1 Vorschule

Lösung 121-11

Statt einer 5 steht eine 7, statt einer 4 steht eine 5 und statt einer 9 steht eine 3. Also sind eine 4, eine 5 und eine 9 falsch:

Lösung 121-12

Katrin stand am Fenster 6.

Lösung 121-13

Die Schilder sind von 3 bis 8 numeriert. Die Kinder haben die Schilder 3, 5 und 8 getoffen.

Lösung 121-14

30 Hände berühren sich.

2 Klassen 1 und 2

Lösung 121-21

Es gibt 4 Fälle:

1. 2 wurden geboren, 3 wurden gekauft

2. 2 wurden geboren, 2 wurden gekauft

3. 3 wurden geboren, 3 wurden gekauft

4. 3 wurden geboren, 2 wurden gekauft

Fall 1: $6 - 3 + 2 + 3 = 8$. Ich darf noch 4 Fische kaufen.

Fall 2: $6 - 3 + 2 + 2 = 7$. Ich darf noch 5 Fische kaufen.

Fall 3: $6 - 3 + 3 + 3 = 9$. Ich darf noch 3 Fische kaufen.

Fall 4: $6 - 3 + 3 + 2 = 8$. Ich darf noch 4 Fische kaufen.

Je nachdem darf ich noch 3, 4 oder 5 Fische kaufen.

Lösung 121-22

Gesucht sind alle Zusammenstellungen, bei denen das Gesamtgewicht nicht größer als 7 kg ist. Die Tabelle zeigt in jeder Zeile eine Lösung des Problems.

Obst (1kg)	Zwiebeln (2kg)	Tomaten (3kg)	Kartoffeln (5kg)	Gesamtgewicht
x				1
	x			2
		x		3
			x	5
x	x			3
x		x		4
x			x	6
	x	x		5
	x		x	7
x	x	x		6

Lösung 121-23

Die Waschmaschine fängt um 11:55 an zu waschen.

Lösung 121-24

Die Summe aller Zahlen ist 38. Die Summe in jeder Sechsergruppe muss also gleich 19 sein. Das gilt zum Beispiel für 355510 und 105337.

Zusatzaufgabe: Es gibt mehr als eine Möglichkeit. Beispielsweise kann man eine 6 als $5 + 1$ von links gegen eine 6 als $3 + 3$ von rechts austauschen und hat dann 353310 und 105517.

Lösung 121-25

Muster A: Die Teile wechseln sich einfach ab.

Lösung 121-26

Der Verkäufer muss Anna 74ct zurückgeben. Das geht mit 50ct, 20ct, 2ct und 2ct. Es sind insgesamt 4 Münzen.

Lösung 121-27

$$36 - 33 + 5 = 8 \qquad 52 + 13 - 38 = 27$$

$$12 + 5 + 40 = 57 \qquad 90 + 20 - 30 = 80$$

Lösung 121-28

Nacheinander werden 6 Zweiergruppen Hölzer verbrannt. Das dauert dann $6 \cdot 30$ min, also 3 Stunden.

3 Klassen 3 und 4

Lösung 121-31

Anja, Vera und Galja sind Mädchen.

Anja kann nicht das Kindergartenkind sein, da sie dann die Jüngste wäre, nach b) aber älter ist als Borja.

Angenommen, Galja geht in den Kindergarten, ist also 5 Jahre alt. Dann müssen Anja und Vera entweder 8 und 13 oder 13 und 8 Jahre alt sein, da nur in diesen Fällen die Summe der Lebensalter durch 3 teilbar ist. Dann wäre aber Borja 15 und Anja nicht älter als Borja.

Somit ist Vera 5 Jahre alt. Aus c) und Vera $= 5$ Jahre folgt, Anja ist 13 Jahre alt, denn $5+13 = 18$ ist durch 3 teilbar, aber $5 + 8 = 13$ und $5 + 15 = 20$ sind nicht durch 3 teilbar.

Aus Anja $= 13$ und b) folgt Borja ist 8 Jahre alt.

Also ist Galja 15 Jahre alt.

Ergebnis:

Vera: 5 Jahre
Borja: 8 Jahre
Anja: 13 Jahre
Galja: 15 Jahre

Lösung 121-32

Es gibt verschiedene Lösungen. Eine ist diese:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 &= 2 \\ (2 + 0) : 2 - 1 &= 0 \\ 2 + 0 \cdot (2 + 1) &= 2 \\ 2 + 0 - 2 + 1 &= 1 \end{aligned}$$

Lösung 121-33

Fisch 2 passt nicht, denn die Fische 1 und 5 sowie die Fische 3 und 4 haben gleiche Flossen und in die gleiche Richtung gestreifte Schwänze.

