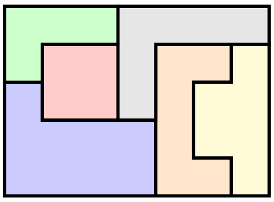
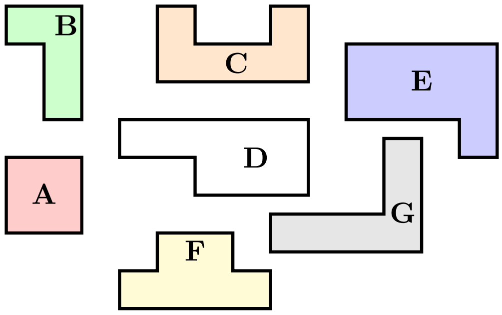
1 Vorschule

Lösung 119-11

Baustein D:





Lösung 119-12

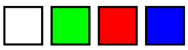
Nach der Haltestelle sind insgesamt 12 Leute im Bus.

Mit mir und dem Busfahrer zusammen sind es 9 Leute, nachdem ich eingestiegen bin. Nach der Haltestelle sind es noch 3 Leute mehr. Das sind 12 Leute.

Lösung 119-13

Jan hat immer noch zwei Pflaumen mehr als Anton.

Lösung 119-14

weiß, grün, rot, blau: 

2 Klassen 1 und 2

Lösung 119-21

2, 7, 11

Lösung 119-22

Die Anzahl der Äpfel muss gerade sein. Es sind also

$$2, 4, 6, 8$$

Äpfel möglich. Nur 6 Äpfel kann man auch unter 3 Kindern gerecht aufteilen: $6 = 2 + 2 + 2$.

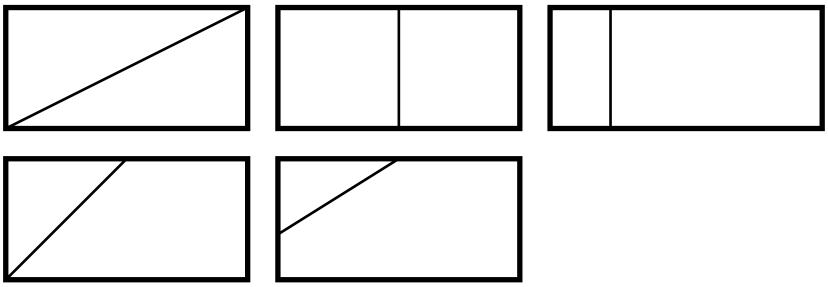
Im Korb liegen 6 Äpfel.

Lösung 119-23

$$\begin{aligned} 4+7 &= 11 \\ 7+11 &= 18 \\ 11+18 &= 29 \\ 18+29 &= 47 \end{aligned}$$

Die Zahlen ergeben sich immer durch das Addieren der 2 Vorgängerzahlen in der Folge. Die nächste Zahl ist also die 47.

Lösung 119-24



Lösung 119-25

Moritz Timmel

Siehe Anhang (letzte Seite).

Lösung 119-26

Das Lösungswort heißt **KANINCHEN**.

Lösung 119-27

Moritz nimmt 25 Kastanien. Es bleiben 25 übrig. Nick nimmt nun die Kastanien mit den Nummern $3, 6, 9, \ldots 21, 24$, das sind 8 Kastanien. Für Till bleiben somit $25-8=17$ Kastanien übrig.

Lösung 119-28

Salt Lake City liegt westlich von Philadelphia, Philadelphia liegt westlich von Madrit. Die Zeiten müssen also addiert werden:

Salt Lake City: 9 Uhr, Philadelphia 11 Uhr, d.h. 2 Stunden später.

Philadelphia 9 Uhr, Madrit 15 Uhr, d.h. 6 Stunden später.

In Madrit ist es also 8 Stunden später als in Philadelphia.

Wenn es in Philadelphia 12 Uhr ist, ist es in Madrit **20 Uhr**.

3 Klassen 3 und 4

Lösung 119-31

500 und 50

Lösung 119-32

Lisa hatte 23 pflaumen gepflückt.

Nach dem Essen waren es noch 24 Pflaumen. Also haben die Kinder zusammen $40 - 24 = 16$ Pflaumen gegessen. Jedes Kind aß dager 8 Pflaumen. In Lisas Korb waren vor dem Essen $15+8 = 23$ pflaumen.

