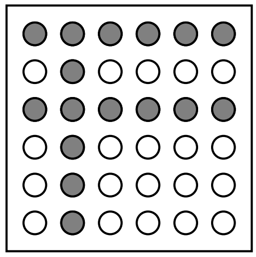
1 Vorschule

Lösung 120-11

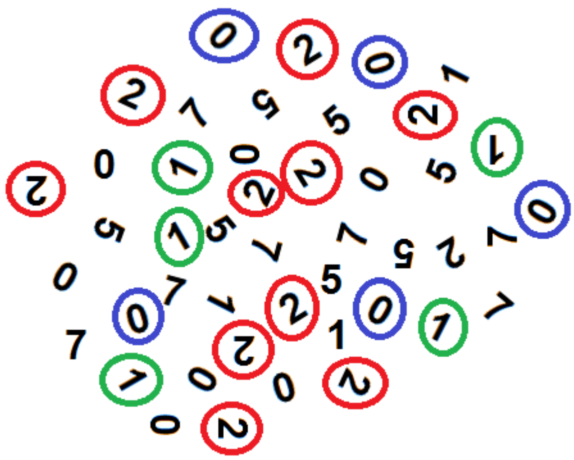
Ein Kind nimmt Teller 7, ein Kind nimmt Teller 1 und Teller 6, ein Kind nimmt Teller 2 und Teller 5. Ein Kind nimmt Teller 3 und Teller 4. Nun hat jedes Kind 7 Kekse.

Lösung 120-12

Es ist egal, ob man die Zeilen von unten nach oben oder von oben nach unten zählt. Ebenso egal ist es, ob man die Spalten von links nach rechts zählt oder von rechts nach links. Ich habe mich für oben nach unten und links nach rechts entschieden. Die fehlenden Pralinen sind in der Zeichnung grau ausgemalt. Es sind noch 20 Pralinen übrig.



Lösung 120-13



Lars kann 5 Mal die Jahreszahl 2021 legen.

Lösung 120-14

Die meisten Plätzchen hat die Giraffengruppe gebacken. Dann kommen die Froschgruppe, die Amselgruppe und die Katzengruppe.

Justus ist in der Froschgruppe.

2 Klassen 1 und 2

Lösung 120-21

a) Man beginnt mit dem Aufbau der Zahl von links nach rechts mit so kleinen Ziffern wie möglich: 100023456789

b) Man beginnt mit dem Aufbau der Zahl von links nach rechts mit so großen Ziffern wie möglich: 999876543210

Lösung 120-22

Der nächstmögliche Bus fährt 14:23. Linus ist um 14:20 an der Haltestelle eingetroffen. Er hat also nur 3 Minuten gewartet.

Lösung 120-23

Viermal 6 ist nicht möglich, da es dann insgesamt mehr als 24 Augen wären.
Viermal 4 ist nicht möglich, da es dann höchstens 22 Augen wären.
Also sind es viermal 5 und eine 3.

Lösung 120-24

Es sind 32 vollständige Quadrate. Jede Spitze des Sterns lässt sich ebenfalls zu einem vollständigen Quadrat zusammensetzen. Das sind nochmal 8 Quadrate. Lisa kommt auf 40 Quadrate.

Lösung 120-25

Profil 7.

Man muss die richtige Abrollrichtung herausfinden (bei 7 von links nach rechts) und nicht nur auf das Muster in der Mitte, sondern auch auf die kleinen Streifen rechts und links achten.

Lösung 120-26

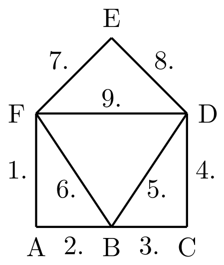
Er springt $8 \cdot 80 = 640$ Mal über das Seil.

Lösung 120-27

1. Es sind 4 Dreiecke: ABF, BCD, BDF, DEF.

2. Es sind auch 4 Vierecke: ABDF, ACDF, BCDF, BDEF

3. Es gibt verschiedene Möglichkeiten: eine ist F-A-B-C-D-B-F-E-D-F.



Lösung 120-28

a) Er hat noch 42 Tiere.

b) Die Summe der Schafe bleibt gleich.

c) Er hatte 63 Tiere am Anfang.

3 Klassen 3 und 4

Lösung 120-31

Er verbaut 165 Kugeln.

