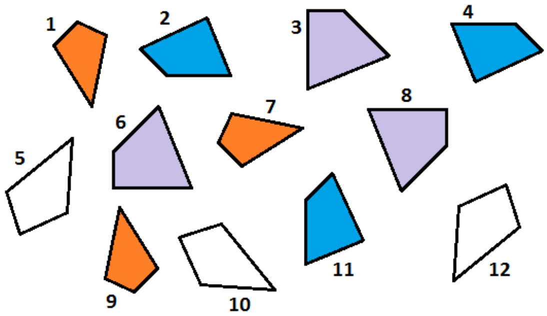
# 1 Vorschule

**Lösung 123-11**

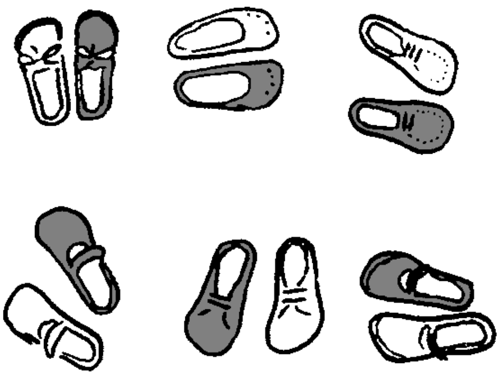
Robin und seine Großeltern wohnen auf der gleichen Seite des Flusses. Die erste Brücke führt Robin auf die andere Seite des Flusses, die zweite Brücke zurück auf seine Seite.

**Lösung 123-12**




1, 7, 9
2, 4, 11
3, 6, 8
5, 10, 12

**Lösung 123-13**



**Lösung 123-14**

Es sind zusammen $1+2+6=9$ Eichhörnchen. Jedes Eichhörnchen macht 2 Verstecke. Das sind insgesamt $9+9=18$ Verstecke.

# 2 Klassen 1 und 2

**Lösung 123-21**

Colin hat $17+8=25$ Pflaumen gepflückt. Nick hat $22+8=30$ Pflaumen gepflückt. Zusammen haben sie $25+30=55$ Pflaumen gepflückt.

**Lösung 123-22**

Wir schreiben in eine Tabelle die mögliche Anzahl Kätzchen:

| **links** | **Mitte** | **rechts** | **zusammen** |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 2 | 3 |
| 2 | 1 | 4 | 7 |
| 3 | x | 6 | $\geq 9$ |

Nur die Zeile, die mit 2 beginnt, gibt eine korrekte Verteilung der Kätzchen an.

Im linken Korb sitzen 2 Kätzchen, im mittleren Korb sitzt 1 Kätzchen, im rechten Korb sitzen 4 Kätzchen.

**Lösung 123-23**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 24 | + | 18 | − | **9** | + | 31 | = | **64** |
| − | | − | | + | | − | | − |
| **15** | + | 8 | + | **64** | − | 25 | = | 62 |
| + | | + | | − | | + | | + |
| 43 | + | **35** | − | 54 | − | 12 | = | **12** |
| − | | − | | − | | + | | + |
| **26** | + | 1 | − | 8 | + | **4** | = | 23 |
| = | | = | | = | | = | | = |
| 26 | + | **44** | − | 11 | − | 22 | = | 37 |

**Lösung 123-24**

**222**, 223, 225, **232**, 233, 235, **252**, 253, 255,
**322**, 323, 325, **332**, 333, 335, **352**, 353, 355,
**522**, 523, 525, **532**, 533, 535, **552**, 553, 555

Alle dreistelligen Zahlen mit Einerziffer 2 sind gerade. Das sind 9 Zahlen (die fettgedruckten)

**Lösung 123-25**

**Levi** BRETT, BIENE, FISCH ⇒ BRIEF

**Johannes** BALL, VIER, ENTE ⇒ BIENE

**Martin** KETTE, ARZT, ENTE ⇒ KERZEN

**Tede Johann** SONNENSTRAHL, MUND $\Rightarrow$ STRALSUND

**Elisabeth** HAND, NASE $\Rightarrow$ HASE

**Dorothea** HUND, FUß $\Rightarrow$ HUF

**Lösung 123-26**

Die Maste unterteilen die Liftstrecke in 4 Abschitte. Jeder ist $100 : 4 = 25$ Meter lang.

