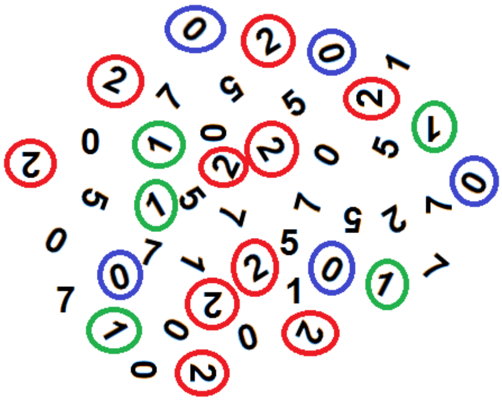
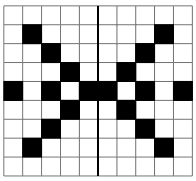
1 Vorschule

Lösung 124-11

Marie kann 5 Mal die Zahl 2021 legen:



Lösung 124-12



Lösung 124-13

Hier ist eine mögliche Lösung:

a) Teller, denn alles andere sind Gegenstände, die man normalerweise im Bad findet.

b) Erdbeere, denn alles andere ist Steinobst.

c) 9, denn alles andere sind Buchstaben.

d) 24, denn alles andere sind einstellige Zahlen.

e) Bausteine, denn alle anderen Dinge sind Fortbewegungsmittel.

f) KARL, denn alle anderen Namen sind von links und von rechts gelesen gleich.

Lösung 124-14

Bild 2 stimmt mit dem Original überein.

2 Klassen 1 und 2

Lösung 124-21

Man gießt den Inhalt des mittleren mit Saft gefüllten Glases in das mittlere leere Glas- also den Inhalt des zweiten von links in das fünfte von links.

Lösung 124-22

Der 1. Dezember ist ein Freitag, denn der 31. Dezember muss ein Sonntag sein.

Lösung 124-23

Die Kinder basteln zusammen $46 - 4 = 42$ Sterne. Es sind also 21 Kinder, denn $21 + 21 = 42$.

Lösung 124-24

Um die Geheimzahl zu erhalten, kann man alle Rechnungen beginnend mit der letzten umkehren. Man kann also so rechnen:

$\boxed{2} \longrightarrow \boxed{\cdot 7} \longrightarrow \boxed{+6} \longrightarrow \boxed{:4} \longrightarrow \boxed{\cdot 3} \longrightarrow \boxed{-5}$

Als Ergebnis erhalten wir 10.

Die Geheimzahl war 10.

Lösung 124-25

Es ist etwas schwer zu erkennen: C, D oder E sind es definitiv nicht. A oder B werden beide als richtig gewertet.

Lösung 124-26

1 Stunde und 20 Minuten sind auch 80 Minuten.

Lösung 124-27

30: Im Dach steht die Summe der 4 Zahlen, also $12 + 8 + 3 + 7 = 30$.

Lösung 124-28

Sohn	**Mutter**	**Vater**	**Tochter**
links			rechts

3 Klassen 3 und 4

Lösung 124-31

Teil a)

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	3
3	3	3	3	3	3	3	3	4	5
4	4	4	4	4	4	4	5	6	7
5	5	5	5	5	5	6	7	8	9
6	6	6	6	6	7	8	9	10	11
7	7	7	7	8	9	10	11	12	13
8	8	8	9	10	11	12	13	14	15
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

Teil b) Spaltenweise Addition der Zahlen von oben nach unten bis zur Diagonale (einschließlich):

Spalte 1: $1 + 2 + \cdots + 10 = 55$
Spalte 2: $1 + 2 + \cdots + 9 = 45$
Spalte 3: $1 + 2 + \cdots + 8 = 36$
Spalte 4: $1 + 2 + \cdots + 7 = 28$
Spalte 5: $1 + 2 + \cdots + 6 = 21$
Spalte 6: $1 + 2 + \cdots + 5 = 15$
Spalte 7: $1 + 2 + 3 + 4 = 10$
Spalte 8: $1 + 2 + 3 = 6$
Spalte 9: $1 + 2 = 3$
Spalte 10: 1

Nun kann man immer 2 Spaltensummen zusammenfassen und bemerkt, dass sich eine Folge von Quadratzahlen der geraden Zahlen bis 10 ergibt:

Spalte 1 + Spalte 2 = 100
Spalte 3 + Spalte 4 = 64

$$\ldots$$

Spalte 9 + Spalte 10 = 4

Das ist insgesamt $100 + 64 + 36 + 16 + 4 = 220$.