Lösung 119-33

Die Ziffern 0, 1 und 2 werden auf beiden Würfeln benötigt. Die 6 kann man auch als 9 verwenden. D.h. es bleiben 6 Ziffern 3, 4, 5, 6, 7, 8, die man beliebig auf die 6 fehlenden Würfelseiten verteilen kann, da man die beiden Würfel ja in 2 verschiedenen Anordnungen (links / rechts) aufstellen kann. Eine Lösung zeigen die folgenden Würfelnetze:

	0	
3	**1**	**4**
	2	
	5	

	0	
6	**1**	**7**
	2	
	8	

Lösung 119-34

David benötigt mindestens 9 und höchstens 19 Bausteine.

Lösung 119-35

Es gibt nur eine Zahl, die alle Bedigungen erfüllt: 4132.

Lösung 119-36

a) $365 \cdot 10 \cdot 24 \cdot 4200 = 367920000$ mal.

b) $365 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 4200 = 2207520000$ mal.

Lösung 119-37

Denkt man sich die beiden Wege nach außen verschoben, so landet der obere Weg auf der linken und der oberen Zaunseite, der untere Weg auf der rechten und der unteren Zaunseite.

Jeder der beiden Wege ist 12 cm lang, also ist der Zaun 24 cm lang.

Lösung 119-38

Wir kürzen die Kindernamen mit dem Anfangsbuchstaben ab. „<“ schreiben wir, wenn das links stehende Kind weniger Punkte hatte als das rechts stehende.

1) Luise hatte die meisten Punkte $\Rightarrow P, T, S, A < L$

2) Pia hatte weniger Punkte als Tamara und Sonja $\Rightarrow P < S, T$

3) Sonja hatte mehr Punkte als Anna, aber weniger als Tamara $\Rightarrow A < S < T$

4) Anna hat weniger Punkte als Pia $\Rightarrow A < P$

Aus 2), 3) und 4) folgt $A < P < S < T$. Der Wettkampf endete also so:

$$\boxed{\text{Lusise} = 1., \text{Tamara} = 2.\ , \text{Sonja} = 3., \text{Pia} = 4., \text{Anna} = 5.}$$

4 Klassen 5 und 6

Lösung 119-41

Mischa hat insgesamt 67 Zahlen wegradiert.

Von den Zahlen von 1 bis 100 enthalten genau 20 die Ziffer 1: die 1, $10, 11, \ldots, 19$, $21, 31, \ldots 91$ und die 100 . Das heißt, keine dieser Zahlen hat Mischa wegradiert.

Die Ziffer 2 ist in genau 19 der Zahlen von 1 bis 100 enthalten: die 2, $20, 21, \ldots, 29$ und $12, 32, \ldots 92$. Das heißt, auch von diesen Zahlen hat Mischa keine einzige wegradiert.

Da die 12 und die 21 in beide Mengen vorkommt, blieben $19 + 20 - 2 = 37$ Zahlen stehen, die die Ziffern 1 oder 2 enthielten. Hinzu kommen noch 30 Zahlen, die keine dieser beiden Ziffern enthielten.

Es blieben also insgesamt $37 + 30 = 67$ Zahlen stehen. D.h. Mischa muss 33 Zahlen wegradiert haben.

Lösung 119-42

Da jedes Mädchen einen Jungen als rechten Nachbarn hat, muss es Zweiergruppen der Form **MJ** geben. Da jeder zweite Junge einen Jungen als rechten Nachbarn hat, muss man alle Zweiergruppen zu Dreiergruppen der Form **MJJ** ergänzen können. Jede Dreiergruppe lässt sich zu einer Verergruppe der Form **MJJM** ergänzen, da die Hälfte der Jungen ein Mädchen als Nachbarin hat.

An dem Tisch sitzen daher insgesamt 5 Dreiergruppen **MJJ**, also 10 Jungen und 5 Mädchen.