**Lösung 123-27**

Ein Fuchs kann 10 Jahre alt werden, ein Wolf 15.

**Lösung 123-28**

Maria, Klara, Laura, Susi, Sabine, Petra

## 3 Klassen 3 und 4

**Lösung 123-31**

**Teil a)**

Vor jeder Wendung schaut die weiße Seite des jeweils untersten Blattes nach unten und daher nach der Wendung des Stapels nach oben. Das gilt folglich auch für die weiße Seite des zuunterst liegenden Blattes, bevor der ganze Stapel gewendet wird.

Wenn das Wenden beendet ist, liegt eine weiße Seite oben.

**Teil b)**

Beim ersten Mal wir 1 Blatt gewendet, dann 2, dann 3, ..., dann 9, dann 10.

Summe aller Wendungen: $1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = 55$.

**Lösung 123-32**

In jede Zeile werden 4 Zahlen fortlaufend eingetragen, in den ungeraden Zeilen beginnend mit Spalte 2 von links nach rechts, in den geraden Zeilen beginnend mit Spalte 4 von rechts nach links. die Spalten 1 und 5 werden abwechselnd übersprungen.

Auf diese Weise stehen in den Spalten 1, 3 und 5 ausschließlich ungerade Zahlen, in Spalte 2 und Spalte 4 ausschließlich gerade Zahlen.

Da 100 gerade ist, steht sie entweder in Spalte 2 oder in Spalte 4. Die Zahlen in Spalte 2 folgen dem Muster $2 + 6 + 2 + 6 + 2 + \cdots = 2 + 8 + 8 + 8 + \cdots$, die Zahlen in Spalte 4 dem Muster $4 + 2 + 6 + 2 + 6 + 2 + \cdots = 4 + 8 + 8 + 8 + \cdots$.

Nun ist $100 - 2 = 98$, $100 - 4 = 96 = 12 \cdot 8$. Die 100 steht folglich in Spalte 4.

**Lösung 123-33**

$999 : 999 + 999 = 1000$

**Lösung 123-34**

| **Anzahl 15 ct** | **Anzahl 25 ct** | **Pfand gesamt** |
|---|---|---|
| 16 | 0 | 2,40 € |
| 15 | 1 | 2,50 € |
| ... | ... | ... |
| 10 | 6 | 3,00 € |
| 9 | 7 | 3,10 € |

Schrittweise erhöht sich der Gesamtpfand um jeweils 10 ct. Daher gibt es genau eine Lösung:

Hannah hatte 10 Pfandflaschen zu 15 ct und 6 zu 25 ct.

**Lösung 123-35**

| Klasse von | Aufgabe: | kg | Platz |
|---|---|---|---|
| Sara | 123 kg | 123 kg | 1. |
| Leonie | 100 kg + 2500 g | 102,5 kg | 2. |
| Lars | 98000 g | 98 kg | 3. |
| Julian | 114000 g − 25 kg | 89 kg | 4. |