Nun fehlt noch die Summe aller Zeilenzahlen beginnend ein Feld neben der Diagonalen nach rechts.

Zeile 2: $3 = 1 \cdot 3$
Zeile 3: $4 + 5 = 9 = 3 \cdot 3$
Zeile 4: $5 + 6 + 7 = 18 = 6 \cdot 3$
Zeile 5: $6 + 7 + 8 + 9 = 30 = 10 \cdot 3$

Man stellt fest, dass der eine Faktor stets 3 ist, der zweite Faktor die Folge $1, 3, 6, 10, 15, ...$ der Dreieckszahlen bildet, die bereits bei der Spaltensumme weiter oben auftraten. Also kann man zusammenfassen:

$$\begin{aligned} & 3 \cdot (1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36 + 45) \\ = \quad & 3 \cdot (1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36 + 45 + 55 - 55) \\ = \quad & 3 \cdot (220 - 55) \\ = \quad & 495 \end{aligned}$$

In Zeile 2 haben wir ausgenutzt, dass wir die Summe $1 + 3 + \cdots + 36 + 45 + 55$ für die Spaltensummen bereits berechnet hatten und dort zu dem Ergebnis 220 kamen. Da hier eine 55 zu viel ist, müssen wir sie wieder subtrahieren.

Die Summe beträgt $220 + 495 = 715$.

Lösung 124-32

Erster Term:

$$(35 - 20) + (18 - 9) = 15 + 9 = 24$$

Zweiter Term:

$$(35 + 20) - (18 + 9) = 55 - 27 = 28$$

Der zweite Term ist größer.

Lösung 124-33

Magdalena Wi., 8 Jahre, Klasse 3:

Es sind 76 Gewinnstellungen.

Begründung: Es sind 10 Gewinnstellungen in einer Ebene, also 40 übereinander, 16 senkrechte, 4 Raumdiagonalen und 16 „senkrechte“ Diagonalen. Das sind insgesamt $40 + 6 + 4 + 16 = 76$ Gewinnstellungen.

Prisca Ha. 8 Jahre, Klasse 3:

Antwort: Es gibt 76 Gewinnstellungen.

Lösung: In der Draufsicht gibt es 10 Viererreihen (4 von vorne nach hinten, 4 von links nach rechts, 2 von Ecke zu Ecke). Das muss man mit 4 mal nehmen, da auf jeden Stab 4 Steine passen. Also gibt es 40 waagerechte Viererreihen.

In der Vordersicht sieht man: Die senkrechten Viererreihen sitzen nur auf einem Stab. Davon gibt es 16. Jetzt fehlen die diagonalen Reihen. Es gibt 4 Reihen, die schräg von einer Ecke unten zu der Ecke oben gegenüber laufen.

Dann gibt es aber noch andere diagonale Reihen, die innerhalb einer Stabreihe liegen. Für jede Stabreihe gibt es 2. Weil es 8 Stabreihen gibt müssen es 16 von solchen Reihen sein.

Insgesamt: 40 + 16 + 4 + 16 = 76

Lösung 124-34

	Bruder 1	Bruder 2	Bruder 3
Ziegen mit 1 Zicklein	2	4	4
Ziegen mit 2 Zicklein	6	2	2
Ziegen mit 3 Zicklein	2	4	4
Anzahl Ziegen	10	10	10
Anzahl Zicklein	$2 + 6 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 20$	$4 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 20$	$4 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 20$

Lösung 124-35

$8\text{cm} \cdot 11\text{cm} = 88\text{cm}^2, 88 \cdot 20 = 1760$

Maria braucht 1760 Farbtropfen für das ganze Bild.

Lösung 124-36

Für die Antworten habe ich

$$2 \cdot 15 = 30$$

Punkte bekommen. Vorher hatte ich

$$6175 - 30 = 6145$$

Punkte.

Lösung 124-37

Heinrich He., 8 Jahre, Klasse 4:

2er-Kinder	Muffins	Muffins	1er-Kinder
1	$2 \neq 1$	1	1
2	$4 \neq 2$	2	2
0	0	0	0

Es war eine Geburtstagsfeier ohne Kinder. Es gab maximal 10 Muffins.

