1 Vorschule

Lösung 122-11

Die richtige Reihenfolge ist

C: Samen aussähen

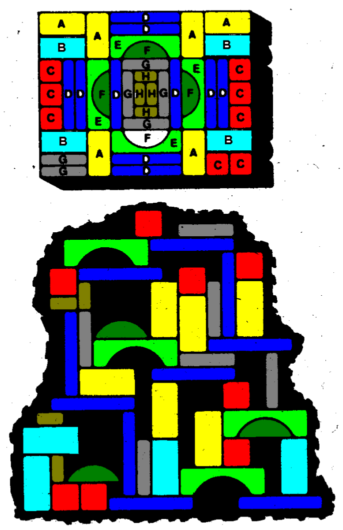
A: Samen mit Erde Bedecken

D: Erde andrücken

B: gießen

E: Pflanzen vereinzeln

Lösung 122-12



Ein Baustein F wurde nicht verwendet.

Lösung 122-13

40

Lösung 122-14

Die Sträucherreihe am Gartenzaun sieht so aus:

H B B H B B H B B H

Es sind also insgesamt 10 Sträucher. Zwischen den 10 Sträuchern sind 9 Lücken. In jeder Lücke wächst eine Rose.

Es wachsen 9 Rosen am Gartenzaun.

2 Klassen 1 und 2

Lösung 122-21

Der Bambus wächst von unten nach und schiebt daher die Kerbe jeden Tag 10 cm nach oben. Da sich an der Spitze des Bambus bewegliche Blätter befinden, die möglicherweise in einer anderen Geschwindigkeit wachsen als der Stamm, kann man die Wachstumsgeschwindigkeit mit Herrn Grüns Methode wesentlich genauer ermitteln, als täglich die Gesamtlänge der Pflanze zu messen.

Da sich die Kerbe am ersten Tag 10 cm über dem Boden befindet, ist sie 6 Tage später $10 + 60 = 70$ cm über dem Boden.

Lösung 122-22

Der Junge heißt ELMAR.

Lösung 122-23

a) Das kleinste Ergebnis ist 16: $1 + 3 + 5 + 7 = 16$

b) Das größte Ergebnis ist 28: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$

c) Es gibt für 19 nur eine Möglichkeit: 1-2-4-5-7

Lösung 122-24

a)

1	+	2	=	3
+		+		+
4	+	5	=	9
=		=		=
5	+	7	=	12

b)

4	+	2	=	6
+		−		+
7	−	1	=	6
=		=		=
11	+	1	=	12

c)

6	+	9	=	15
+		−		+
9	−	4	=	5
=		=		=
15	+	5	=	20

Lösung 122-25

PYRAMIDE

Lösung 122-26

Der Bus fährt nach Berlin, weil die Türen immer auf der dem Fahrer gegenüber liegenden Seite sind.

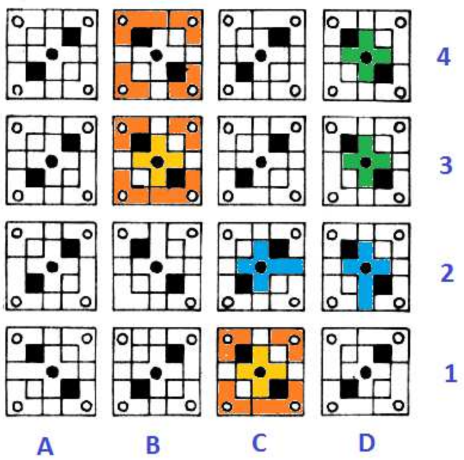
Lösung 122-27

Es sind 8 Gruppen.

Jede Gruppe erhält insgesamt 10 Spielsachen aus dem Einkauf: $6 + 4 = 10$. Da 80 Spielsachen gekauft wurden, beträgt die Anzahl der Gruppen $80 : 10 = 8$.

Lösung 122-28

Exakt das gleiche Muster haben B3 und C1 (gelb). Dreht man C2 im Uhrzeigersinn um 90°, so hat es das gleiche Muster wie D2 (blau). Dreht man D4 um 180°, so hat es das gleiche Muster wie D3 (grün). Dreht man B4 um 180°, so hat es das gleiche Muster wie B3 (orange).



3 Klassen 3 und 4

Lösung 122-31

Die Summe einer zweistelligen und einer dreistelligen Zahl kann nicht größer sein als 1100. Daher sind die erste und die letzte Ziffer der Summe gleich 1. Damit die Summe größer als 1000 wird, muss der dreistellige Summand größer als 900 sein. Daher sind die erste und die letzte Ziffer des dreistelligen Summanden gleich 9. Folglich muss der zweistellige Summand 22 sein. Anderenfalls könnte die Summe nicht mit 1 enden. Es ergibt sich der Übertrag 1, so dass die mittlere Ziffer des dreistelligen Summanden gleich 7 sein muss.