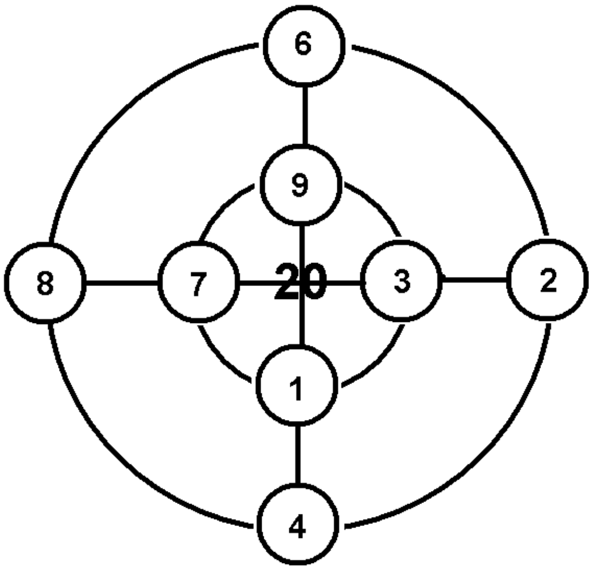
**Lösung 123-36**

**Stephanie Esser, 8 Jahre, Klasse 4:**

**a)** $500 + 110 + 790 + 500 + 90 = 1990$

**b)** $390 + 410 + 1000 + 40 + 160 = 2000$

**Lösung 123-37**




**Lösung 123-38**

1. Am häufigsten schreibt sie die 1, denn jede der Ziffern $1, \ldots, 9$ kommt in den Zahlen von 1 bis 99 genau 20 mal vor. Die Ziffer 1 schreibt Fabia daher 21 mal (die einundzwanzigste 1 steckt in der 100).

2. Die Ziffer 0 kommt am seltensten vor, nämlich genau 9 mal in den 9 Vielfachen von 10 und noch zwei mal in der 100 (macht zusammen 11)

3. $18 = 9 + 9 =$ Quersumme von 99.

4. genau eine.

5. $10 = 1 + 9 = 2 + 8 = 3 + 7 = 4 + 6 = 5 + 5$. Alle Zahlen mit Quersumme 10 sind dann alle Zahlen, die aus diesen Summanden gebildet werden können: $19, 91, 28, 82, 37, 73, 46, 64, 55$.

## 4 Klassen 5 und 6

**Lösung 123-41**

Alle natürlichen Zahlen, die bei Teilung durch 28 den Rest 5 lassen, haben die Form $28x + 5$, und die Zahlen, die bei Teilung durch 5 den Rest 4 lassen, haben die Form $5y + 4$. Daher macht man den Ansatz

$$28x + 5 = 5y + 4,$$

der auf die diophantische Gleichung

$$-28x + 5y = 1.$$

führt. Eine Lösung kann mittels des euklidischen Algorithmus gefunden werden:

$$\begin{array}{r|r|l}
28 = 5 \cdot 5 + 3 & 3 = 28 - 5 \cdot 5 & 1 = 28 - 5 \cdot 5 - 1 \cdot (5 - 1 \cdot (28 - 5 \cdot 5)) \\
5 = 1 \cdot 3 + 2 & 2 = 5 - 1 \cdot 3 & 1 = 28 - 5 \cdot 5 - 1 \cdot 5 + 28 - 5 \cdot 5 \\
3 = 1 \cdot 2 + 1 & 1 = 3 - 1 \cdot 2 & 1 = 2 \cdot 28 - 11 \cdot 5 \\
 & & 1 = (-2) \cdot (-28) + (-11) \cdot 5
\end{array}$$

sodass $(-2; -11)$ ein Lösungspaar ist. Die Lösungsgesamtheit ergibt sich aus

$$x = -2 + \frac{5}{\mathrm{ggT}(28; 5)} \cdot t \quad \text{und} \quad y = -11 - \frac{-28}{\mathrm{ggT}(28; 5)} \cdot t$$

für beliebiges $t \in \mathbb{Z}$.

Da die kleinste natürliche Zahl gesucht wird, die die genannten Bedingungen erfüllt, muss ein solches $t$ gewählt werden, für das $x, y \in \mathbb{N}$ und beide minimal sind; dieses $t$ ist 1 und damit $x = 3,\ y = 17$, und für diese Werte ergibt sich die gesuchte Zahl 89.

**Bemerkung**. Da nur endlich viele Zahlen bei der Suche in Betracht kommen, kann die gesuchte Zahl auch durch Probieren gefunden werden.

**Lösung 123-42**

Das Würfelnetz gehört zu Würfel 1c), aber nicht zu 1a) und nicht zu 1b).