Lösung 119-43

Für E kommen nur die Ziffern 0 oder 5 in Frage. $E = 0$ hätte aber auch $S = 0$ zur Folge, scheidet also aus. Daher ist $E = 5$. Dann muss $S = 6$ sein. Weiter gilt für L eine der folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} 3 \cdot L + 1 &= 5 \\ 3 \cdot L + 1 &= 15 \\ 3 \cdot L + 1 &= 25 \end{aligned}$$

Nur die dritte Gleichung ist ganzzahlig lösbar: $L = 8$. Für K muss gelten $3 \cdot K + 2 > 9$, also $K > 2$ und $K \neq 5, 6, 8$. Aus $K = 3$ folgt $3 \cdot K + 2 = 11$, was wegen $W \neq I$ nicht möglich ist. Für $K = 4$ erhält man $3 \cdot K + 2 = 14$, was wegen $K \neq I$ nicht möglich ist. Ebenso ist $K = 9$ wegen $3 \cdot 9 + 2 = 29$ und $K \neq I$ unmöglich. Damit hat das Kryptogramm die einzige Lösung

$$\begin{array}{cccccc} & & 7 & 8 & 5 & 5 \\ + & & 7 & 8 & 5 & 5 \\ + & & 7 & 8 & 5 & 5 \\ \hline = & 2 & 3 & 5 & 6 & 5 \end{array}$$

Lösung 119-44

Das Quadrat hat den Flächeninhalt $8 \cdot 8\ \text{cm}^2$. Von dieser Fläche werden 2 Rechteckflächen subtrahiert (je zwei Dreiecke lassen sich zu einem Rechteck zusammensetzen). Die graue Fläche hat also den Flächeninhalt

$$64\ \text{cm}^2 - 3 \cdot 8\ \text{cm}^2 - 3 \cdot 5\ \text{cm}^2 = (64 - 24 - 15)\ \text{cm}^2 = 25\ \text{cm}^2$$

Lösung 119-45

Heinrich Heller, 7 Jahre, Klasse 3

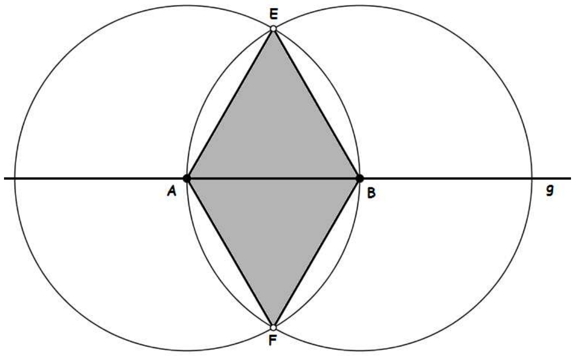
1. $5 \cdot 2 = 10$. Mit 5 Wägungen sind 10 Äpfel gewogen.

2. Apfel 11 mit 12, 12 mit 13 und 11 mit 13 wiegen. Die Ergebnisse zusammenrechnen und durch 2 teilen, weil man ja das Doppelte gewogen hat.

3. Die Ergebnisse aus 1 und 2 plus rechnen.

Lösung 119-46

A) Es entsteht ein Rhombus.
B) Man konstruiert einen Kreis um M. Dieser schneidet g in den gesuchten Punkten A und B.
C) Man konstruiert einen Kreis um A mit einem Radius, dessen Länge größer als $\mid AM \mid$ ist und einen Kreis um B mit dem gleichen Radius.



Die Kreise schneiden einander in zwei Punkten E und F. Die Gerade durch E und F ist die gesuchte Senkrechte.

Lösung 119-47

Aus (1) und (2) folgt zunächst:

(5) Es gab Gold für den 100-Meter-Lauf, Silber für den Weitsprung, Bronze im Kugelstoßen.

Aus (1) und (4) folgt

(6) Anton ist der 100-Meter-Läufer.

Aus (3) und (6) folgt nun

(7) Christoph ist der Kugelstoßer.

Damit muss Bertram der Weitspringer sein. Das ergibt folgende Aufteilung:

- Anton - 100-Meter-Lauf - Gold
- Bertram - Weitsprung - Silber]
- Christoph - Kugelstoßen - Bronze

Lösung 119-48

Es sei $\overline{abcd}$ die Dezimaldarstellung der gesuchten Zahl, also a sei die Ziffer an der Tausenderstelle, b die an der Hunderterstelle usw. Da es eine vierstellige Zahl sein soll, ist $a = 0$ ausgeschlossen. Es gilt also $0 < a \leq 9$ und $0 \leq b, c, d \leq 9$ sowie

$$a + b + c + d = 14 \qquad (1)$$
$$a + d = b \qquad (2)$$
$$a \cdot d = b \qquad (3)$$

Nun haben wir zwei Möglichkeiten, weiter zu schießen:

Variante 1: Die Gleichungen (2) und (3) werden einzig von $a = d = 2$ und $b = 4$ erfüllt, da 22 die einzige zweistellige natürliche Zahl ist, deren Quersumme gleich ihrem Querprodukt ist. Dies muss natürlich noch bewiesen werden. Zum Beweis können wir die Lösung zu Aufgabe 80-21 aus Serie 80 heranziehen. Dann muss wegen (1) $c = 6$ sein.