Die einzelnen Schichten bestehen aus folgender Zahl Kugeln (beginnend mit der untersten)

1. Schicht: $1+2+3+4+5+6+7+8+9$

2. Schicht: $1+2+3+4+5+6+7+8$

3. Schicht: $1+2+3+4+5+6+7$

4. Schicht: $1+2+3+4+5+6$

5. Schicht: $1+2+3+4+5$

6. Schicht: $1+2+3+4$

7. Schicht: $1+2+3$

8. Schicht: $1+2$

9. Schicht: 1

Das ergibt zusammen

$$\begin{aligned} 9\cdot 1+8\cdot 2+7\cdot 3+6\cdot 4+5\cdot 5+4\cdot 6+3\cdot 7+2\cdot 8+1\cdot 9 &= \\ 2\cdot(9+16+21+24)+25 &= 165. \end{aligned}$$

Lösung 120-32

Preis:	**Höhe**
1.	260€
2.	260€ - 100€ = 160€
3.	160€ : 2 = 80 €
4.	$3 \cdot 90$€ = 270€
Summe	770€

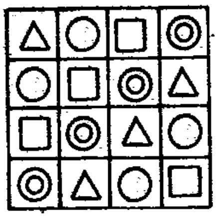
Lösung 120-33

a)	600	510	430	360	**300**	**250**	210	180	immer 10 weniger subtrahieren
b)	10	30	35	105	110	**330**	**335**	1005	abwechselnd ·3; +5
c)	512	128	256	64	128	**32**	**64**	16	abwechselnd : 4, ·2

Lösung 120-34

a) ein Kreis. Dann kommt jede Figur genau dreimal vor.

b) Jede Figur kommt in jeder Zeile und jeder Spalte genau einmal vor.



Lösung 120-35

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{96} & : & \mathbf{6} & = & \mathbf{16} \\
: & & : & & : \\
\mathbf{4} & : & \mathbf{1} & = & \mathbf{4} \\
\hline
\mathbf{24} & : & \mathbf{6} & = & \mathbf{4}
\end{array}$$

Lösung 120-36

Die zunächst naheliegende Lösung, dass der Vater alle anderen über die Brücke bringt, ist nicht optimal. Nur zwei Kinder haben die kürzesten Lösungen gefunden:

Sonja Witte, 9 Jahre, Klasse 4:

mindestens 17 Minuten und es gibt dafür 2 Möglichkeiten:

J und V hin (2) J zurück (2) M und G hin (10), V zurück (1) und J und V hin (2)
Oder
J und V hin (2) V zurück (1) M und G hin (10), J zurück (2) und J und V hin (2)

Erik Rohloff, 9 Jahre, Klasse 4:

Sie brauchen mindestens 17 Minuten.

$\longrightarrow$	Vater, Sohn	2 min
$\longleftarrow$	Vater	1 min
$\longrightarrow$	Mutter, Großmutter	10 min
$\longleftarrow$	Sohn	2 min
$\longrightarrow$	Vater, Sohn	2 min

$2 + 1 + 10 + 2 + 2 = 17$.

Lösung 120-37

Wenn Robin die Wahrheit gesagt hätte, dann müsste auch Maxim die Wahrheit gesagt haben, und wenn Maxim die Wahrheit gesagt hätte, dann müsste auch Robin die Wahrheit gesagt haben, denn beide Aussagen können nur gemeinsam wahr oder gemeinsam falsch sein. Da aber nur ein Kind die Wahrheit gesagt hat, muss dies Laura gewesen sein. Das ist tatsächlich möglich, denn wenn Lauras Aussage wahr ist, dann müssen Robins Aussage und Maxims Aussage falsch sein.

Daher hat Laura die Wahrheit gesagt. Die Kinder wurden am Donnerstag gefragt.

Lösung 120-38

Sonjas Weihnachtsbaum ist 18 Jahre alt. Also ist er $18 \cdot 5$ dm $= 90$ dm $= 900$ cm hoch.

4 Klassen 5 und 6

Lösung 120-41

In den 3 Worten TETRAEDER, DODEKAEDER, IKOSAEDER und OKTAEDER kommen folgende Buchstaben mit der gegebenen Häufigkeit vor:

	A	D	E	I	K	O	R	S	T	Anzahl Fehler
TETRAEDER	1	1	3	0	0	0	2	0	2	5
DODEKAEDER	1	3	3	0	1	1	1	0	0	6
IKOSAEDER	1	1	2	1	1	1	1	1	0	7
OKTAEDER	1	1	2	0	1	1	1	0	1	?