Die Gleichung lautet also

$$22 + 979 = 1001$$

Lösung 122-32

Es sind 12 verschiedene Rechtecke.

Lösung 122-33

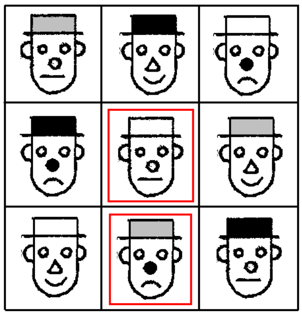
Am Bahnhof stiegen aus beiden Waggons zusammen 15 Menschen aus. $65 - 15 = 50$ Menschen blieben im Zug. In jedem Waggon waren nach dem Bahnhof je 25 Menschen. Also waren vor dem Bahnhof im ersten Waggon $25+3 = 28$ Menschen, im zweiten Waggon $25 + 12 = 37$ Menschen.

Lösung 122-34

Die Katze ist so stark wie 2 Mäuse, der Hund ist so stark wie $2 \cdot 2 = 4$ Mäuse, die Enkelin so stark wie $2 \cdot 4 = 8$ Mäuse, die Großmutter ist so stark wie $2 \cdot 8 = 16$ Mäuse und der Großvater so stark wie $2 \cdot 16 = 32$ Mäuse.

Zusammen sind sie also so stark wie $32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 63$ Mäuse.

Lösung 122-35



Jede Mund-, Hut- und Nasenform bzw. -farbe kommt dann in jeder Zeile und jeder Spalte genau einmal vor.

Lösung 122-36

(1) Sarah liest nicht Krabat (wegen (a))

(2) Lucy liest nicht Krabat (wegen (a) und (c))

(3) Also folgt **Anna liest Krabat**.

(4) Lucy liest nicht Eragon (wegen(b))

(5) Wegen (3) und (4) gilt **Lucy liest Harry Potter**.

(6) Wegen (3) und (5) folgt **Sarah liest Eragon**.

Lösung 122-37

$$\begin{array}{cccc} & 3 & \mathbf{8} & 9 \\ + & 5 & 6 & \mathbf{2} \\ \hline = & \mathbf{9} & 5 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & \mathbf{5} & 8 & 1 \\ - & 3 & \mathbf{9} & 5 \\ \hline = & 1 & 8 & \mathbf{6} \end{array}$$

Lösung 122-38

a) Für 50 km braucht das Kamel 12h 30 min. Wenn sie nur die Hälfte der Strecke laufen, sind sie ohne Pause 6h 15 min unterwegs.

b) An 3 aufeinanderfolgenden Tagen legt das Kamel jeweils 100 km zurück. Dafür läuft es insgesamt 25 h. Für 600km braucht es $6 \cdot 25$ h $= 150$ h.

4 Klassen 5 und 6

Lösung 122-41

Angenommen, Ali sammelte x Guaven. Dann samelte Mahmud $x + 8$ Guaven. Daher gilt

$$x + x + 8 = 2 \cdot x + 8 = 64$$

bzw.

$$\begin{aligned} 2 \cdot x &= 56 \\ x &= 28 \end{aligned}$$

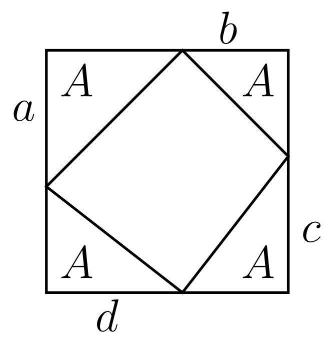
Ali sammelte 28 Guaven, Mahmud sammelte 36 Guaven. Das sind zusammen 64.

Lösung 122-42

Es bleibt 1 Knoten.

Lösung 122-43

Wir bezeichnen 4 der Katheten der rechtwinkligen Dreiecke mit a, b, c, d wie im Bild gezeigt. Das innere Viereck ist genau dann ein Quadrat, wenn $a = b = c = d$ gilt. In diesem Fall sind alle Dreiecke kongruent, haben also den gleichen Flächeninhalt.
Angenommen, es gilt wie in der Zeichnung $a > b$. Dann folgt aus der Gleichheit der Flächeninhalte der Dreiecke reihum $b > c > d > a$. Das ist aber ein Widerspruch. Folglich muss $a = b = c = d$ sein.



Lösung 122-44

Die Primfaktorzerlegung von 1111 ist $1111 = 11 * 101$. Folglich gibt es eine einzige Zahl, die den Bedingungen der Aufgabe genügt: es ist 11101.

Lösung 122-45

Man macht 6 Schnitte: $1, 23, 4, 5, 6, 7, 89$ und dreht anschließend den Zettel mit der 6, so dass eine 9 daraus wird.