Fisch 2 passt wegen seiner Schwanzschraffur nicht zu 1 und 5 und wegen seiner Flossen nicht zu 3 und 4.

Lösung 121-34

Die Reihenfolge ist blau $<$ rot $<$ grün.

Lösung 121-35

3 und 4

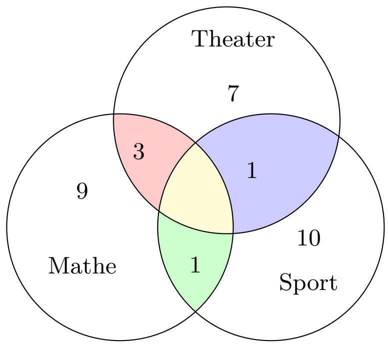
Lösung 121-36

1. 500 Mal: 1 Kilometer sind 1000 Meter. Wenn das Känguru mit jedem Sprung einen Meter schaffen würde, müsste es 1000 mal hüpfen. Weil es aber 2 Meter schafft, braucht es nur halb so viele Sprünge.

2. 750 Mal: Eineinhalb Kilometer sind 1500 Meter. Für einen Kilometer braucht es 500 Sprünge. Für einen halben Kilometer braucht es noch einmal halb so viele Sprünge, also 250 Sprünge. Das sind zusammen 750 Sprünge.

Lösung 121-37

Zeichnet man die AGs als einander überlappende Kreise, so kann man die Anzahl der Kinder, die mehrere der AGs besuchen in die farbigen Bereiche schreiben: 3 Kinder sind sowohl in der Mathe- als auch in der Theater-AG. Daher steht eine 3 im rosa gefärbten Bereich. Je ein Kind ist sowohl in der Mathe- als auch in der Sport-AG bzw. sowohl in der Theater- als auch in der Sport-AG. Daher steht in dem grünen und dem blauen Bereich je eine 1. Kein Kind ist in allen 3 AGs. Daher steht nichts im gelben Bereich.



Nun wissen wir, dass in der Mathe-AG insgesamt 13 Kinder sind. 4 davon sind auch in einer anderen AG (rosa und grüner Bereich). Es bleiben $13 - 4 = 9$ Kinder, die nur in der Mathe-AG sind. Genauso überlegt man sich, dass von 12 Kindern der Sport-AG 10 in keiner anderen AG sind und von den 11 Kindern der Theater-AG 7 Kinder in keiner anderen AG sind. Wir können jetzt die Antworten auf die beiden Fragen leicht ablesen, indem wir die Zahlen in der Zeichnung addieren:

a) Es sind insgesamt $9 + 3 + 7 + 1 + 1 + 10 = 31$ Kinder.

b) $9 + 7 + 10 = 26$ Kinder sind nur in einer AG.

Lösung 121-38

In dem Kasten steht die 3.

4 Klassen 5 und 6

Lösung 121-41

7,3 Stunden sind 73/10 Stunden, also $6 + 13/10$ Stunden. 1/10 Stunde ist gleich 6 Minuten, d.h, 13/10 Stunden sind 78 Minuten oder 1 Stunde und 18 Minuten.

Folglich sind 7,3 Stunden 7 Stunden und 18 Minuten. Lotta hat sich um 12 Minuten vertan.

Lösung 121-42

Die Dreiecke $\triangle ABF$ und $\triangle CDE$ haben gleiche Grundlinie und gleiche Höhe und damit den gleichen Flächeninhalt. Sei A_x der Flächeninhalt des Vierecks $MENF$, dann folgt

$$A_1 + A_x + A_2 = A_3 + A_x + A_4$$

und somit die Behauptung.

Lösung 121-43

Die Aussage ist nur dann falsch, wenn es eine Karte gibt, deren Vorderseite eine Zahl zeigt und deren Rückseite weiß ist.

Man muss also die Karte Nr.1 oder die Karte Nr.4 umdrehen, im ungünstigsten Fall muss man beide Karten umdrehen:

Dreht man Nr.1 um und stellt fest, dass die Rückseite weiß ist, ist die Aussage falsch und man ist fertig.

Ist die Rückseite grau, muss man die weiße Karte prüfen, also Nr.4 umdrehen.

Zeigt die Vorderseite von Nr.4 eine Zahl, so ist die Aussage falsch, zeigt sie einen Buchstaben, so ist die Aussage wahr, denn Nr.1 hat ja in diesem Fall eine graue Rückseite.