**Lösung 123-43**

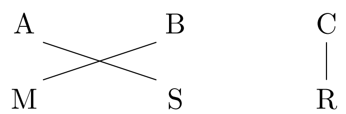
Zunächst folgt aus der Aufgabe, dass das Alter der Mutter plus zweimal die Quersumme des Alters der Mutter gleich 33 ist. Zahlen größer als 29 fallen heraus, da die Quersumme dann mindestes gleich 3 ist. Es gibt genau 2 Zahlen zwischen 10 und 29, die vermehrt um ihre doppelte Quersumme 33 ergeben: 17 und 23:

$$\begin{aligned} 17 + 16 &= 33 \\ 23 + 10 &= 33 \end{aligned}$$

Die Mutter könnte also 17 oder 23 Jahre alt sein. Das Alter 17 ist unwahrscheinlich, da der Sohn dann 8 Jahre alt sein müsste, sie also mit 9 Jahren Mutter geworden wäre. Folglich ist die Mutter 23, die älteste Tochter 3, die jüngere Tochter 2 und der Sohn 5 Jahre alt. (Trotzdem eine ziemlich junge Mutter)

**Lösung 123-44**

**Chiara Franz, Klasse 3**



$$\begin{aligned}
(1) \Rightarrow A &\neq R\\
(3),(4) \Rightarrow B &\neq R\\
\Rightarrow C &= R\\
(2),(5) \Rightarrow B &\neq S\\
\Rightarrow B &= M\\
\Rightarrow A &= S
\end{aligned}$$

Andreas Schmidt, Bernd Müller, Claus Reich.

**Lösung 123-45**

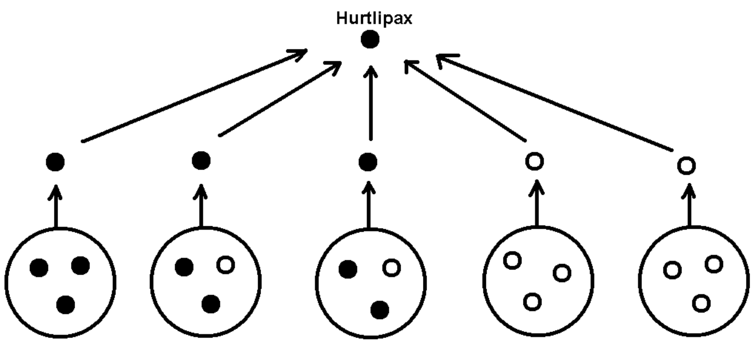
*a)* Zunächst ist klar, dass die Teepackung nicht weniger als 20 Teebeutel enthalten konnte. Anderenfalls hätte man höchstens $19 \cdot 3 = 57$ Tassen Tee trinken können. Ina trank aber 58 Tassen. Andererseits kann die Packung auch nicht mehr als 20 Teebeutel enthalten. Denn enthielte sie 21 Beutel, so hätte man mindestens $21 \cdot 2 = 42$ Tassen trinken müssen, um die Packung zu leeren. Natascha trank aber nur 41 Tassen. Damit ist klar, dass die Teepackung genau 20 Teebeutel enthielt.

*b)* Natascha kochte mit genau einem der Teebeutel 3 Tassen Tee, mit den übrigen 19 Beuteln je zwei Tassen: $19 \cdot 2 + 3 = 41$. Ina kochte mit genau 2 Teebeuteln je 2 Tassen Tee, mit den restlichen 18 Beuteln je 3 Tassen: $18 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 58$.

**Lösung 123-46**

Sollen die Gruppen gleich groß sein, kann Hurtlipax die Wähler in 5 Gruppen zu je 3 Menschen einteilen: In Gruppe 1 kommen 3 seiner Anhänger, in Gruppe 2 und 3 kommen 2 seiner Anhänger und je ein weiterer Anhänger der weißen Partei. Die beiden letzten Gruppen bestehen aus je 3 Anhängern der weißen Partei. Damit sind alle 15 Wahlberechtigten auf die Gruppen verteilt.