Lösung 124-38

In der Mitte steht die 2. Man muss gar nicht alle Zahlen eintragen, sondern sieht das so:

In der Ecke unten links darf die 1, die 2, die 3 und die 4 nicht stehen. Dort muss also die 5 stehen. Daher darf im grauen Kästchen die 1, die 3, die 4 und die 5 nicht stehen. Dort steht kann also nur die 2 stehen.

4 Klassen 5 und 6

Lösung 124-41

Beim linken Quadrat ergeben die abgeschnittenen Dreiecke zusammen ein Rechteck der Länge 12 cm und der Breite 5 cm. Es werden also 60 cm ^{2} abgeschnitten.

Beim rechten Quadrat ergeben die abgeschnittene Dreiecke zusammen ein Quadrat der Seitenlänge 8 cm. Es werden also $8 \cdot 8$ cm $^2 = 64$ cm ^{2} abgeschnitten.

Daher ist die graue Fläche links 4 cm ^{2} größer als die graue Fläche rechts.

Lösung 124-42

Es sei x Peters Alter in ganzen Jahren. Dann beträgt Hannis Alter $x + 10$ Jahre, das Alter der Mutter $3 \cdot x + 30$ und das Alter des Vaters $3 \cdot x + 30 + 2$.

$$\begin{aligned} x + x + 10 + 3 \cdot (x + 30) + 3 \cdot (x + 30) + 2 &= 120 \\ 8 \cdot x + 72 &= 120 \\ 8 \cdot x &= 48 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Das Alter der Familienmitglieder lautet also Peter 6, Hanni 16, Mutter 48, Vater 50. Die Summe der Lebensalter beträgt tatsächlich 120 Jahre.

Lösung 124-43

In einem Monat kann es höchstens 5 Sonntage geben. Wenn 3 davon gerade sind, muss der 2. des Monats ein Sonntag sein. Der 4. des Monats kann kein Sonntag sein, weil es sonst einen Sonntag mit Datum 32 geben müsste. Wenn der 2. des Monats ein Sonntag ist, dann ist der 23. des Monats ebenfalls ein Sonntag, der 27. folglich ein Donnerstag.

Lösung 124-44

Der Minutezeiger wandert in einer Minute um 1/60 eines vollen Kreisumfangs weiter, der Stundenzeiger um $\frac{1}{12 \cdot 60}$. Der Minutenzeiger eilt nach 12 Uhr dem Stundenzeiger folglich um den

$$\frac{1}{60} - \frac{1}{12 \cdot 60} = \frac{11}{720}$$

Teil eines vollen Kreisumfangs voraus. Die Zeiger stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn der Winkel zwischen ihnen 1/4 des vollen Kreises beträgt. Dies geschieht nach

$$\frac{1}{4} : \frac{11}{720} = \frac{180}{11} = 16\frac{4}{11}$$

Minuten bzw. um 12 Uhr, 16 Minuten und $21\frac{9}{11}$ Sekunden.

Lösung 124-45

Aron Szedö, Klasse 4

Die Summe kann nicht 99 ergeben, weil es immer 10 gerade und 10 ungerade Zahlen gibt. Die Summe von 10 geraden Zahle ist gerade und die Summe von 10 ungeraden Zahlen wird gerade. So kann das Ergebnis nicht ungerade sein, also nicht 99.

Musterlösung: Angenommen, die Teller seien im Uhrzeigersinn durchnummeriert. Legt man auf Teller 1 eine ungerade Anzahl Plätzchen, dann liegt auf Teller 2 eine gerade Anzahl, auf Teller 3 wieder eine ungerade Anzahl usw. bis auf Teller 19 schließlich eine ungerade Anzahl plätzchen liegt. Auf 10 Tellern liegt jetzt eine gerade Anzahl Plätzchen, auf 10 Tellern eine ungerade Anzahl. Die Summe ist auf jeden Fall gerade. Das gilt auch, wenn man zunächst auf Teller 1 eine gerade Anzahl Plätzchen legt. Bei keiner Verteilung der Plätzchen, die den Bedingungen der Aufgabe genügt, kann die Gesamtzahl der Plätzchen ungerade sein, also auch nicht 99.