Lösung 121-44

Gesamtgeschwindigkeit: $v_1 + v_2 = 81$ km/h $= 22,5$ m/s; $\quad l = (v_1 + v_2)t = 22,5$ m/s $\cdot\ 6$ s $=$ 135 m. Die Zuglänge beträgt also 135 m.

Lösung 121-45

Betrachte immer jedes zweite Folgenglied:

$$5, 10, 25, 50, 85, \ldots$$

Vorschrift: $+5, +15, +25, +35, \ldots$.

Fortsetzung: $85 + 45 = 130$, $130 + 55 = 185$

$$11, 16, 15, 20, 19, \ldots$$

Vorschrift: $+5, -1, +5, -1, \ldots$

Fortsetzung: $19 + 5 = 24$, $24 - 1 = 23$

Also lauten die nächsten 4 Folgenglieder: **130, 24, 185, 23**.

Lösung 121-46

Angenommen, der Bauer hatte anfangs x Münzen in der Tasche. Dann sind es nach der Ersten Überquerung der Brücke und nachdem er dem Teufel 24 Münzen gegeben hatte $2x - 24$. Nach dem zweiten Mal sind es $2(2x - 24) - 24$, nach dem dritten mal $2\left[2(2x - 24) - 24\right] - 24$. Aber das sind 0 Münzen:

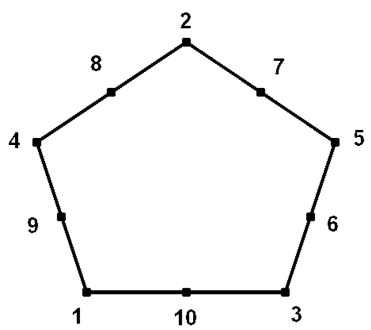
$$\begin{aligned}
2\left[2(2x - 24) - 24\right] - 24 &= 0\\
2\left[4x - 3 \cdot 24\right] - 24 &= 0\\
8x - 2 \cdot 3 \cdot 24 - 24 &= 0\\
8x &= 7 \cdot 24\\
x &= 21
\end{aligned}$$

Der Bauer hatte zu beginn 21 Münzen in der Tasche.

Lösung 121-47

PYTHAGORAS

Lösung 121-48



5 Klassen 7 und 8

Lösung 121-51

Es gibt genau 2 verschiedene Darstellungen der Zahl 2021 als Differenz zweier Quadratzahlen. Diese erhält man mit Hilfe der 3. binomischen Formel aus der Produktdarstellung $2021 = 47 \cdot 43 = 2021 \cdot 1$.

$$\begin{aligned} a+b &= 47 \\ a-b &= 43 \end{aligned}$$

Also $a = 45, b = 2$ und $2021 = 45^2 - 2^2$.

$$\begin{aligned} a+b &= 2021 \\ a-b &= 1 \end{aligned}$$

Also $a = 1011, b = 1010$, d.h. $2021 = 1011^2 - 1010^2$.

Lösung 121-52

15 Schüler. Jeder verschenkte 14 Fotos.

Lösung 121-53

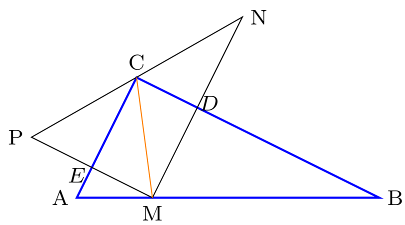
Seien $a = 987654321$ und $b = 98765432$. Dann kann man die Ungleichungen schreiben als

$$ab < n < b\,(10a + 3)$$

Wegen $b\,(a+2) - ab = 2b$ erfüllen $2b - 1 = 197530863$ natürliche Zahlen die gegebene Ungleichung.

Lösung 121-54

a)
Wir beweisen, dass $\triangle MCP$ gleichschenklig ist. Der Beweis für $\triangle MNC$ ist analog. Nach Konstrution von P gilt $ME = EP$ und $\angle CEP = \angle CEM = 90°$. Da die Dreiecke $\triangle MCE$ und $\triangle CEP$ außerdem die Seite CE gemeinsam haben, sind sie nach Kongruenzsatz sws kongruent. Damit ist $\triangle MCP$ gleichschenklig.



b)

Es gilt $AC \parallel MN$, da $\triangle ABC$ rechtwinklig und nach Konstruktion von N. Die Winkel $\angle PCE$ und $\angle DNC$ sind daher ebenso wie $\angle EPC$ und $\angle DCN$ als Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen gleich groß. Da $\triangle PEC$ und $\triangle CDN$ rechtwinklig sind und $\angle BCA = 90°$ ist, beträgt die Größe des Winkels $\angle PCN$ 180° (verwendet wurde hierbei der Innenwinkelsatz im Dreieck). Die Punkte P, C und N liegen somit auf einer Geraden.

c)

Nach b) haben $\triangle ECP$ und $\triangle DNC$ gleiche Innenwinkel, sind also einander ähnlich. Nach a) gilt $MC = CN = PC$. Daher haben die Dreiecke $\triangle ECP$ und $\triangle DNC$ eine gleich lange Seite. Sie sind also sogar kongruent.