Variante 2: Setzen wir (2) in (1) ein, so erhalten wir $2 \cdot b + c = 14$ oder $2 \cdot b = 14 - c$. Auf der linken Seite dieser Gleichung steht eine gerade Zahl. daher muss c ebenfalls gerade sein, also $c \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Für $c \in \{0, 4, 8\}$ ergeben sich für b die Primzahlen $b \in \{7, 5, 3\}$, die sich nur in das Produkt aus 1 und sich selbst zerlegen lassen. Für diese Faktoren ist die Summe also größer als das Produk. Für $c = 2$ ergibt sich $b = 6 = 1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$. Auch hier sind Summe und Produkt der Faktoren voneinander verschieden. Für $c = 6$ erhalten wir $b = 4 = 2 \cdot 2 = 1 \cdot 4$ und $2 \cdot 2 = 2 + 2$. Daher muss $c = 6$ gelten und wir erhalten $a = d = 2$ und $b = 4$- das gleiche Resultat wie in Variante 1.

Die einzige vierstellige Zahl, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, ist 2462.

5 Klassen 7 und 8

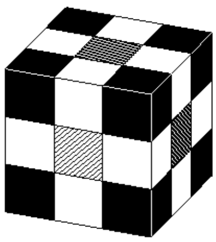
Lösung 119-51

a) ist möglich, indem man zu Zähler und Nenner 77 addiert.

b) ist unmöglich, denn ein Bruch ist gleich 1, wenn Zähler und Nenner gleich sind. Es ist aber nicht möglich, aus ungleichen Zahlen mit Hilfe der beiden Operationen gleiche zu machen.

Lösung 119-52

Das ist nicht möglich.



Begründung: Der große Würfel hat 8 Eckwürfel (schwarz gezeichnet), 12 Kantenwürfel (weiß gezeichnet) und 6 Mittelwürfel (schraffiert). Jeder zulässige Weg von einem schwarzen Eckwürfel aus führt über einen weißen Kantenwürfel zu einem schraffierten Mittelwürfel. Um also von einem Eckwürfel zu einem benachbarten Eckwürfel zu gelangen, muss die Ameise mindestens einen Mittelwürfel überqueren. Wenn sie jeden schwarzen Eckwürfel genau einmal betreten will, muss sie also sieben mal über einen Mittelwürfel laufen. Sie hat dann auf jeden Fall einen Mittelwürfel zweimal betreten.

Lösung 119-53

Wenn jede dieser Personen von 0 beginnend eine von den anderen Anzahlen verschiedene Zahl Nüsse fand, hätten sie zusammen $0 + 1 + 2 + \cdots + 20 = 210$ Nüsse gesammelt. Da es 211 Nüsse sind, muss die verbleibende Nuss zu einer der 21 Personen gelegt werden. Dann hat diese Person die gleiche Anzahl Nüsse gesammelt, wie die Person mit der nächsthöheren Nusszahl.

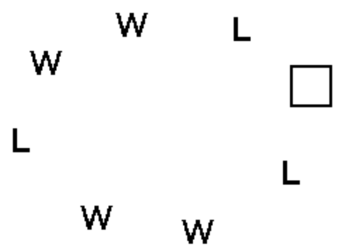
Alle anderen denkbaren Nussverteilungen auf 21 Personen sind von vornherein ungünstiger, d.h. erfüllen die Bedingung, dass 2 (oder mehr) Personen die gleiche Zahl Nüsse gefunden haben müssen.

Bemerkung: Das ist ein schönes Beispiel für den Dirichletschen Schubfachschluss.

Lösung 119-54

Am Tisch sitzen 8 Lügner.

Angenommen, am Tisch sitzt mindestens ein Wahrheitsliebender, dann muss neben ihm ein Lügner und ein weiterer Wahrheitsliebender sitzen. Neben diesem sitzt dann ein weiterer Lügner. Da neben diesem Lügner bereits ein Wahrheitsliebener sitzt, muss auf der anderen Seite ein Wahrheitsliebender sitzen, da der Lügner anderenfalls die Wahrheit gesagt hätte. Es ergibt sich zwangsläufig folgende Sitzordnung für 7 der 8 Personen:



Auf dem 8. Platz kann aber weder ein Wahrheitsliebender noch ein Lügner sitzen. Säße dort ein Wahrheitsliebender, so hätte er 2 Lügner als Nachbarn. Säße dort ein Lügner, so hätte einer von dessen (Lügner-) Nachbarn die Wahrheit gesagt. Das widerspricht der Aufgabe.