Ergebnis: 7 paarweise teilerfremde Zahlen $1, 23, 4, 5, 9, 7, 89$. Die 23 und die 89 kann man nicht mehr schneiden, da es dann mehrere nicht mehr teilerfremde Zahlen gäbe.

Lösung 122-46

Fragevariante 1: Wenn ich ohne hinzusehen einen deiner Chips gegen einen roten austausche, wirst du dann mehr rote Chips als vorher haben?
Begründung: Antwortet Anton mit „ja“, so hat er selbst zwei weiße Chips, denn nach dem Tausch muss er auf jeden Fall mehr rote Chips haben als vorher. Antwortet er mit „nein“, so hat er selbst zwei rote Chips, denn der Tausch ändert nichts an der Anzahl seiner roten Chips. Antwortet Anton mit „Ich weiß nicht.“, so muss er zwei verschiedenfarbige Chips haben, denn er kann nicht wissen, ob ich den roten oder den weißen tauschen werde.

Fragevariante 2: Ist es richtig, dass Birger mehr rote Chips hat als du?
Begründung: Antwortet Anton mit „ja“, so hat er selbst zwei weiße Chips, denn jeder der beiden anderen Jungen hat dann mindestens einen roten Chip. Antwortet er mit „nein“, so hat er selbst zwei rote Chips. Antwortet Anton mit „Ich weiß nicht.“, so muss er zwei verschiedenfarbige Chips haben, denn Birger könnte dann zwei rote Chips haben.

Lösung 122-47

a) das erste. Es ist nicht in Halbe, sondern in Drittel unterteilt.

b) das letzte. Es ist in Achtel unterteilt.

Lösung 122-48

Das ist nicht möglich, weil wegen

$$\text{grüne} > \text{erste Sorte} > \text{gelbe} > \text{zweite Sorte} > \text{rote} > \text{dritte Sorte}$$

folgte

$$\text{grüne} + \text{gelbe} + \text{rote} > \text{erste Sorte} + \text{zweite Sorte} + \text{dritte Sorte}$$

Das ist ein Widerspruch, weil beide Summen gleich sein müssen.

5 Klassen 7 und 8

Lösung 122-51

Auf keinen Fall kann $a = 0$ oder $b = 0$ gelten, da der Term auf der linken Seite der Ungleichung im ersten Fall gleich 0, im zweiten Fall nicht definiert wäre. Es ist also $c = 0$ und die Ungleichung vereinfacht sich zu

$$\frac{a \cdot (-b)}{b} = -a > 0$$

Somit muss a negativ sein und b positiv.

Lösung 122-52

Es sind 6 Knoten.

Lösung 122-53

Es gilt

$$(n^2 + n + 1)(n - 1) = n^3 - 1$$

Angenommen, es existiert eine natürliche Zahl n, für die $n^2 + n + 1$ durch 9 teilbar ist.

Dann folgt $n^3 - 1$ muss durch 3 teilbar sein. Also lässt n bei Division durch 3 den Rest 1, $(n - 1)$ ist durch 3 und somit $(n - 1)^2$ durch 9 teilbar. Damit muss auch die Differenz von $n^2 + n + 1)$ und $(n - 1)^2$ durch 9 teilbar sein:

$$(n^2 + n + 1) - (n - 1)^2 = 3n$$

Daraus folgt aber, dass n durch 3 teilbar ist. Es müssten also sowohl n als auch $n - 1$ durch 3 teilbar sein. Das ist ein Widerspruch. Es gibt daher keine natürliche Zahl n für die $n^2 + n + 1$ durch 9 teilbar ist.

Lösung 122-54

Das muss ein Druckfehler sein.

Begründung: Die Endziffer jeder Potenz einer Zahl, die auf 1 endet, ist gleich 1. Daher endet $23021^{377} - 1$ auf 0 und ist keine Primzahl.

Tatsächlich gemeint ist die Zahl $2^{3021377} - 1$.

Lösung 122-55

Jeder ehrliche Einwohner antwortet genau einmal mit „Ja “, während jeder Lügner genau zweimal mit „Ja “antworten wird. Die Anzahl der „Ja “- Antworten ist daher gerade die Summe aus der Anzahl der ehrlichen Einwohner und der doppelten Anzahl der Lügner. Die Gesamtzahl der Lügner erhält man also als Differenz der Gesamtzahl der „Ja “-Antworten und der Einwohnerzahl: $130 - 100 = 30$.

30 Lügner leben auf der Insel.

Lösung 122-56

Beispiel: $2 \cdot (1+2+3+4+5) = 30$. Letzte Ziffer streichen ergibt 3.

Beweis: Es sei n der mittlere Summand. Dann lautet die Vorschrift

$$2 \cdot (n-2+n-1+n+n+1+n+2) = 2 \cdot 5n = 10n$$

Streicht man vom Zehnfachen einer Zahl die letzte Ziffer, dann erhält man dieselbe Zahl wieder. Das ist in diesem Fall die mittlere Zahl n, w.z.b.w.