Lösung 121-55

a) Der Golfball wird vom Punkt $(0 \mid 0)$ abgeworfen und erreicht seine maximale Weite bei der zweiten Nullstelle. Wegen

$$f(x) = -\frac{1}{128}x^2 + \frac{5}{4}x = x\left(-\frac{1}{128}x + \frac{5}{4}\right)$$

ist dies

$$x = \frac{5}{4} : \frac{1}{128} = 5 \cdot 32 = 160$$

Die maximale Höhe erreicht der Golfball am Scheitelpunkt der Parabel. Da die Parabel symmetrisch bezüglich der Nullstellen ist, ist dies bei der Hälfte der Flugweite der Fall, also bei 80. Die Höhe h beträgt dann

$$h = f(80) = -\frac{1}{128} \cdot 80^2 + \frac{5}{4} \cdot 80 = -50 + 100 = 50$$

Der Golfball erreicht eine maximale Weite von 160 und eine maximale Höhe von 50.

b) Seien a die Maßzahl der Länge der größeren, b die Maßzahl der Länge der kleineren und d die Maßzahl der Länge der Diagonalen des Rechtecks. Dann gilt nach Voraussetzung und Satz des Pythagoras

$$\begin{aligned} d &= 4b \\ d^2 &= a^2 + b^4 \\ a &= 9 \end{aligned}$$

Daraus folgt für b:

$$16b^2 = 81 + b^2 \Leftrightarrow b^2 = \frac{81}{15} \Leftrightarrow b = \pm\frac{9}{\sqrt{15}}$$

Die negative Lösung hat in diesem Zusammenhang keinen Sinn. Es muss also

$$b = \frac{9}{\sqrt{15}}$$

sein und folglich

$$d = 4b = \frac{36}{\sqrt{15}}$$

Tatsächlich gilt dann für a

$$a^2 = \frac{36^2}{15} - \frac{9^2}{15} = \frac{1215}{15} = 81$$

also $a = 9$.

c) Es seien a, b, und c die Maßzahlen der Längen der Katheten bzw. der Hypotenuse des Dreicks, dann gilt nach Satz des Pythagoras und Voraussetzung:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ \frac{a}{b} &= \frac{1}{3} \\ c &= 8 \end{aligned}$$

Damit folgt für b: $b = 3a$ und für a:

$$8^2 = a^2 + 9a^2 = 10a^2$$

Diese Gleichung hat die beiden Lösungen $\pm\frac{8}{\sqrt{10}}$. Die negative Lösung hat in diesem Kontext keinen Sinn. Es ist also

$$a = \frac{8}{\sqrt{10}}, b = \frac{24}{\sqrt{10}}$$

Tatsächlich gilt dann für c

$$c^2 = \frac{64}{10} + \frac{576}{10} = 64,$$

also $c = 8$. Und es ist

$$\frac{8}{\sqrt{10}} : \frac{24}{\sqrt{10}} = 1 : 3$$

d) Für das Volumen V gilt

$$V = \frac{\pi}{4} d^2 \cdot h$$

Daraus folgt für d (die negative Lösung kann ausgeschlossen werden):

$$d = \sqrt{\frac{100 \cdot 4}{3\pi}} = \sqrt{\frac{400}{3\pi}} \approx 6,51$$

Lösung 121-56

Wir nehmen der Reihe nach an, dass in der jeweiligen Aussage beide Namen falsch sind und schließen aus den übrigen Aussagen auf die Sieger:

a) A falsch und C falsch: es folgt F wahr (aus c)) und D wahr (aus e)); also B falsch (aus b)) und damit E wahr (aus d)). Es gäbe also genau 3 Sieger D, E, F, was ein Widerspruch ist.

b) B falsch und F falsch: es folgt A wahr (aus c)) und E wahr (aus d)) und daher C falsch (aus a)) und D falsch (aus e)). Es gäbe genau 2 Sieger A und E. Das wäre eine Lösung der Aufgabe, aber wir müssen noch nachweisen, dass sie auch einzig ist.