Lösung 124-46

Ersetzt man $a \cdot b$ in der ersten Gleichung durch 10 (wegen $a \cdot b = 10$), so erhält man $10 \cdot c = 70$. Also muss $c = 7$ sein. Die zweite Gleichung ergibt dann $a \cdot 7 = 14$, also $a = 2$. Damit erhält man $b = 5$.

Lösung ist $a = 2, b = 5, c = 7$.

Lösung 124-47

Im Aquarium sind $8 \cdot 2,5 \cdot 0,7 = 14$ Liter weniger Wasser als vorher. Also müssen 20 Liter Wasser entfernt worden sein. Daher fasst eine Kanne 4 Liter Wasser.

Lösung 124-48

Das äußere Rechteck hat einen Flächeninhalt von

$$130 \cdot 70 = 9100$$

Das innere Rechteck hat einen Flächeninhalt von

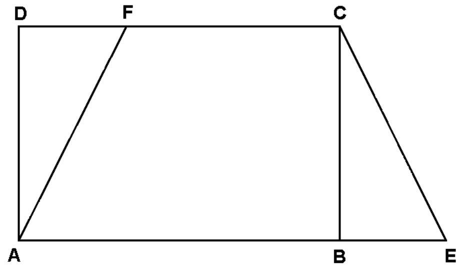
$$80 \cdot 30 = 2400$$

Das schraffierte Flächenstück hat folglich den Flächeninhalt

$$9100 - 2400 = 6700$$

5 Klassen 7 und 8

Lösung 124-51



Behauptung: Es gilt $\Delta AFD \cong \Delta BEC$

Beweis: Da $AECF$ gleichschenklig ist, gilt

$$\mid AF \mid = \mid EC \mid \tag{1}$$

und $\mid \angle FAB \mid = \mid \angle BEC \mid$. Wegen $\overline{AE} \parallel \overline{DC}$ sind die Winkel $\angle AFD$ und $\angle FAB$ als Wechselwinkel an parallelen Geraden kongruent. Daher gilt $\mid \angle AFD \mid = \mid \angle BEC \mid$. Aus Innenwinkelsatz in ΔAFD und ΔBEC und (1) folgt die Richtigkeit der Behauptung.

Die behauptete Flächengleichheit von Rechteck $ABCD$ und Trapez $AECF$ folgt unmittelbar aus der soeben bewiesenen Behauptung.

Lösung 124-52

Die Fläche $\frac{1}{4}A_W$ eines weißen Teils (das weggeschnitten wird) ist gleich der Differenz der halben Quadratfläche A_Q und eines Achtelkreises $\frac{1}{8}A_K$ mit Radius der Länge einer Quadratseite:

$$\frac{1}{4}A_W = \frac{1}{2}A_Q - \frac{1}{8}A_K$$

Sei a die Kantenlänge des Quadrats, dann gilt für die insgesamt abgeschnittene Fläche

$$\begin{aligned} A_W &= 2A_Q - \frac{1}{2}A_K \\ &= 2a^2 - \frac{\pi}{2}a^2 \\ &= \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)a^2 \end{aligned}$$

Die Mädchen schneiden folglich $\left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \cdot 100\%$ der Quadratfläche ab. Es bleiben $\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \cdot 100\% \approx 57,08\%$ übrig.

Lösung 124-53

Die Dreiecke $\triangle AFD$ und $\triangle ECD$ sind nach Kongruenzsatz sws kongruent. Daher gilt

$$\begin{aligned} \mid \angle DEC \mid &= \mid \angle AFD \mid \\ \mid \angle DAF \mid &= \mid \angle CDE \mid \end{aligned}$$

Außerdem gilt nach Innenwinkelsatz im rechtwinkligen Dreieck $\triangle AFD$:

$$\mid \angle DAF \mid + \mid \angle AFD \mid = 90°$$

Also gilt auch

$$\mid \angle CDE \mid + \mid \angle AFD \mid = 90°$$

Dann muss aber nach Innenwinkelsatz im Dreieck $\triangle FDM$ gelten

$$\mid \angle DMF \mid = 108° - (\mid \angle CDE \mid + \mid \angle AFD \mid) = 90°$$

Die Strecken ED und AF schneiden einander tatsächlich in einem rechten Winkel.