6 Klassen 9 bis 13

Lösung 122-61

Wegen $a+b+c<1$ ist $\dfrac{1}{ab+c} < \dfrac{1}{ab+(a+b+c)c}$ (Entsprechendes gilt in den beiden weiteren Fällen). Unter Mitbenutzung der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel gilt daher:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{ab}{ab+c}} + \sqrt{\frac{ac}{ac+b}} + \sqrt{\frac{bc}{bc+a}} \\
&< \sqrt{\frac{ab}{ab+(a+b+c)c}} + \sqrt{\frac{ac}{ac+(a+b+c)b}} + \sqrt{\frac{bc}{bc+(a+b+c)a}} \\
&= \sqrt{\frac{ab}{(c+a)(c+b)}} + \sqrt{\frac{ac}{(b+a)(b+c)}} + \sqrt{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}} \\
&< \frac{1}{2}\left(\frac{a}{c+a} + \frac{b}{c+b}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b+a} + \frac{c}{b+c}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a+b} + \frac{c}{a+c}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{a}{c+a} + \frac{c}{a+c} + \frac{b}{c+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{b+a} + \frac{b}{a+b}\right) \\
&= \frac{1}{2}(\quad 1 \quad + \quad 1 \quad + \quad 1 \quad) \\
&= \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Lösung 122-62

Ulrich Warnecke:

Zunächst stellt man fest:

$$f\left(\frac{0}{n}\right) = \frac{4^0}{4^0+2} = \frac{1}{3} \quad \text{und} \quad f\left(\frac{n}{n}\right) = \frac{4^1}{4^1+2} = \frac{2}{3}, \quad \text{sodass} \quad f\left(\frac{0}{n}\right) + f\left(\frac{n}{n}\right) = 1.$$

Das führt auf die Frage, ob auch $f\left(\frac{k}{n}\right) + f\left(\frac{n-k}{n}\right) = 1$ für $0 \le k \le k_1$ mit noch zu bestimmendem k_1 gilt. Man findet:

$$f\left(\frac{k}{n}\right) + f\left(\frac{n-k}{n}\right) = \frac{\sqrt[n]{4^k}}{\sqrt[n]{4^k}+2} + \frac{\sqrt[n]{4^{n-k}}}{\sqrt[n]{4^{n-k}}+2} = \frac{4+2\left(\sqrt[n]{4^k}+\sqrt[n]{4^{n-k}}\right)+4}{4+2\left(\sqrt[n]{4^k}+\sqrt[n]{4^{n-k}}\right)+4} = 1$$

Falls n ungerade, so besteht S_n aus $n+1$ Summanden, die sich zu $\frac{n+1}{2}$ Paaren zusammenfassen lassen. In diesem Fall ist $k_1 = \frac{n-1}{2}$ und $n - k_1 = \frac{n+1}{2}$ und $S_n = \frac{n+1}{2} \cdot 1 = \frac{n+1}{2}$.
Falls n gerade, so besteht S_n ebenfalls aus $n+1$ Summanden, die sich jetzt zu $\frac{n}{2}$ Paaren zusammenfassen lassen, zu denen aber noch der „mittlere" Summand hinzukommt; denn jetzt ist $k_1 = \frac{n}{2} = n - k_1$ und somit $f\left(\frac{k_1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{2}$. Die Summe ist nun $S_n = \frac{n}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}$, also die gleiche wie im vorigen Fall.

Lösung 122-63

Ulrich Warnecke:

Da die acht schraffierten Flächenstücke alle den gleichen Inhalt haben, folgt, dass Kreis und Quadrat den gleichen Flächeninhalt haben, also

$$\pi r^2 = a^2 \;\Leftrightarrow\; r^2 = \frac{a}{\pi} \;\Leftrightarrow\; r = \frac{a}{\sqrt{\pi}},$$

d. h. für den Kreisdurchmesser $2r \approx 1,128 \cdot a$.

Lösung 122-64

Sei $k = 2^n$. Wir zerlegen $c_k = a^{2^n} - 1$ in Faktoren:

$$\begin{aligned} c_k &= (a^{2^n} - 1) \\ &= (a^{2^{n-1}} - 1)(a^{2^{n-1}} + 1) \\ &= (a-1)(a+1)(a^2+1)(a^4+1)\cdots(a^{2^{n-1}}+1) \end{aligned}$$

Das sind $(n+1)$ Faktoren, die für ungerades a alle gerade sind. Folglich ist c_k durch 2^{n+1} teilbar.

Damit ist für jedes $k = 2^n$ mit $n - 1 \geq m$ die Zahl $c_k = a^k - 1$ durch 2^m teilbar.