Im ersten Wahlgang gewinnt in den Gruppen 1 bis 3 der Anhänger der schwarzen Partei von Hurlipax, in den beiden anderen Gruppen ein Anhänger der weißen Partei. Im letzten Wahlgang wählen daher 3 Anhänger der schwarzen und 2 Anhänger der weißen Partei den neuen Dorfältesten:



**Lösung 123-47**

Diese Aufgabe löst man am einfachsten rückwärts. Da Conrad 4 Pflaumen aß und dies $\frac{1}{3}$ der Pflaumen war, die er vorfand, hatte Ben 12 Pflaumen zurückgelassen. Da er $\frac{1}{3}$ der Pflaumen gegessen hat, als er die Schüssel sah, hat er $\frac{2}{3}$ der Pflaumen zurückgelassen. Er hat also 6 gegessen und vorher waren 18 in der Schüssel. Anton hatte also 18 Pflaumen übrig gelassen. Das sind $\frac{2}{3}$ aller Pflaumen, die anfangs in der Schüssel waren.

Die Mutter hatte also 27 Pflaumen auf den Tisch gestellt.

*Probe:*

**a)** Anton aß 9 Pflaumen und ließ 18 übrig.

**b)** Ben aß 6 Pflaumen und ließ 12 übrig.

**c)** Conrad aß 4 Pflaumen und ließ 8 übrig.

**Lösung 123-48**

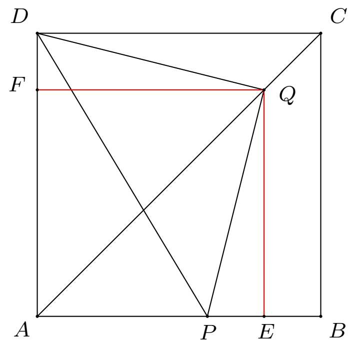
Durch systematisches Aufschreiben der möglichen Zahlen erkennt man schnell eine Regel: Für $a = 1$ sind $b = 0, c = 1$, $b = 1, c = 2$, $b = 2, c = 3$, $b = 3, c = 4$, ..., $b = 8, c = 9$, also 9 verschiedene Zahlen möglich. Bei $a = 2$ gibt es 8 verschiedene Zahlen, bei $a = 3$ sind es 7 usw. bis hin zu der einzigen Zahl 909 für $a = 9$. Das sind insgesamt also $1 + 2 + 3 + \ldots + 9 = 45$ verschiedene Zahlen.

## 5 Klassen 7 und 8

**Lösung 123-51**

**U. Warnecke:**

Man fälle die Lote von $Q$ auf die Seite $AB$ und auf die Seite $AD$; man erhält die Lotfußpunkte $E$ bzw. $F$, und es gilt $|EB| = |FD|$ und $|\angle AQE| = 45\,^\circ$.




Aus $|AQ| : |QC| = 4 : 1$ folgt nach dem 1. Strahlensatz, dass auch $|AE| : |EB| = 4 : 1$. Zusammen mit $|AP| : |PB| = 3 : 2$ folgt hieraus $|PE| = |EB|$.
Damit sind die Dreiecke $\triangle QPE$ und $\triangle QDF$ als kongruent erkannt.
Nun hat man wegen $|\angle PQE| = |\angle DQF| = \alpha$

$$\begin{aligned}
|\angle AQP| &= 45\,^\circ - \alpha \\
|\angle DQA| &= 45\,^\circ + \alpha \\
|\angle DQP| &= |\angle DQA| + |\angle AQP| = 90\,^\circ
\end{aligned}$$

Wegen der Kongruenz der Dreiecke $\triangle QPE$ und $\triangle QDF$ ist $|PQ| = |DQ|$, sodass das Dreieck $\triangle DPQ$ gleichschenklig ist und deshalb die Winkel bei $P$ und $D$ die gleiche Weite $45\,^\circ$ haben.