Es kann also kein einziger Wahrheitsliebender am Tisch sitzen.

Sitzen dagegen 8 Lügner am Tisch, so sind die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Lösung 119-55

Die Elefanten verspeisen nur kugelförmige Melonen. Jeder Elefant verspeiste genau 2 Melonen, jedes Flusspferd genau 3 Melonen.

Es gilt:

a) 5 Elefanten und 7 Flusspferde verspeisten zusammen 31 Melonen.

b) 8 Elefanten und 4 Flusspferde verspeisten zusammen 28 Melonen.

Seien e die Anzahl Melonen, die ein Elefant verspeist, f die Anzahl Melonen, die ein Flusspferd verspeist, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} 5e + 7f &= 31 \\ 8e + 4f &= 28 \end{aligned}$$

Subtraktion der beiden Gleichungen und äquivalente Umformungen ergeben

$$\begin{aligned} -3e + 3f &= 3 \\ f &= e + 1 \end{aligned}$$

Setzt man dies in die erste Gleichung ein, sieht man:

$$5e + 7(e + 1) = 12e + 7 = 31$$

D.h. 12 Elefanten verspeisen zusammen $31 - 7 = 24$ Melonen, d.h. jeder Elefant genau 2 und 12 Flusspferde verspeisen $31 + 5 = 36$ Melonen, d.h. jedes Flusspferd genau 3. Da 7 Flusspferde folglich zusammen 21 Melonen verspeisen, in Gruppe 1 aber nur 20 kugelförmige verspeist wurden, müssen einige Flusspferde sowohl kugelförmige als auch würfelförmige Melonen verspeist haben.

Lösung 119-56

Csenge Palik, Klasse 5

$$u^2 - 1 = (u + 1) \cdot (u - 1)$$

$u + 1$ und $u - 1$ sind aufeinanderfolgende gerade Zahlen. $\Rightarrow$ das Produkt ist durch 8 teilbar.

weil u nicht durch 3 teilbar ist, kann man Folgendes machen:

$$u = 3 \cdot v + 2 \Rightarrow (u + 1) \cdot (u - 1) = (3 \cdot v + 3) \cdot (3 \cdot v + 1)$$
$$u = 3 \cdot w + 4 \Rightarrow (u + 1) \cdot (u - 1) = (3 \cdot w + 5) \cdot (3 \cdot w + 3)$$

$\Rightarrow$ das Produkt ist durch 3 teilbar. $3 \cdot 8 = 24 \Rightarrow u^2 - 1$ ist durch 24 teilbar.

6 Klassen 9 bis 13

Lösung 119-61

Hinweis: Bei Teil b) gab es verschiedene Interpretationen, wie ich aus den eingegangenen Lösungen entnahm.

Ursel Willrett

$$a_1^2 = 1, a_2^2 = 1001, a_3^2 = 110001, a_4^2 = 11100001$$

a) Behauptung $a_n^2 = (11\dots1)(11\dots1) = 11\dots100\dots01$, d.h. eine Zahl mit $(n-1)$ Ziffern 1, gefolgt von n Ziffern 0, gefolgt von einer 1.

Beweis mit vollständiger Induktion:

Die Behauptung ist richtig für $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ (sihe oben).

Die Behauptung sei richtig für $n = k$, d.h.

$$a_k^2 = \underbrace{11\dots1}_{k-1}\underbrace{00\dots0}_{k}1$$

Nun muss man zeigen, dass die Behauptung auch richtig ist für $k + 1$.

$$a_{k+1}^2 = (a_k * 10 + 1)^2 = 100a_k^2 + 100a_k + 1 \text{ (Zahl im Dualsystem)}$$

$$\begin{aligned}
100a_k^2 &= \underbrace{11\dots1}_{k-1}\underbrace{00\dots0}_{k}100\\
100a_k &= \underbrace{11\dots1}_{k}01\\
a_{k+1}^2 &= 100a_{k+1}^2 + 100a_k + 1 = \underbrace{11\dots1}_{k}\underbrace{00\dots0}_{k+1}1
\end{aligned}$$

b) Hier wurde die Fragestellung gelöst: Welche Dualzahlen, die aus n Ziffern 1 bestehen, sind im Dezimalzahlsystem Quadratzahlen.