c) A falsch und F falsch: es folgt B wahr (aus b)) und C wahr (aus a)) und D wahr (aus e)) und daher gäbe es auch in diesem Fall 3 mögliche Sieger: B, C und D.

d) B falsch und E falsch: es folgt F wahr (aus b)) und daraus A falsch (aus c)). Dann müssten C und D wahr sein (aus a) und e)), so dass es die 3 möglichen Sieger C, D und F gäbe.

e) A falsch und D falsch: es folgt C wahr (aus a)) und F wahr (aus c)) und somit B falsch (aus b)) und damit E wahr (aus d)). Wir hätten die 3 Sieger C, E und F.

Es lässt sich also feststellen: unter der Annahme, dass die Aussagen in a), c), d) und e) beide falsch sind, ergäben sich jeweils 3 Sieger, was im Widerspruch zur Aufgabe steht. Unter der Annahme, dass in b) beide Aussagen falsch sind, ergeben sich genau 2 Sieger: A und E. Die Sieger lassen sich aus den Bedingungen der Aufgabe somit eindeutig ermitteln.

Axel und Ernst gewannen den 100-m-Lauf.

6 Klassen 9 bis 13

Lösung 121-61

Ulrich Warnecke:

Zweierlei ist zu zeigen: (I) $p^2 \big| \sum_{i=1}^p i^p$ und (II) $p^3 \not\big| \sum_{i=1}^p i^p$.

Zu (I): Die Behauptung ist äquivalent mit $\sum_{i=1}^p i^p \equiv 0 \mod p^2$. Durch Umordnung und Zusammenfassung des ersten Summanden mit dem vorletzten, des zweiten mit dem vorvorletzten usw. erhält man (p ist ungerade!)

$$\sum_{i=1}^p i^p = (1^p + (p-1)^p) + (2^p + (p-2)^p) + \ldots + ((p-2)^p + (p-1)^p) + p^p = \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} (i^p + (p-i)^p) + p^p.$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} i^p + (p-i)^p = (i^p - (i-p)^p) &= (i - (i-p)) \left(i^{p-1} + i^{p-2}(i-p) + \ldots + i(i-p)^{p-2} + (i-p)^{p-1} \right) \\ &= p \cdot \sum_{j=0}^{p-1} i^{p-1-j}(i-p)^j, \end{aligned}$$

und hierin ist auch der zweite Faktor durch p teilbar, wie man mittels des binomischen Lehrsatzes zeigt:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{p-1} i^{p-1-j}(i-p)^j &= \sum_{j=0}^{p-1} \left(i^{p-1-j} \cdot \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} i^{j-k}(-p)^k \right) \\ &\equiv \sum_{j=0}^{p-1} i^{p-1-j} \cdot i^{j-0}(-p)^0 = \sum_{j=0}^{p-1} i^{p-1} = p \cdot i^{p-1} \equiv 0 \mod p. \end{aligned}$$

Damit hat sich ergeben:

$$\sum_{i=1}^p i^p \equiv 0 \mod p^2.$$

Zu (II): Hier benötigen wir zuerst den Nachweis, dass $i^p + (p-i)^p \equiv p^2 \mod p^3$ für ungerade Primzahlen p und ganze Zahlen i, die nicht durch p teilbar sind, gilt. Wie zuvor hat man zunächst wieder

$$i^p + (p-i)^p = p \cdot \sum_{j=0}^{p-1} i^{p-1-j}(i-p)^j$$

und hat den zweiten Faktor $\mod p^2$ zu betrachten. Mittels des binomischen Lehrsatzes findet man

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{p-1} i^{p-1-j}(i-p)^j &= \sum_{j=0}^{p-1} \left(i^{p-1-j} \cdot \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} i^{j-k}(-p)^k \right) \\ &\equiv \sum_{j=0}^{p-1} i^{p-1-j} \left(\binom{j}{0} i^{j-0}(-p)^0 + \binom{j}{1} i^{j-1}(-p)^1 \right) \\ &= \sum_{j=0}^{p-1} i^{p-1-j} \left(i^j - j i^{j-1} p \right) = \sum_{j=0}^{p-1} i^{p-1} - \sum_{j=0}^{p-1} j i^{p-2} p \\ &= p i^{p-1} - p i^{p-2} \sum_{j=0}^{p-1} j \\ &= p i^{p-1} - p i^{p-2} \frac{(p-1)p}{2} = p i^{p-1} - p^2 i^{p-2} \frac{p-1}{2} \equiv p i^{p-1} \mod p^2, \end{aligned}$$