**Lösung 123-52**

**U. Warnecke:**

Mit $a$ bzw. $b$ seien die Anzahlen der Spielsteine der beiden Häufchen bezeichnet. Dann liefern die beiden Aussagen über die Häufchen die Ansatzgleichungen:

$$\begin{aligned} 2(a-100) &= b+100, \\ a+x &= 6(b-x). \end{aligned}$$

Auflösung der ersten Gleichung nach $b$ und Einsetzung in die zweite Gleichung liefert die diophantische Gleichung

$$11a - 7x = 1800.$$

Da 11 und 7 teilerfremd sind, löst man zunächst (durch Raten oder mittels euklidischem Algorithmus) die Gleichung

$$11a - 7x = 1.$$

Die hier für $a$ und $x$ kleinstmögliche Lösung (neben unendlich vielen weiteren) ist $a_0 = 2,\ x_0 = 3$. Nach Multiplikation mit 1800 ist

$$11 \cdot 3600 - 7 \cdot 5400 = 1800,$$

d. h. $a = 3600,\ x = 5400$ und damit $b = 6900$. Durch Probe bestätigt man jetzt auch das Erfülltsein der Ansatzgleichungen. 3600 und 6900 sind somit die kleinstmöglichen Zahlen von Steinen in beiden Häufchen.

**Lösung 123-53**

**U. Warnecke:**

Es ist $100 = 17 \cdot 7 + 2$; also könnte man die 100 Pilze wie folgt auf 7 Personen verteilen: $14; 14; 14; 14; 14; 15; 15$. Da jedoch keine zwei der Pilzsammler die gleiche Anzahl Pilze in ihrem Korb hatten, müsste eine andere Verteilung vorgenommen werden wie z. B. $11; 12; 13; 14; 15; 17; 18$. Dann aber wäre $14+15+17+18 = 54 > 51$. Wählt man deshalb kleinere als diese vier größeren Summanden, so vergrößert man dadurch die nicht verwendeten kleineren Zahlen $11; 12; 13$, und es kommt zum Widerspruch dazu, dass keine zwei der Pilzsammler die gleiche Anzahl Pilze in ihrem Korb hatten.

Ergebnis: Nicht in jedem Fall kann man von den Pilzsammlern beliebig vier so auswählen, dass die Gesamtzahl ihrer Pilze kleiner als 51 ist.

**Lösung 123-54**

**a)** auf demselben Breitenkreis wie Berlin.

**b)** weiter östlich als Berlin.

Das Flugzeug fliegt auf dem gleichen Meridian wie Berlin nach Süden, anschließend auf einem Breitenkreis nach Westen und danach wieder entlang eines Meridians nach Norden. Da die Strecke, die das Flugzeug nach Norden fliegt gleich derjenigen ist, die es nach Süden fliegt, landet es auf dem gleichen Breitenkreis wie Berlin.

Anders sieht es bei der Ost- West-Abweichung aus: fliegt man entlang eines südlicher gelegenen Breitenkreises 300 km nach Westen und anschließend entlang eines (parallelen) nördlicher gelegenen Breitenkreises nach Osten, landet man auf einem östlicher gelegenen Meridian.

**Lösung 123-55**

Allgemein kann man jede n-stellige natürliche Zahl in Dezimaldarstellung schreiben als

$$a_0 + a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + \ldots + a_n \cdot 10^n$$

mit ganzen Zahlen $n \geq 0$, $0 \leq a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \leq 9$ und $1 \leq a_n \leq 9$. Wir nehmen an, daß wir ein n-Tupel $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ mit $a_n = 1$ und $n \in N_0$ gefunden haben, das den Bedingungen der Aufgabe genügt. Dann muß für dieses gelten

$$\begin{aligned} 3 \cdot \Big(a_0 + a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + \ldots + a_n \cdot 10^n\Big) = \\ a_n + 10 \cdot \Big(a_0 + a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + \ldots + a_{n-1} \cdot 10^{n-1}\Big) \end{aligned}$$