Es sei n eine natürliche Zahl, für die

$$b_n = 10^0 + 10^{n+1} + \cdots 10^{2n-1} = k^2, k \in \mathbb{N}$$

gilt.

$$\begin{aligned}
10^{n+1}(1 + \cdots 10^{n-2}) &= k^2 - 1\\
10^{n+1}(10^{n-1} - 1) &= 9k^2 - 9\\
10^{2n} - 10^{n+1} + 25 &= 9k^2 - 9 + 25\\
(10^n - 5)^2 &= 9k^2 + 16 = (3k)^2 + 16
\end{aligned}$$

Es seien T_l der Term auf der linken Seite, T_r der Term auf der rechten Seite.

Dann gilt:

$k = 1$ $T_r = 25, T_l = 25 (n = 1)$, d.h. für $n = 1$ ist b_n duale Quadratzahl.

$k = 2$ $T_r = 52$, also keine Quadratzahl, T_l ist Quadratzahl.

$k = 3$ $T_r = 97 < (3k + 1)^2$. Für $k \geq 3$ kann T_r keine Quadratzahl mehr sein.

$n = 1$ ist die einzige natürliche Zahl, für die b_n eine duale Quadratzahl ist.

U.Warnecke

a) Es ist $a_n^2 = \underbrace{111\dots1}_{n-1\,\text{Einsen}}\,\underbrace{000\dots0}_{n\,\text{Nullen}}1$.

Begründung: $a_n = 11111\dots1$ (n Einsen) steht für $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1}$, sodass

$$(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1})^2 = (2^n - 1)^2 = 2^{2n} - 2 \cdot 2^n + 1 = (2^{2n} + 1) - 2^{n+1}.$$

Konkretes Rechenbeispiel im Dualsystem für $a_4^2 \mathrel{\widehat{=}} 15^2$ ($= (2^4 - 1)^2 = 2^8 + 1 - 2^5$ im Dezimalsystem):

$$\begin{array}{rr}
 & 100000001\\
- & 100000\\
\hline
 & 11100001
\end{array}$$

Nach 3 Einsen folgen 4 Nullen und danach eine einzelne Eins.

b) Welche Dualzahlen (allgemein) sind im Dezimalsystem Quadratzahlen?

Aus folgender Tabelle

im Dualsystem	im Dezimalsystem
100 steht für 2^2	100 steht für 10^2
10000 steht für 2^4	10000 steht für 10^4
1000000 steht für 2^6	1000000 steht für 10^6

ergibt sich die Vermutung, dass b_n für alle geradzahligen $n \in \mathbb{N}$ (ohne Null) eine Quadratzahl ist. Andere als die vermuteten b_n kann es nicht geben, da alle nur durch die Ziffern 1 und 0 im Dezimalsystem bildbaren Quadratzahlen einzig von der Form $1000\ldots0$ mit einer geraden Anzahl von Nullen sind.

Lösung 119-62

Stefan Knott

Hat einen Algorithmus entwickelt, mit dem man alle 9stelligen Zahlen finden kann, die den Bedingungen der Aufgabe genügen: Algorithmus(https://mathe-jung-alt.de/mathe/fremdsourcen/stefan-knott-119-62.pdf)

U.Warnecke

Zahlen, die die gestellten Bedingungen erfüllen, sind z. B. 100 006 020 und 900 900 000; denn

$$\begin{array}{ll}
100\,006\,020 : 1 = 100\,006\,020 & 900\,900\,000 : 1 = 900\,900\,000 \\
10\,006\,020 : 2 = 5\,003\,010 & 90\,900\,000 : 2 = 45\,450\,000 \\
10\,006\,020 : 3 = 3\,335\,340 & 90\,900\,000 : 3 = 30\,300\,000 \\
10\,006\,020 : 4 = 2\,501\,505 & 90\,000\,000 : 4 = 22\,500\,000 \\
10\,006\,020 : 5 = 2\,001\,204 & 90\,090\,000 : 5 = 18\,018\,000 \\
10\,000\,020 : 6 = 1\,666\,670 & 90\,090\,000 : 6 = 15\,015\,000 \\
10\,000\,620 : 7 = 1\,428\,660 & 90\,090\,000 : 7 = 12\,870\,000 \\
10\,000\,600 : 8 = 1\,250\,075 & 90\,090\,000 : 8 = 11\,261\,250 \\
10\,000\,602 : 9 = 1\,111\,178 & 90\,090\,000 : 9 = 10\,010\,000
\end{array}$$

Vermutlich existieren noch weitere solche Zahlen.