Für die 6 Fehler in DODEKAEDER gibt es folgende Möglichkeiten:

(1) D, E falsch, A, K, O, R richtig

(2) D falsch, E richtig und 3 aus A, K, O, R richtig, einer falsch

(3) E falsch, D richtig und 3 aus A, K, O, R richtig, einer falsch

Fall (1) scheidet aus, da Senja dann im Wort TETRAEDER (mindestens) 6 Fehler gemacht hätte.

Fall (2): In diesem Fall müssen in TETRAEDER R und T falsch und A richtig sein (genau 5 Fehler). Außerdem kommen noch K und O als falsch hinzu aus DODEKAEDER (genau 6 Fehler). Das Wort IKOSAEDER kommt allerdings auf maximal 6 Fehler. Fall (2) ist somit ebenfalls nicht möglich.

Fall (3): Aus der Tatsache, dass Senja im Wort TETRAEDER genau 5 Fehler gemacht hat, folgt in diesem Fall, dass A richtig und entweder R oder T falsch sein müssen D.h.

(3′) E und T falsch, D, A, R richtig.

(3″) E und R falsch, D, A, T richtig.

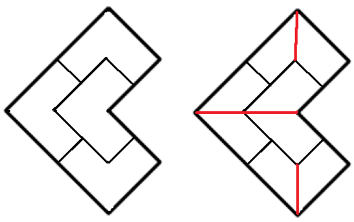
Im Fall (3′) hätte Senja aber in DODEKAEDER höchstens 5 Fehler machen können: E, K, O, T. Im Fall (3″) folgt aus 6 Fehlern in DODEKAEDER: E, K, O, R, falsch und D, A, T richtig

Daher ist Fall (3″) möglich. Senja schreibt also die Buchstaben A, D und T immer richtig, alle anderen Buchstaben immer falsch. Im Wort OKTAEDER würde er genau 5 Fehler machen.

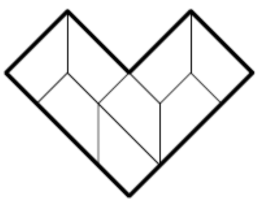
Lösung 120-42

Ilja Rozhko, 10 Jahre, Klasse 5:

Zuerst habe ich die Figur in 4 gleiche Flächen aufgeteilt. Da 4 die Hälfte von 8 ist musste ich nur noch jede Fläche in 2 Stücke teilen. So habe ich dann folgende Figur erhalten:

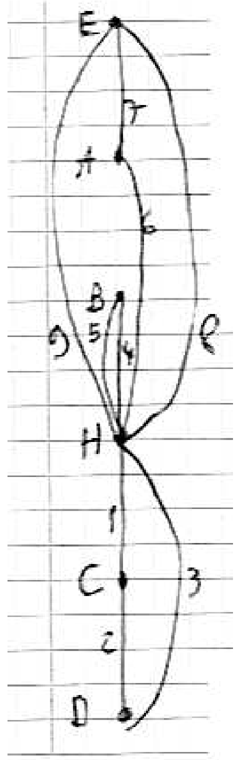


Weitere Variante:

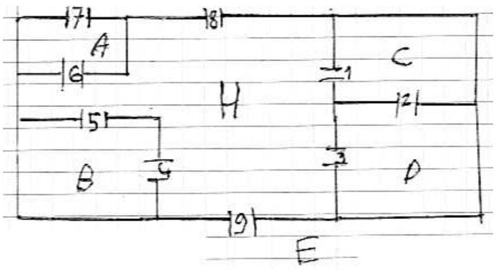


Lösung 120-43

Leo Gitin, 10 Jahre, Klasse 6:



Den Grundriss kann man als Graph darstellen: die Buchstaben sind die Höfe und die Linien die Tore. Ja, es ist möglich. Alle Punkte sind gerade außer H und E. Somit ist ein offener Eulerzug möglich. Alle Punkte, die eine ungerade Anzahl von Linien besitzen, sind Anfangs- oder Endpunkt. Da wir mit H beginnen, ist der Hof E immer der Endpunkt.
Die Zahlen bezeichnen die Reihenfolge einer Möglichkeit:



Lösung 120-44

Ilja Rozhko, 10 Jahre, Klasse 5:

a) In Dezimalschreibweise ist $\overline{m,n} = m + \frac{n}{10}$. Dann ist die erwartete Gleichung:

$$\frac{m}{n} = m + \frac{n}{10}$$

Versuchen wir die Gleichung in so eine zu verwandeln, dass m auf einer Seite ist und n auf der anderen. Für den Fall, dass $n \neq 0$ ist, gilt $m = (m + n/10) \cdot n$. n kann nicht Null sein, weil in der Aufgabe steht: $0 < n$. Weiter ergibt sich

$$\begin{aligned} m &= mn + n \cdot \frac{n}{10} \\ m - mn &= n \cdot \frac{n}{10} \\ m(1-n) &= n \cdot \frac{n}{10} \end{aligned}$$

Jetzt können wir linke und rechte Seite für den Fall, dass $n \neq 1$ ist, durch $1 - n$ teilen.

Den Fall $n = 1$ überprüfen wir jetzt: $m \cdot (0) \neq 1 \cdot 1/10$.

$$m = \frac{n^2}{10(1-n)}$$

Jetzt haben wir m auf der linken Seite und n auf der rechten.

Probieren wir es mal mit $n = 2$: $m = 2 \cdot 2/(10 \cdot (1-2))$. Also ist m negativ. In der Aufgabe steht aber: Die Zahlen von 0-9. Also ist $n \neq 2$. Wenn n noch größer wird, dann bleibt m negativ. Dies bedeutet aber, dass es keine Lösung gibt.

b) Die erwartete Gleichung ist:

$$\frac{m}{n} = n + \frac{m}{10}$$

Analog zu a) wird diese Gleichung ($n \neq 0, n \neq 10$ äquivalent umgeformt zu

$$m = \frac{n^2}{1 - n/10}$$

Probieren wir es mal mit $n = 1 : m = 1/(1 - 1/10)$. Dann wäre m keine natürliche Zahl.
Probieren wir es mal mit $n = 2 : m = 2 \cdot 2/(1 - 2/10)$. Dann wäre $m = 5$ und $n = 2$.
Probieren wir es mal mit $n = 3 : m = 3 \cdot 3/(1 - 3/10))$. Dann wäre m größer als 12.

Das bedeutet, dass es keine weiteren geben kann, weil bei jedem nächsten n wird m noch größer werden.

Dann ist die einzige Lösung $m = 5$ und $n = 2$: $5/2 = 2,5$.

Variante 2: Diese hat eine etwas andere Lösungsidee und verwendet Teilbarkeitsregeln:

a) Angenommen, m und n seien zwei Zahlen mit den geforderten Eigenschaften. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{m}{n} &= m + \frac{n}{10} \\ m &= mn + \frac{n^2}{10} \end{aligned}$$

Also muss n^2 ist durch 10 teilbar sein. Dies gilt aber für keine natürliche Zahl $0 < n \leq 9$. Daher gibt es keine Zahlen m, n mit den geforderten Eigenschaften.

b) Seien nun m und n zwei natürliche Zahlen zwischen 0 und 9, $n \neq 0$, für die $\frac{m}{n} = \overline{n,m}$ gilt. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{m}{n} &= n + \frac{m}{10} \\ m &= n^2 + \frac{mn}{10} \end{aligned}$$

Das Produkt mn muss durch 10 teilbar sein. Also ist eine der beiden Zahlen gleich 5. Falls $m = 5$ ist, gilt $n \in \{2, 4, 6, 8\}$. Für diese Zahlen n gilt die angegebene Gleichung nur im Fall $n = 2$, denn es ist $\frac{5}{2} = 2,5$. Falls $n = 5$ ist, muss $m \in \{2, 4, 6, 8\}$ sein. Für keine Zahl m aus dieser Menge gilt die gegebene Gleichung. $m = 5, n = 2$ sind die einzigen Zahlen, die alle geforderten Eigenschaften haben.

Lösung 120-45

Der Text deckt 26,4 h des Tages ab. Alexander kann so leben, da er einige Dinge parallel erledigt (essen, schreiben und lesen in der Schule).

Lösung 120-46

Die Primfaktorzerlegung von 2340 ist gleich

$$2340 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$$

Da sie die zweistellige Primzahl 13 enthält, kann es keine ganze Zahl mit Querprodukt 2340 geben.