Sortiert man in dieser Gleichung die Terme geeignet um und setzt $a_n = 1$, so gelangt man zu

$$3 \cdot 10^n - 1 = 7 \cdot \Big(a_0 + a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + \ldots + a_{n-1} \cdot 10^{n-1}\Big) \tag{1}$$

Da die kleinste Zahl gesucht ist, die Gleichung (1) erfüllt, muß man zunächst **die kleinste** natürliche Zahl n bestimmen, für die $3 \cdot 10^n - 1$ durch 7 teilbar ist. Das ist erstmals für $n = 5$ der Fall:

$$299999 = 7 \cdot 42857 \tag{2}$$

Vergleicht man die rechten Seiten von (2) und (1), so stellt man fest, daß 42857 gerade die Dezimaldarstellung der Zahl ist, die aus der gesuchten Zahl durch Streichen der 1 ganz vorn entsteht.

Damit ist die gesuchte Zahl gleich **142857** .

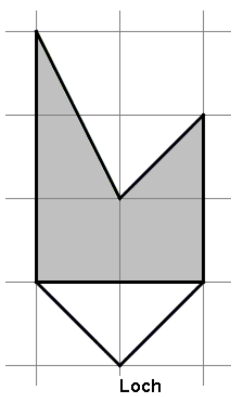
Man rechnet leicht nach, daß für diese Zahl gilt

$$3 \cdot 142857 = 428571$$

Sie erfüllt folglich alle Bedingungen der Aufgabe.

**Lösung 123-56**

Wenn man mit dem Rand der grauen Fahne das Loch „abfährt “, so überstreicht der Aufhängungspunkt der Fahne eine geschlossene Fläche, die mit der Fahne kongruent ist. Diese Fläche entsteht aus der Fahne durch Drehung um ihren Aufhängungspunkt um 180°. In jedem Punkt im Inneren oder auf dem Rand dieser (hier grau gezeichneten) Fläche kann die Fahne aufgehängt werden und wird das Loch, das sich im gezeichneten Punkt befindet, verdecken:



# 6 Klassen 9 bis 13

**Lösung 123-61**

**U. Warnecke:**

Die Summe aller natürlichen Zahlen kleiner oder gleich 1000 ist $\sum_{k=1}^{1000} k = \frac{1000 \cdot 1001}{2} = 500\,500.$

Die Anzahl der durch 5 teilbaren Zahlen in der Menge $\{1; 2; \ldots; 1000\}$ ist 200; die Summe dieser Zahlen ist

$$5 + 10 + 15 + \ldots + 1000 = 5 \cdot \sum_{k=1}^{200} k = 5 \cdot \frac{200 \cdot 201}{2} = 100\,500.$$

Die Anzahl der durch 7 teilbaren Zahlen in der Menge $\{1; 2; \ldots; 1000\}$ ist 142; die Summe dieser Zahlen ist

$$7 + 14 + 21 + \ldots + 994 = 7 \cdot \sum_{k=1}^{142} k = 7 \cdot \frac{142 \cdot 143}{2} = 71\,071.$$

Die Anzahl der durch 35 teilbaren Zahlen in der Menge $\{1; 2; \ldots; 1000\}$ ist 28; die Summe dieser Zahlen ist

$$35 + 70 + 105 + \ldots + 980 = 35 \cdot \sum_{k=1}^{28} k = 35 \cdot \frac{28 \cdot 29}{2} = 14\,210.$$

Hiermit berechnet man die Summe aller nicht durch 5 oder durch 7 teilbaren Zahlen keiner oder gleich 1000:

$$500\,500 - 100\,500 - 71\,071 + 14\,210 = 343\,139.$$

**Lösung 123-62**

**U. Warnecke:**

Als Menge der natürlichen Zahlen werde $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; \ldots\}$ zugrunde gelegt.