Lösung 124-54

Es seien $a > 0$, $b > 0$ und $c > 0$ die Maßzahlen des Volumens des ersten, zweiten bzw. dritten Behälters in Litern. Dann gilt nach Voraussetzung

$$\begin{aligned} a + b + c &= 170 \\ a - b - c &= 10 \\ b &= a - \frac{2}{9}a \end{aligned}$$

Addition der beiden ersten Gleichungen ergibt $a = 90$, woraus mit der dritten Gleichung $b = 70$ folgt. Für c muss dann $c = 170 - 160 = 10$ gelten.

Der erste Behälter fasst also 90 Liter, der zweite 70 Liter und der dritte 10 Liter.

Lösung 124-55

$$(2x+3) \cdot \left(\boxed{}_1 + \boxed{}_2 \right) = 2x^2 + 11x + \boxed{}_3$$

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Kästchen durch Terme zu ersetzen. Wählen wir beispielsweise

$$\begin{aligned} \boxed{}_1 &= bx^2 \\ \boxed{}_2 &= c \\ \boxed{}_3 &= ax^3 + d \end{aligned}$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dann erhalten wir für die linke Seite

$$2bx^3 + 2cx + 3bx^2 + 3c$$

und für die rechte Seite

$$2x^2 + 11x + ax^3 + d$$

Dies kann zu einer allgemeingültigen Gleichung in x gemacht werden, indem man $b = \frac{2}{3}$,$a = 2b = \frac{4}{3}$, $c = \frac{11}{2}$ und $d = \frac{33}{2}$ wählt, worauf man durch Koeffizientenvergleich kommt. Es gilt nämlich

$$(2x+3)\left(\frac{2}{3}x + \frac{11}{2}\right) = 2x^2 + 11x + \frac{4}{3}x^3 + \frac{33}{2} = x \cdot (2x+11) + \frac{4}{3}x^3 + \frac{33}{2}$$

Lösung 124-56

Julius Geburtsstadt heißt ERLANGEN. Wir bauen die zweite Tabelle spaltenweise auf. In jeder Spalte taucht jeder Buchstabe so oft auf, wie er im Namen der Stadt vorkommt. Ferner wissen wir, dass die Worte alphabetisch sortiert wurden. Daher sind erste und letzte Spalte klar:

A							L
E							G
E							N
G							N
L							R
N							E
N							A
R							E

Da die Buchstaben zyklisch vertauscht wurden, liest man daraus ab, dass folgende Reihenfolgen für die ersten und zweiten Buchstaben gelten: LA, GE, NE, NG, RL, EN, AN und ER, wobei wegen der alphabetischen Sortierung die Reihenfolge der zweiten Buchstaben nach zwei gleichen ersten Buchstaben klar ist:

A	N						L
E	N						G
E	R						N
G	E						N
L	A						R
N	E						E
N	G						A
R	L						E

Nun kann man sich wegen des Weiterrutschens zu den folgenden Buchstaben hangeln und endet bei:

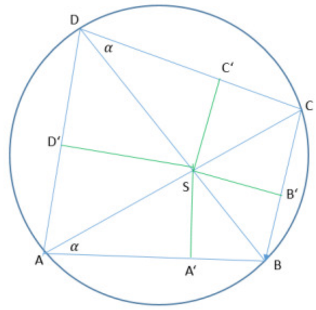
A	N	G	E	N	E	R	L
E	N	E	R	L	A	N	G
$\boxed{\text{E}}$	$\boxed{\text{R}}$	$\boxed{\text{L}}$	$\boxed{\text{A}}$	$\boxed{\text{N}}$	$\boxed{\text{G}}$	$\boxed{\text{E}}$	$\boxed{\text{N}}$
G	E	N	E	R	L	A	N
L	A	N	G	E	N	E	R
N	E	R	L	A	N	G	E
N	G	E	N	E	R	L	A
R	L	A	N	G	E	N	E

6 Klassen 9 bis 13

Lösung 124-61

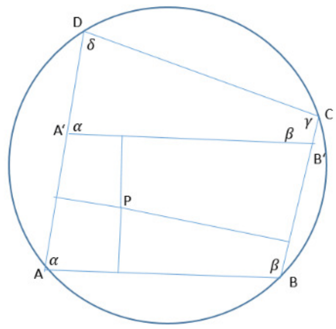
Ursel Willrett:

Zerlegung in 4 Sehnenvierecke



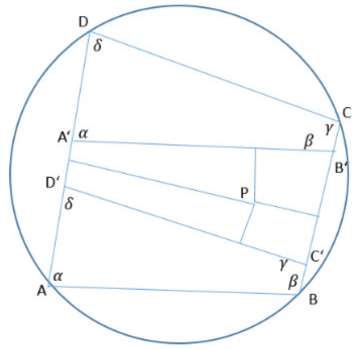
Zeichnet man die Lote vom Diagonalenschnittpunkt auf die 4 Seiten eines Sehnenvierecks, so entstehen 4 Vierecke. In jedem der Vierecke ist die Summe zweier Gegenwinkel $2 \cdot 90° = 180°$, d.h. alle vier Vierecke sind Sehnenvierecke. Ausgehend von der Zerlegung in 4 Sehnenvierecke (s. Zeichnung) kann man nun der Reihe nach jedes der 4 Vierecke seinerseits mit Hilfe des jeweiligen Diagonalenschnittpunkts entsprechend zerlegen. Würde man z.B. das Viereck $SC'DD'$ zerlegen, hätte man insgesamt 7 Sehnenvierecke. Mit diesem Verfahren können $4, 7, 10, \ldots$ Sehnenvierecke entstehen, allgemein $3n + 1 (n \in \mathbb{N})$.

Zerlegung in 5 Sehnenvierecke



Das Sehnenviereck $ABCD$ hat die Winkel $\alpha + \gamma = 180°$ und $\beta + \delta = 180°$. Im ersten Schritt wird eine Parallele zu AB gezeichnet. Das Viereck $A'B'CD$ hat die gleichen Winkel wie das Viereck $ABCD$ mit $\alpha + \gamma = 180°$ und $\beta + \delta = 180°$, d.h. es ist auch ein Sehnenviereck. Das Viereck $ABB'A'$ ist kein Sehnenviereck. Im Inneren wird ein Punkt P bestimmt, von dem aus auf alle 4 Seiten das Lot gefällt wird. Dadurch wird das Viereck $ABB'A'$ in 4 Vierecke zerlegt mit jeweils 2 gegenüberliegenden Winkel zu je $90°$, d.h. die Summe zweier Gegenwinkel ist $180°$ und die 4 Vierecke sind alle Sehnenvierecke. Zerlegt man diese 5 Sehnenvierecke nun weiter (wie bei der Zerlegung in $4, 7, 10, \ldots$ Sehnenvierecke), erhält man auch Zerlegungen in $8, 11, 14, \ldots$, allgemein $3n + 2$ Sehnenvierecke.

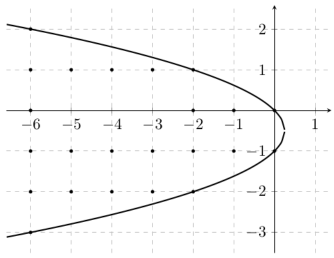
Zerlegung in 6 Sehnenvierecke



Das Sehnenviereck $ABCD$ hat die Winkel $\alpha + \gamma = 180°$ und $\beta + \delta = 180°$. Nun werden zwei Parallelen gezeichnet: zu AB und zu CD. Die Vierecke $A'B'CD$ und $ABC'D'$ haben die gleichen Winkel wie das Viereck $ABCD$ mit $\alpha + \gamma = 180°$ und $\beta + \delta = 180°$, d.h. sie sind beide auch Sehnenvierecke. Das Viereck $D'C'B'A'$ ist kein Sehnenviereck. Im Inneren wird ein Punkt P bestimmt, von dem aus auf alle 4 Seiten das Lot gefällt wird. Dadurch wird das Viereck $D'C'B'A'$ in 4 Vierecke zerlegt mit jeweils 2 gegenüberliegenden Winkel zu je $90°$. D.h. die Summe zweier Gegenwinkel ist $180°$ und die 4 Vierecke sind alle Sehnenvierecke. Zerlegt man diese 6 Sehnenvierecke nun weiter (wie bei der Zerlegung in $4, 7, 10, \ldots$ Sehnenvierecke), erhält man auch Zerlegungen in $9, 12, 15, \ldots$, allgemein $3n + 3$ Sehnenvierecke.