Lösung 120-47

Lösung von Thekla Hamm, 10 Jahre, Klasse 5:

Mit Rückenwind fährt der Radfahrer in einer Stunde 15 km, gegen den Wind 10 km. Ohne Wind fährt er also 12,5 km. Für einen Kilometer braucht er deshalb

$$\frac{60}{12,5} \text{ Minuten} = 4,8 \text{ Minuten.}$$

Lösung von Yuxuan, 10 Jahre, Klasse 5:

Weil der Radfahrer mit Rückwind $\frac{1}{4}\frac{\text{km}}{\text{min}}$ und mit Gegenwind $\frac{1}{6}\frac{\text{km}}{\text{min}}$ fährt, ist die Windgeschwindigkeit:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\frac{\text{km}}{\text{min}} - \frac{1}{6}\frac{\text{km}}{\text{min}}\right) = \frac{1}{24}\frac{\text{km}}{\text{min}}$$

Er fährt dann bei Windstille mit einer Geschwindigkeit von

$$\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{24}\right)\frac{\text{km}}{\text{min}} = \frac{5}{24}\frac{\text{km}}{\text{min}}$$

Er fährt einen Kilometer bei Windstille in 4 min 48 s.

Variante 3:

Bei Rückenwind beträgt die Gesamtgeschwindigkeit $\frac{1}{4}\frac{\text{km}}{\text{min}}$, bei Gegenwind $\frac{1}{6}\frac{\text{km}}{\text{min}}$. Fährt er die gleiche Strecke einmal mit dem Wind und einmal gegen den Wind, so hebt sich der Einfluss der Windgeschwindigkeit genau auf. Seine Eigengeschwindigkeit ist also gleich dem arithmetischen Mittel der beiden Gesamtgeschwindigkeiten:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\frac{\text{km}}{\text{min}} + \frac{1}{6}\frac{\text{km}}{\text{min}}\right) = \frac{5}{24}\frac{\text{km}}{\text{min}}$$

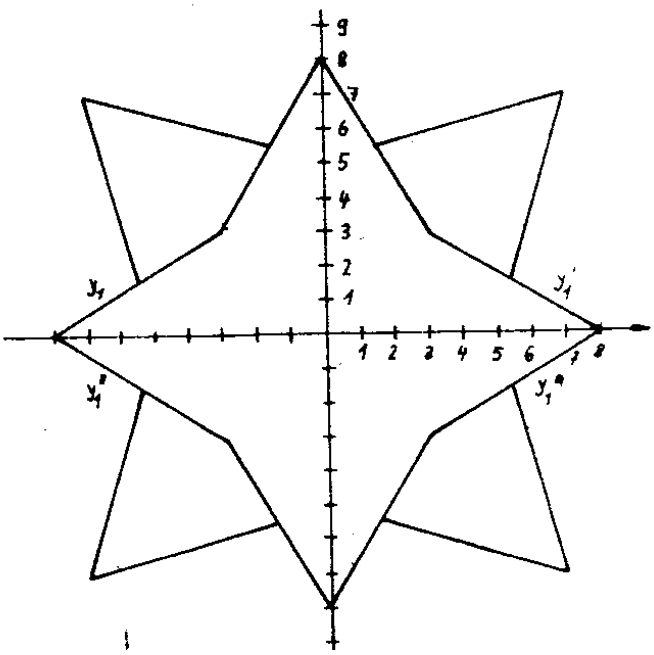
Für einen Kilometer bei Windstille braucht der Radfahrer daher $\frac{24}{5}$Minuten oder 4 Minuten und 48 Sekunden.

Lösung 120-48

Die erste entnommene Seite muss eine ungerade Nummer, die letzte eine gerade Nummer haben. Unter den möglichen Seitennummern 134, 143, 314, 341, 413, 431 sind nur 134 und 314 gerade. Da 134 kleiner ist als alle anderen Seitennumern, muss die letzte Seite die Nummer 314 haben. Die erste Seite kann also nur die Nummer 143 haben. Das sind zusammen $314 - 142 = 172$ Seiten oder 86 Blätter.