Ursel Willrett

Die 9-stellige Zahl muss gerade sein und die letzte Ziffer ist 0. Die 9-stellige Zahl sei

$$Z = \overline{abcdefgh0}$$

Da $\overline{abcdefgh}$ durch 9 teilbar ist, $\overline{abdefgh}$ durch 3 teilbar ist, $\overline{abcdegh}$ durch 6 teilbar, müssen c und f durch 3 teilbar sein, also

$$c, f \in \{0, 3, 6, 9\}$$

Wegen der Teilbarkeit von $\overline{h0}$ durch 4 (ohne die Ziffer d) ist h gerade. Wegen der Teilbarkeit von $\overline{fg0}$ durch 8 (ohne die Ziffer h) ist auch g gerade. Die Zahl $\overline{abcdefh0}$ ist durch 7 teilbar, d.h. auch $Z_7 := \overline{abcdefh}$ ist durch 7 teilbar. Setzt man

$$Z_7 = a \cdot 10^6 + (efh) \cdot 10^3 + efh$$

folgt

$$Z_7 = a \cdot 10^6 + 1001 \cdot efh$$

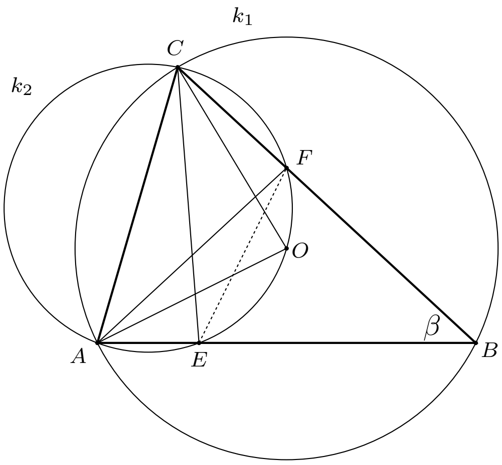
Mit $a = 7$ ist dann Z_7 durch 7 teilbar. Eine 9-stellige Zahl ist also $Z = \overline{7efhefgh0}$. Die Quersumme muss durch 9 teilbar sein. Das ist möglich. Z.B. indem man $g = 2$ (gerade) wählt, und $e = f = h = 0$ oder $e = f = h = 9$ setzt.

Die Dezimalzahl 763063200 erfüllt z.B. die Anforderungen

Lösung 119-63

U.Warnecke

Sei $\beta = |\angle CBA|$; dann hat im Kreis k_1 der zugehörige Mittelpunktswinkel $\angle COA$ die Weite 2β. Da dieser Winkel zugleich Umfangswinkel über AC im Kreis k_2 ist, so gilt auch $|\angle CEA| = 2\beta$. Weiter ist $\angle CEA$ Außenwinkel des Dreiecks $\triangle BCE$, sodass $|\angle CEA| = |\angle ECB| + \beta$, also $|\angle ECB| = 2\beta - \beta = \beta$.
Analog zeigt man, dass $|\angle CFA| = 2\beta$ und $|\angle BAF| = \beta$.
Da $|\angle FBA| = |\angle CBA| = \beta$, folgt, dass das Dreieck $\triangle ABF$ gleichschenklig ist: $|AF| = |BF|$.
Auch das Dreieck $\triangle BCE$ ist wegen $|\angle ECB| = \beta$ gleichschenklig: $|BE| = |CE|$.



