13^1$	325	325	650	650
5^4	13^2	625	169	950	494
$5^1 \cdot 13^2$	5^3	845	125	1170	450
$5^3 \cdot 13^1$	$5^1 \cdot 13^1$	1625	65	1950	390
$5^2 \cdot 13^2$	5^2	4225	25	4550	3050
$5^4 \cdot 13^1$	13^1	8125	13	8450	338
$5^3 \cdot 13^2$	5^1	21125	5	21450	330
$5^4 \cdot 13^2$	1^1	105625	1	105950	326

15 Paare (x, y) (siehe letzte und vorletzte Spalte der Tabelle) sind demnach Lösungen der vorgegebenen Gleichung. Weitere Lösungspaare mit den geforderten Eigenschaften gibt es nicht.

Lösung 118-63

Diese Lösung ist noch in der Diskussion.

Lösung 118-64

U.Warnecke

Antwort: Die einzigen beiden Zahlen der geforderten Art sind 10 und 22.

Beweis: Sei k der kleinste und g der größte echte Teiler einer natürlichen Zahl z. Dann gilt jedenfalls $k \cdot g = z$, d. h. $g = \frac{z}{k}$. Gesucht sind nun alle z, für die $|k^3 - g| = 3$ gilt, d. h. $k^3 + 3 = g$ oder $k^3 - 3 = g$.

1. Fall: $k^3 + 3 = g$. Das liefert die Gleichung $k^3 + 3 = \frac{z}{k}$ oder umgeformt $k(k^3 + 3) = z$.

Hier kann nur $k = 2$ in Betracht kommen; denn wäre k ungerade, so wäre $k^3 + 3$ gerade, enthielte also 2 als Teiler, sodass dann k nicht mehr der kleinste echte Teiler von z wäre.

Für $k = 2$ als kleinsten echten Teiler ergibt sich $z = 2 \cdot 11 = 22$ als eine Zahl der geforderten Art.

2. Fall: $k^3 - 3 = g$. Das liefert die Gleichung $k(k^3 - 3) = z$. Auch hier gilt, dass k gerade sein muss, und als kleinster gerader Wert kommt wieder nur $k = 2$ in Betracht. Dann ist $z = 2 \cdot 5 = 10$ eine zweite Zahl der geforderten Art. Weitere solche Zahlen existieren nicht.