5 Klassen 7 und 8

Lösung 120-51



Lösung 120-52

	Mai	Nier.	Otte	Peters
Aach.	$-$	$-$	$-$	$+$
Berl.	$+(1)$	$-$	$-$	$-(1)$
Cottb.	$-$	$+$	$-$	$-(1,3)$
Düss.	$-$	$-(2)$	$+$	$-(2)$

	Mai	Nier.	Otte	Peters
Hund	$-$	$-$	$-$	$+(1)$
Katze	$-(2)$	$-(2)$	$+$	$-$
Wellens.	$+$	$-$	$-$	$-$
Meers.	$-(1)$	$+$	$-$	$-$

(1) $\Rightarrow$ Herr Mai wohnt in Berlin und hat keinen Hund, Herr Peters hat einen Hund und wohnt nicht in Berlin.
(1),(3) $\Rightarrow$ Herr Peters und Herr Mai wohnen nicht in Düsseldorf und Herr Mai hat kein Meerschweinchen.
(2) $\Rightarrow$ Herr Mai hat keine Katze. Daher muss Herr Mai einen Wellensittich haben.
hieraus und aus (1) und (2) $\Rightarrow$ Herr Nierstein hat keine Katze, keinen Hund und keinen Wellensittich und wohnt nicht in Berlin und nicht in Düsseldorf. $\Rightarrow$ Herr Nierstein hat ein Meerschweinchen.
Damit und mit (3) $\Rightarrow$ Herr Nierstein wohnt in Cottbus.
Herr Peters wohnt also nicht in Cottbus, Berlin oder Düsseldorf. Bleibt für ihn nur noch Aachen.
Zusammenfassnd ergibt sich folgende Zuordnung:

Herr Mai	Berlin	Wellensittich
Herr Peters	Aachen	Hund
Herr Nierstein	Cottbus	Meerschweinchen
Herr Otte	Düsseldorf	Katze

Lösung 120-53

Seien r der Inkreisradius und R der Umkreisradius, dann gilt nach Satz des Pythagoras:

$$R^2 = 2r^2$$

Damit sieht man die Behauptung.

Lösung 120-54

Die 11 Kugeln bestehen zusammen aus 128 Masseeinheiten Gold, da sich das Gewicht zweier Kugeln wie die dritte Potenz der Radien verhält:

$$5 \cdot 1 + 4 \cdot 2^3 + 1 \cdot 3^3 + 1 \cdot 4^3 = 5 + 32 + 27 + 64 = 64 + 64$$

Der eine Prinz bekommt die größte Kugel, der andere die ganzen kleineren.

Lösung 120-55

Wir legen in die linke untere Ecke A des Schachbretts den Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems mit den positiven Halbachsen durch AB (x-Achse) und AD (y-Achse). Als Einheit des Koordinatensystems wählen wir die Breite eines Schachbrettfeldes. A hat dann die Koordinaten $(0 \mid 0)$, B die Koordinaten $(8 \mid 0)$ und der Mittelpunkt M der gegenüberliegenden Seite $(4 \mid 8)$. Aus Symmetriegründen genügt es, das Dreieck $\triangle AMD$ zu betrachten.

Es seien $(x_0 \mid y_0)$, $(x_0 + 1 \mid y_0)$, $(x_0 + 1 \mid y_0 + 1)$, $(x_0 \mid y_0 + 1)$ die Eckpunkte eines Schachbrettfeldes, dessen Inneres oberhalb der Geraden g_{AM} durch A und M liegt. x_0 und y_0 sind dann ganzzahlig.

Für Punkte $(x \mid y)$ auf der Geraden g_{AB} gilt

$$y = 2x$$

Die Koordinaten $x_0, y_0 \in \mathbb{N}$ der Eckpunkte des obigen Schachbrettfeldes müssen daher den folgenden Ungleichungen genügen:

$$0 \leq x_0 \leq 3, 2 \leq y_0 \leq 7, x_0 + 1 \leq \frac{y_0}{2} \tag{1}$$

Gesucht sind alle natürlichen Zahlen x_0 und y_0, die diese Bedingungen erfüllen. Durchläuft y_0 die Zahlen von 2 bis 7, so bleiben für x_0 nur noch je maximal 3 Möglichkeiten:

y	2	3	4	5	6	7
x	0	0	0,1	0,1	0,1,2	0,1,2

$2 + 4 + 6 = 12$ Paare $(x_0 \mid y_0)$ ganzer Zahlen erfüllen das Ungleichungssystem (1). Wegen der Symmetrie kommen noch einmal 12 Paare $(x_0 \mid y_0)$ hinzu, die linker unterer Eckpunkt eines oberhalb der Geraden durch B und M gelegenen Schachbrettfeldes sind.

Das Innere von 24 Feldern des Schachbretts liegen also außerhalb des Dreiecks $\triangle ABM$.

Lösung 120-56

Die Schnur enthält nur einen einzigen Knoten!