Lösung 124-62

Ulrich Warnecke:



Zunächst ist zu fragen, ob und für welche a die Ungleichung ganzzahlige Lösungen hat. Damit überhaupt Lösungen existieren können, muss $a \leq \frac{1}{4}$ sein. Umformung der Ungleichung liefert

$$\underbrace{-\frac{1}{2}(1+\sqrt{1-4a})}_{f(a)} \leq x \leq \underbrace{-\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-4a})}_{g(a)}.$$

Ordnet man die a-Werte der Rechtsachse und die x-Werte der Hochachse zu, dann entnimmt man der graphischen Darstellung schon, dass ganzzahlige Lösungen nur für $a \leq 0$ möglich sind.

Dagegen sind für reelle Zahlen a mit $a > 0$ keine ganzzahligen Lösungen der gegebenen Ungleichung möglich.

Lösung 124-63

Es ist nicht möglich, das Zahlengitter auf diese Weise auszufüllen.

Es seien $b_1 > b_2 > b_3 > b_4 > b_5$ die von Borja der Reihe nach gewählten Zahlen und $m_1 < m_2 < m_3 < m_4 < m_5$ die von Mischa der Reihe nach gewählten Zahlen.

Offensichtlich gilt

$$b_1 \geq m_5$$

da Borja als erstes die größte Zahl in der Tabelle wählt.

Nehmen wir an, Borja habe die Zahl b_1 gewählt und Mischa die Zahlen $m_1 < m_2 < m_3 < m_4$, dann ist in Mischas Zahlengitter genau eine Zelle nicht markiert. Da $b_1 \geq m_5$ ist, ist die gleiche Zelle in Borjas Tabelle ebenfalls nicht markiert. Für diese Zahl N_1 gilt

$$b_2 \geq N_1 \geq m_4 \text{ also } b_2 \geq m_4$$

Wenn Borja die Zahlen $b_1 > b2$ gewählt hat und Mischa die Zahlen $m_1 < m_2 < m_3$, so findet man wieder in beiden Tabellen mindestens eine nicht markierte Zelle an der gleichen Position. Für die darin befindliche Zahl N_2 gilt

$$b_3 \geq N_2 \geq m_3 \text{ also } b_3 \geq m_3$$

Allgemein gilt: wenn Borja $k-1$ Zahlen gewählt hat und Mischa $6-k$ Zahlen, so findet sich eine gemeinsame nicht markierte Zelle in beiden Tabellen und für die darin befindliche Zahl N gilt $b_{k-1} \geq N \geq m_{6-k}$ und folglich:

$$\begin{aligned} b_1 &\geq m_5 \\ b_2 &\geq m_4 \\ b_3 &\geq m_3 \\ b_4 &\geq m_2 \\ b_5 &\geq m_1 \end{aligned}$$

Die Summe der von Mischa gewählten Zahlen ist also in jedem Fall nicht größer als die Summe der von Borja gewählten Zahlen.

Lösung 124-64

Ursel Willrett:

Der Tangens eines spitzen Winkels ist immer positiv. D.h. die Summe der Tangens der Innenwinkel eines spitzwinkligen Dreiecks ist positiv.

Ein stumpfwinkliges Dreieck hat einen stumpfen Winkel mit einem negativen Wert für den Tangens und zwei spitze Winkel mit je einem positiven Tangens.

Das stumpfwinklige Dreieck habe die Winkel α, β und γ. Der stumpfe Winkel sei α. Dann ist $\tan(\alpha)$ negativ. Außerdem gilt wegen der Winkelsumme $180°$

$$\beta + \gamma = 180° - \alpha$$

und

$$\tan(180° - \alpha) = \tan(\beta + \gamma) = -\tan(\alpha)$$

Damit die Summe der Tangens in dem stumpfwinkligen Dreieck positiv wird, muss $\tan(\beta) + \tan(\gamma) > \tan(\beta + \gamma)$ sein.

Das ist nicht der Fall, denn aus

$$\tan(\beta + \gamma) = \frac{\tan(\beta) + \tan(\gamma)}{1 - \tan(\beta)\tan(\gamma)}$$

folgt wegen $1 - \tan(\beta)\tan(\gamma) < 1$, dass $\tan(\beta + \gamma) > \tan(\beta) + \tan(\gamma)$ ist. Die Summe der Tangens der Innenwinkel in einem stupfwinkligen Dreieck ist somit negativ.

Die Summe der Tangens der Innenwinkel eines spitzwinkligen Dreiecks kann also nicht gleich der Summe der Tangens der Innenwinkel eines stumpfwinkligen Dreiecks sein.