Letzteres, da p ungerade und daher $\frac{p-1}{2}$ ganzzahlig ist.
i durchläuft die Zahlen $1; 2; \ldots ; p-1$, die alle teilerfremd zur Primzahl p sind; daher gilt für diese Zahlen nach dem kleinen FERMATschen Satz $i^{p-1} \equiv 1 \mod p$.
Unter Anwendung der Regel

$$a \equiv b \mod m \quad \Leftrightarrow \quad ka \equiv kb \mod km \quad \text{für } k \neq 0$$

erhält man

$$pi^{p-1} \equiv p \mod p^2.$$

Nach nochmaliger Anwendung der Regel folgt mit $\sum_{j=0}^{p-1} i^{p-1-j}(i-p)^j \equiv pi^{p-1} \mod p^2$

$$p^2 = p \cdot p \equiv p \cdot \sum_{j=0}^{p-1} i^{p-1-j}(i-p)^j \equiv i^p + (p-i)^p \mod p \cdot p^2,$$

d. h. $i^p + (p-i)^p \equiv p^2 \mod p^3$, und damit ist der erforderliche Nachweis erbracht.

Da p offensichtlich $\frac{p-1}{2}$ nicht teilt, gilt unter Beachtung der Voraussetzung $p \geq 3$

$$\sum_{i=1}^{p} i^p = \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} (i^p + (p-i)^p) + p^p \equiv \frac{p-1}{2} p^2 \not\equiv 0 \mod p^3,$$

und damit ist auch (II) bewiesen.

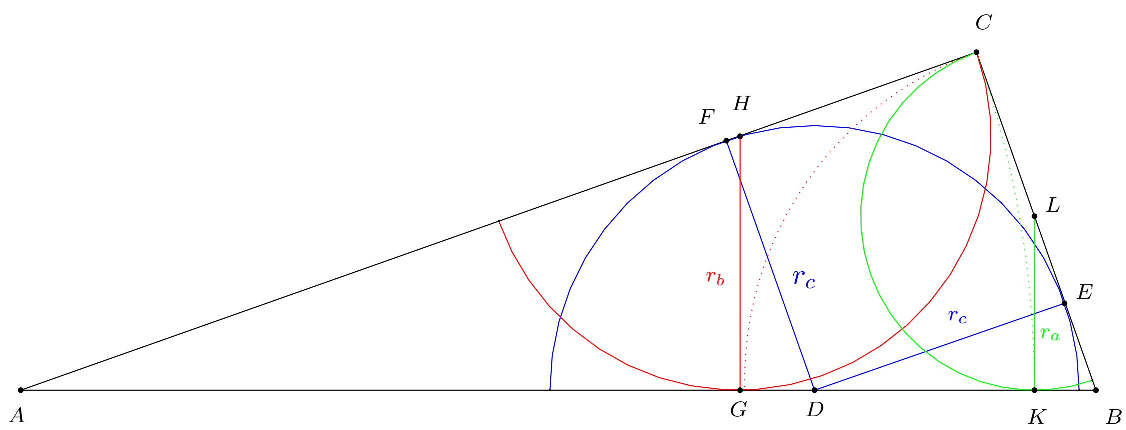
Lösung 121-62

Ulrich Warnecke:

Berechnung der Radien unter Beachtung von $0 < a \leq b < c$ sowie $a^2 + b^2 = c^2$ (wegen Rechtwinkligkeit des Dreiecks):

1.) Die Dreiecke ADF und ABC sind ähnlich, daher gilt

$$\frac{b - r_c}{b} = \frac{r_c}{a} \Leftrightarrow 1 = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) r_c \Leftrightarrow r_c = \frac{ab}{a+b}$$



2.) Es ist $|BG| = |BC| = a$, $|GH| = |CH| = r_b$, damit $|AH| = |AC| - |CH| = b - r_b$, sodass für das rechtwinklige Dreieck AGH gilt:

$$(b - r_b)^2 = (c - a)^2 + r_b^2 \Leftrightarrow b^2 - 2br_b = (c - a)^2 \Leftrightarrow r_b = \frac{b^2 - (c - a)^2}{2b}$$

Die Darstellung von r_b kann unter Ausnutzung von $a^2 + b^2 = c^2$ vereinfacht werden:

$$r_b = \frac{b^2 - c^2 + 2ac - a^2}{2b} = \frac{b^2 - a^2 + 2ac - c^2}{2b} = \frac{b^2 - a^2 + 2ac - (a^2 + b^2)}{2b} = \frac{-2a^2 + 2ac}{2b} = \frac{a(c - a)}{b}.$$