6 Klassen 9 bis 13

Lösung 120-61

U.Warnecke:

Sei $pn + 1 = m^2$ mit $m \in \mathbb{N}$; dann ist

$$n = \frac{(m+1)(m-1)}{p}, \tag{1}$$

und wegen $n \in \mathbb{N}$ gilt jetzt (I) $p \big| m-1$ oder (II) $p \big| m+1$.

Zu (I): Für $pr = m - 1$ mit $r \in \mathbb{N}$, d. h. $m = pr + 1$ erhält man aus (1)

$$n+1 = \frac{(pr+2)pr}{p} + 1 = pr^2 + 2r + 1 = (p-1)r^2 + (r+1)^2 = \sum_{i=1}^{p-1} r^2 + (r+1)^2.$$

Zu (II): Für $ps = m + 1$ mit $s \in \mathbb{N}$, d. h. $m = ps - 1$ erhält man aus (1)

$$n+1 = \frac{ps(ps-2)}{p} + 1 = ps^2 - 2s + 1 = (p-1)s^2 + (s-1)^2 = \sum_{i=1}^{p-1} s^2 + (s-1)^2.$$

Damit ist für beide Fälle die Darstellbarkeit von $n + 1$ als Summe von p Quadratzahlen gezeigt.

Zahlenbeispiele: a) Für $p = 7$, $n = 5$: $n + 1 = 6 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2$.

b) Für $p = 5$, $n = 24$: $n + 1 = 25 = 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2$.

Lösung 120-62

Die beiden Wege haben nur den Punkt A gemeinsam, d.h. eine erneute Begegnung ist nur im Punkt A möglich.

Sei a die Kantenlänge des Quadrats, dann legt die erste Kakerlake bei einer Runde (von A nach A) einen Weg der Länge $2a + \sqrt{2}a$ zurück, die zweite einen Weg der Länge $2a$. Angenommen, sie begegnen sich in A wieder und die erste Kakerlake ist bis dahin $m \in \mathbb{N}$ Runden gelaufen, die zweite Kakerlake $n \in \mathbb{N}, n > m$. Dann gilt

$$m(2a + \sqrt{2}a) = 2na$$

bzw. (da $a > 0$)

$$\begin{aligned} m(2+\sqrt{2}) &= 2n \\ \sqrt{2}m &= 2(n-m) \end{aligned}$$

Die rechte Seite der Gleichung ist rational (sogar natürlich), die linke Seite wegen $m \in \mathbb{N}$ irrational.

Die beiden Kakerlaken werden sich folglich nicht mehr begegnen.

Lösung 120-63

U.Warnecke:

Wegen der Rechtwinkligkeit des Dreiecks ist $\alpha + \beta = 90^\circ$, und man erkennt sofort, dass die Dreiecke ABC, AHC und HBC ähnlich sind, da sie in entsprechenden Winkelweiten übereinstimmen. Daher hat man:

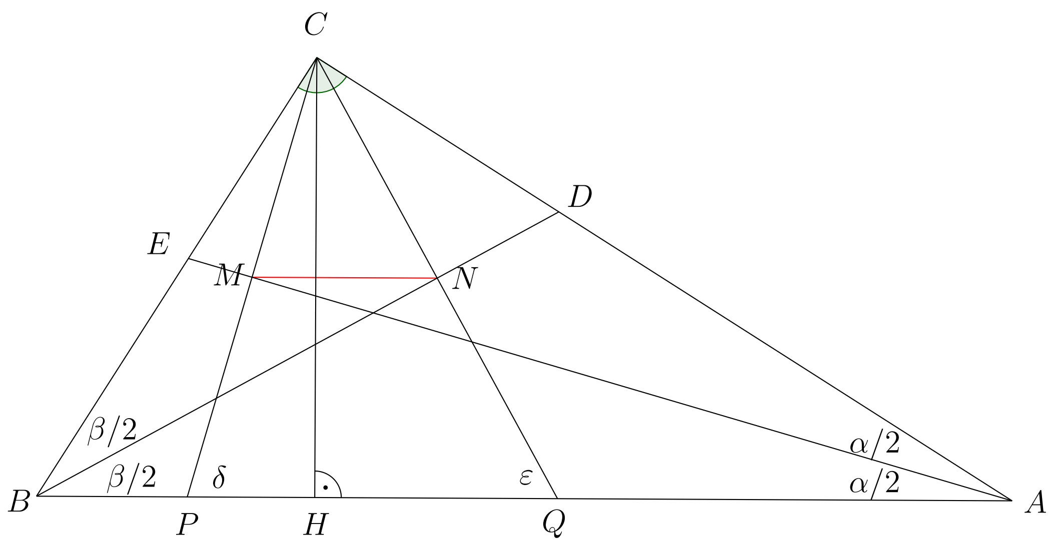
Im Dreieck APC gilt $\alpha + \delta + \beta + \frac{\alpha}{2} = 180^\circ \;\Rightarrow\; \delta = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, damit $|\angle AMP| = 90^\circ = |\angle EMC|$;