Daher erkennt man jetzt in der nebenstehenden Figur, dass

$$\cos(\beta) = \frac{\frac{1}{2}|AB|}{|BF|} \Leftrightarrow |AB| = 2|BF| \cdot \cos(\beta)$$
$$\cos(\beta) = \frac{\frac{1}{2}|BC|}{|BE|} \Leftrightarrow |BC| = 2|BE| \cdot \cos(\beta)$$

Aus den jeweils rechten Gleichungen folgt $|AB| \cdot |BC| = 4|BE| \cdot |BF| \cdot \cos^2(\beta)$, und dies ist äquivalent mit

$$\frac{|AB| \cdot |BC|}{|BE| \cdot |BF|} = 4 \cdot \cos^2(\beta).$$

Die Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle EBF$ (die Höhen sind in der Figur nicht eingezeichnet) sind gegeben durch

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}|AB| \cdot |BC| \sin(\beta) \text{ bzw. } \mathcal{A}_{EBF} = \frac{1}{2}|BE| \cdot |BF| \sin(\beta).$$

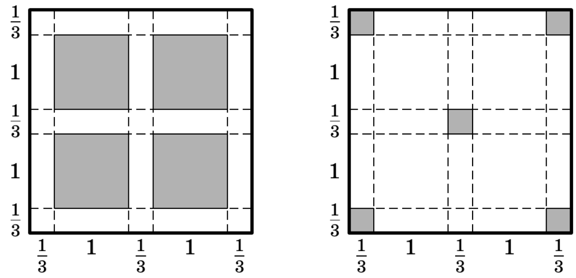
Nach Aufgabenstellung soll der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$ doppelt so groß sein wie der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle EBF$; aus den letzten beiden Gleichungen folgt damit

$$\frac{\mathcal{A}_{ABC}}{\mathcal{A}_{EBF}} = \frac{|AB| \cdot |BC|}{|BE| \cdot |BF|} = 4 \cdot \cos^2(\beta) = 2,$$

und hieraus ergibt sich sofort $\cos^2(\beta) = \frac{1}{2}$, d. h. $\cos(\beta) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Wegen $0° < \beta < 180°$ ist somit $\beta = 45°$.

Lösung 119-64

Variante 1: Abschätzungen von oben und unten: Das größtmögliche Stück Kuchen hat die Größe $1/3 \times 1/3$.



Die Bilder zeigen einen Abschätzung von oben (links) bzw. von unten (rechts).

Im Bild links sieht man eine mögliche Lage der Kuchenstücke, die A geschnitten hat, bei der es B offensichtlich nicht gelingen kann, ein größeres Stück als eines der Seitenlänge 1/3 zu schneiden.

Es muss noch gezeigt werden, dass B in jedem Fall ein solches Stück Kuchen schneiden kann.

Variante 1: Wir schneiden den Kuchen in 81 Quadrate der Seitenlänge 1/3. Jedes der Kuchenstücke, die A schneidet, hat dann mit höchstens 16 dieser Quadrate Punkte gemeinsam. Folglich bleiben mindestens $81-4\cdot 16 = 17$ der kleinen Quadrate zusammenhängend erhalten. Aus diesen kann B ein Stück der Seitenlänge 1/3 wählen.

Variante 2:

Das Bild rechts zeigt 5 Quadrate der Seitenlänge 1/3, die so angeordnet sind, dass jedes der 4 Stücke, die A schneidet, höchstens eines dieser 5 Quadrate berührt. Folglich kann B immer eines dieser 5 kleinen Stücke nehmen.

Variante 2 von Stefan Knott

Beispiellösung(https://mathe-jung-alt.de/mathe/fremdsourcen/stefan-knott-119-64.pdf)

Lösungen

6 + 13 + 9 + 2 = ; 5 + 10 + 12 + 3 = ; 11 + 4 + 7 + 8 =

13 + 9 + 2 + 6 = ; 10 + 5 + 12 + 3 = ; 4 + 11 + 7 + 8 =

6 + 9 + 13 + 2 = ; 5 + 12 + 10 + 3 = ; 11 + 4 + 7 + 8 =

9 + 6 + 13 + 2 = ; 5 + 10 + 12 + 3 = ; 11 + 4 + 7 + 8 =

5 + 10 + 12 + 3 = ; 6 + 13 + 9 + 2 = ; 11 + 4 + 7 + 8 =

12 + 10 + 3 + 5 = ; 13 + 6 + 9 + 2 = ; 4 + 11 + 8 + 7 =

12 + 3 + 10 + 5 = ; 13 + 9 + 6 + 2 = ; 8 + 7 + 4 + 11 =

11 + 4 + 7 + 8 = ; 6 + 13 + 9 + 2 = ; 5 + 10 + 12 + 3 =

4 + 11 + 7 + 8 = ; 13 + 6 + 9 + 2 = ; 10 + 5 + 12 + 3 =

7 + 11 + 4 + 8 = ; 9 + 6 + 2 + 13 = ; 12 + 5 + 3 + 10 =