3.) Es ist $|KL| = |CL| = r_a$, $|BL| = a - r_a$, $|AK| = |AC| = b$, damit $|BK| = |AB| - |AK| = c - b$, sodass für das rechtwinklige Dreieck BLK gilt:

$$(a - r_a)^2 = (c - b)^2 + r_a^2 \Leftrightarrow a^2 - 2ar_a(c - a)^2 \Leftrightarrow r_a = \frac{a^2 - (c - b)^2}{2a}$$

Analog zu 2.) ist auch hier Vereinfachung möglich: $r_a = \dfrac{b(c - b)}{a}$.

a) Man sieht jetzt sofort: Wenn $a = b$, so $r_a = r_b$. Daher sei für die folgenden Äquivalenzumformungen $a < b$ vorausgesetzt. Man findet unter Ausnutzung von $a^2 + b^2 = c^2$:

$$\begin{aligned}
\frac{b(c - b)}{a} &< \frac{a(c - a)}{b} \\
0 &< \frac{a(c - a)}{b} - \frac{b(c - b)}{a} \\
0 &< \frac{a^2c - a^3 - b^2c + b^3}{ab} \\
0 &< (b^3 - a^3) + (a^2 - b^2)c \\
0 &< (b - a)(b^2 + a^2 + ab) - (b - a)(b + a)c \\
0 &< (b^2 + a^2) + ab - bc - ac \\
0 &< c^2 - ac - bc + ab \\
0 &< (c - b)(c - a)
\end{aligned}$$

und die letzte Ungleichung gilt wegen $b > a$, $c > b$, $c > a$. Damit ist $r_a < r_b$ bewiesen.

Nun zum Beweis von $r_b < r_c$, wieder mittels Äquivalenzumformungen unter Ausnutzung von $a^2 + b^2 = c^2$:

$$\begin{aligned}
\frac{a(c - a)}{b} &< \frac{ab}{a + b} \\
0 &< \frac{ab^2 - a(c - a)(a + b)}{(a + b)b} \\
0 &< b^2 - ac - bc + a^2 + ab \\
0 &< c^2 - ac - bc + ab \\
0 &< (c - a)(c - b)
\end{aligned}$$

und die letzte Ungleichung gilt wegen $c > a$, $c > b$. Damit ist auch $r_b < r_c$ bewiesen.

b) Da $r_a + r_b \geq 2r_a$, genügt es, $2r_a > r_c$ zu beweisen. Dabei ist zu beachten, dass $a + b > c$ im Dreieck ABC gilt.

$$\begin{aligned}
\frac{ab}{a+b} &< \frac{2b(c-b)}{a} \\
0 &< \frac{2b(c-b)}{a} - \frac{ab}{a+b} \\
0 &< \frac{2b(c-b)(a+b) - a^2 b}{a(a+b)} \\
0 &< 2(c-b)(a+b) - a^2 \\
0 &< 2ac + 2bc - 2ab - 2b^2 - a^2 \\
0 &< 2ac + 2bc - 2ab - b^2 - (b^2 + a^2) \\
0 &< 2ac - 2ab + 2bc - b^2 - c^2 \\
0 &< 2a(c-b) - (c-b)^2 \\
0 &< (2a - c + b)(c-b) \\
0 &< \big(a + (a + b - c)\big)(c-b)
\end{aligned}$$

und die letzte Ungleichung gilt wegen $c > a$, $a + b - c > 0$. Damit ist jetzt auch $r_c < r_a + r_b$ bewiesen.

c) Ersetzt man k_a, k_b, k_c durch r_a, r_b bzw. r_c und diese Radien dann durch ihre Darstellungen, dann ergibt eine sehr lange Rechnung (ausgeführt mittels DERIVE 5)

$$\begin{aligned}
&\Big(\frac{a}{b(c-b)} + \frac{b}{a(c-a)} - \frac{a+b}{ab}\Big)^2 - \Big(\frac{a}{b(c-b)} - \frac{b}{a(c-a)} + \frac{a+b}{ab}\Big)^2 - \Big(-\frac{a}{b(c-b)} + \frac{b}{a(c-a)} + \frac{a+b}{ab}\Big)^2 \\
&= \frac{(a^2 + b^2 - c^2) \cdot \big(4a^2 - 2a^3 b - a^2(2b^2 - 4bc + c^2) - a(2b^3 - 4b^2 c + 2bc^2) + b^4 - b^2 c^2\big)}{\big(ab(c-a)(c-b)\big)^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

und Letzteres gilt, da $a^2 + b^2 - c^2 = 0$. Damit ist auch Teil c) der Aufgabe bewiesen.