im Dreieck QBC gilt $\varepsilon + \beta + \alpha + \frac{\beta}{2} = 180^\circ \;\Rightarrow\; \varepsilon = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$, damit $|\angle QNB| = 90^\circ = |\angle DNQ|$.

Also sind auch die Dreiecke MEC und HPC ähnlich, ebenso die Dreiecke DNC und QHC.

Folglich sind die Dreiecke APC und QBC gleichschenklig, sodass $|CM| = |MP|$ und $|CN| = |NQ|$. Die Winkelhalbierenden dieser Dreiecke sind somit zugleich auch Seitenhalbierende der jeweiligen Basisseiten dieser Dreiecke.

Also gilt $\frac{|CM|}{|MP|} = \frac{|CN|}{|NQ|}$. Nach der Umkehrung des ersten Strahlensatzes folgt $MN \| PQ$, und das heißt wegen $P, Q \in AB$ auch $MN \| AB$.



Lösung 120-64

U.Warnecke:

Die Behauptung der Aufgabe werde sogleich allgemein für beliebiges $n \geq 2$ bewiesen.

Da in einem regelmäßigen Polygon alle Seiten gleich lang sind, reicht es aus zu beweisen, dass die Summe der Höhen der roten Dreiecke gleich der Summe der Höhen der blauen Dreiecke ist (s. Abbildungen).

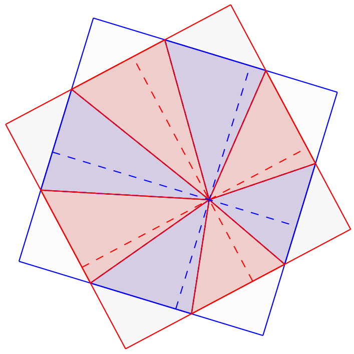


Abb. 1

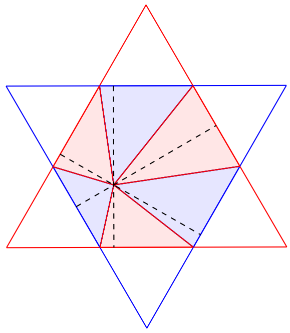


Abb. 2

Falls n gerade ist, grenzen an die gegenüberliegenden Seiten des $2n$-Ecks Dreiecke der gleichen Farbe an; daher ist die Summe der Längen der Höhen dieser Dreiecke gleich dem Abstand zwischen diesen gegenüberliegenden Seiten (Abb. 1). Teilt man nun die Dreiecke in Paare neben gegenüberliegenden Seiten, ergibt sich die Behauptung, dass die Summe der Flächeninhalte aller blauen Dreiecke gleich der Summe der Flächeninhalte aller roten Dreiecke ist.

Falls n ungerade ist, zeichne man zuerst ein solches regelmäßiges n-Eck, das die roten Seiten des $2n$-Ecks fortsetzt, und danach einzweites solches n-Eck, das die blauen Seiten des n-Ecks fortsetzt. Dann sind das rote und das blaue n-Eck kongruent (Abb. 2).

Nun gilt in der Elementargeometrie der Satz: <u>Jeder Punkt im Innern oder auf dem Rand eines gleichseitigen Dreiecks hat die gleiche Summe der Abstände von den Dreiecksseiten; diese Summe ist gleich der Höhe des Dreiecks.</u>

Die Fläche des roten n-Ecks (n ungerade!) ist nach diesem Satz gleich der Summe der Längen der Höhen der roten Dreiecke multipliziert mit der halben Länge einer seiner Seiten. Gleiches gilt für das blaue n-Eck.

Hieraus folgt die Gleichheit der Summen der Längen der Höhen der roten und blauen Dreiecke, und damit ist die Behauptung der Aufgabe bewiesen.