Die Gleichungskette in (2) liefert im Einzelnen folgende Bedingungen:

$$\begin{aligned} a + e &= b - e \\ a + e &= c \cdot e \\ a + e &= \frac{d}{e} \\ b - e &= c \cdot e \\ b - e &= \frac{d}{e} \\ c \cdot e &= \frac{d}{e} \end{aligned} \qquad \text{folglich:} \qquad \boxed{\begin{aligned} a &= (c-1) \cdot e \\ b &= (c+1) \cdot e \\ c &= c \\ d &= c \cdot e^2 \end{aligned}}$$

In jedem Fall muss $e \geq 1$ sein. Das hat $c \geq 1$ und damit $a \geq 0,\ b \geq 2$ und $d \geq 1$ zur Folge.

**U. Willrett:**

Aus (2):

$$c \cdot e = \frac{d}{e} \quad , \quad d = c \cdot e^2 \tag{3}$$

$$b - e = c \cdot e \cdot e \quad , \quad b = e(c+1) \tag{4}$$

$$a + e = b - e \quad , \quad a = e(c+1) - 2e = e(c-1) \tag{5}$$

(3), (4) und (5) in (1):

$$n = a + b + c + d = c(2e + 1 + e^2) = c(e + 1)^2$$

Dann ist $c > 1$ wegen (5), sonst wäre $a = 0$ und $e + 1 > 1$.

Damit hat $n$ die Form $n = A^2 \cdot B$ mit $A = (e + 1)$ und $B = c$.

Die Anzahl der Lösungen ist gleich der Anzahl der Darstellungen von $n$ in der Form $n = A^2 \cdot B$ oder gleich der Anzahl der möglichen Quadratzahlen, die sich aus den Primfaktoren von $n$ bestimmen lassen.

**Lösung 123-63**

**U. Warnecke:**

Als Menge der natürlichen Zahlen werde $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$ zugrunde gelegt.

1.) Falls $x = 0$, so wird die gegebene Ungleichung gelöst durch $\{(0; y) \mid y \in \mathbb{N}\}$.
2.) Falls $x = 1$, so wird die gegebene Ungleichung gelöst durch $\{(1; y) \mid y \in \mathbb{N}\}$.
3.) Falls $x \geq 2$, so kann man die gegebene Ungleichung umformen („Trennung der Variablen“):

$$2x + y \geq xy \quad \Leftrightarrow \quad y \leq 2 + \frac{2}{x - 1}.$$

Für $x = 2$ erhält man als Lösungspaare: $(2; 0), (2; 1), (2; 2), (2; 3), (2; 4)$.
Für $x = 3$ erhält man als Lösungspaare: $(3; 0), (3; 1), (3; 2), (3; 3)$.
Für $x \geq 4$ erhält man als Lösungspaare: $(x; 0), (x; 1), (x; 2)$.

Damit sind sämtliche Lösungspaare gefunden.

**Lösung 123-64**

**U. Willrett:**

Die Behauptung kann man verallgemeinern:

Man beweise, dass für jedes $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

$$(10^{n-1} + 10^{n-2} + \cdots + 10 + 1) \cdot (10^n + 5) + 1$$

gleich dem Quadrat einer natürlichen Zahl ist.

*Beweis:*

Es ist (geometrische Reihe)

$$(10^{n-1} + 10^{n-2} + \cdots + 10 + 1) = \frac{10^n - 1}{10 - 1}$$

$$(10^{n-1} + 10^{n-2} + \cdots + 10 + 1) \cdot (10^n + 5) + 1 = \frac{10^n - 1}{9}(10^n + 5) + 1$$

$$= \frac{1}{9}\left(10^{2n} + 4 \cdot 10^n - 5 + 9\right) = \frac{1}{9}\left(10^n + 2\right)^2$$

Also

$$(10^{n-1} + 10^{n-2} + \cdots + 10 + 1) \cdot (10^n + 5) + 1 = \left(\frac{10^n + 2}{3}\right)^2$$

und das ist das Quadrat einer natürlichen Zahl, da $10^n + 2$ für alle natürlichen Zahlen $n$ durch 3 teilbar ist, also auch für alle $n \geq 2$.