Lösung 121-63

Die gegebene Ungleichung ist äquivalent mit

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}\geq 0.$$

Die linke Seite kann umgeformt werden in

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-\frac{1+\frac{a}{b}}{1+\frac{c}{b}}-\frac{1+\frac{b}{c}}{1+\frac{a}{c}}-\frac{1+\frac{c}{a}}{1+\frac{b}{a}}.$$

Setzt man $x=\frac{a}{b}$, $y=\frac{b}{c}$ und $z=\frac{c}{a}$, so ist $xyz=1$, damit auch $\frac{1}{x}=yz$, $\frac{1}{y}=zx$, $\frac{1}{z}=xy$. Hiermit erhält man durch Multiplikation mit dem gemeinsamen Nenner nach längerer Rechnung

$$\begin{aligned}&\left(x+y+z-\frac{1+x}{1+zx}-\frac{1+y}{1+xy}-\frac{1+z}{1+yz}\right)(1+zx)(1+xy)(1+yz)\\ =&\Big(x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)\Big)+\Big((x^2z+y^2x+z^2y)-3\Big)\\ \geq&\ 0,\end{aligned}$$

letzteres weil erstens

$$2(x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx))=(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\geq 0,$$

zweitens nach der Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel unter Beachtung von $xyz=1$

$$(x^2z+y^2x+z^2y)\geq 3\cdot\sqrt[3]{x^2z\cdot y^2x\cdot z^2y}=3\cdot\sqrt[3]{(xyz)^3}=3.$$

Lösung 121-64

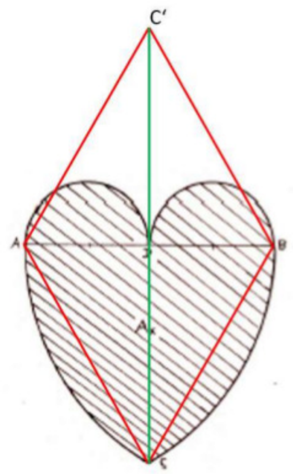
Ulrich Warnecke:

Die beiden über AB liegenden Halbkreise bilden zusammen einen Kreis mit dem Radius $\frac{1}{4a}$; der Flächeninhalt ist $\mathcal{A}_{\text{ob.Kreis}} = \frac{1}{16}\pi a^2$.

Verbindet man A und B jeweils mit C, dann hat der Kreissektor mit den Schenkeln AB und BC, wobei $|AB| = |BC| = a$, den Flächeninhalt $\mathcal{A}_{\text{Sektor}} = \frac{60}{360}\pi a^2 = \frac{1}{6}\pi a^2$. Den gleichen Flächeninhalt hat auch der Kreissektor mit den Schenkeln AB und AC. Der Durchschnitt der beiden Sektoren ist das gleichseitige (!) Dreieck ACB mit dem Flächeninhalt $\mathcal{A}_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,a^2$, das bei der Überlagerung der Sektoren doppelt gezählt wurde und daher nur einmal berücksichtigt werden darf. Der Flächeninhalt der gesamten Figur beträgt somit

$$\mathcal{A}_x = \mathcal{A}_{\text{ob.Kreis}} + 2\cdot\mathcal{A}_{\text{Sektor}} - \mathcal{A}_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{16}\pi a^2 + 2\cdot\frac{1}{6}\pi a^2 - \frac{1}{4}\sqrt{3}\,a^2 = \frac{1}{48}(19\pi - 12\sqrt{3})a^2 \approx 0,81a^2.$$

Ursel Willrett:



$\triangle ABC$ ist ein gleichschenkliges Dreieck. Die schraffierte Fläche mit den Eckpunkten ADC ist gleich der halben Fläche der Fläche über der Sehne CC' des Kreises um B mit Radius a, also gleich groß wie die schraffierte Fläche mit den Eckpunkten ABC. Die Fläche über der Sehne berechnet sich nach

$$A = \frac{a^2}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\pi - \sin 120°\right) = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{2}{3}\pi - \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2}{12}\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)$$

Dazu kommen noch die beiden Halbkreise, d.h. die Fläche eines Kreises mit Radius $a/4$:

$$A_K = \frac{a^2}{16}\pi$$

Die gesamte Fläche ist also

$$A_{gesamt} = \frac{a^2}{12}\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right) + \frac{a^2}{16}\pi = \frac{a^2}{4}\left(\frac{19}{12} - \sqrt{3}\right) \approx 0,81a^2$$