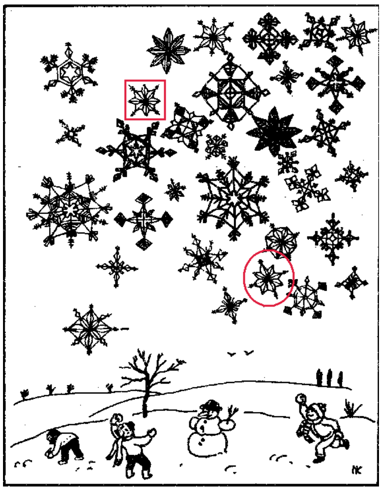
1 Vorschule

Lösung 125-12

Wegen der Druckqualität ist es nur schwer zu erkennen. Es sind diese beiden:



Lösung 125-12

Alles zusammen kostet 2 € 70 ct $+$ 3 € $+$ 2 € $=$ 7 € 70 ct

Lösung 125-13

15,5 €

Lösung 125-14

Es sind 4 Kinder. Sie müssen 1, 2, 3 und 4 Dosen getroffen haben. Das sind zusammen 10 Dosen.

2 Klassen 1 und 2

Lösung 125-11

In diese Aufgabe hatte sich anscheinend ein Schusselfehler eingeschlichen. Daher ist die Lösung a) etwas seltsam, aber auch lustig, denn wenn man 10 neue Bäume pflanzt, gibt es dann 0 Bäume im Park.

a) $100 + 44 - 18 - 136 = -10$

b) $18 + 136 = 154$

Lösung 125-22

20 + 18 = 38. Es fehlen 3 bis zur 41. Der Schmetterling sitzt auf der 3.

Lösung 125-23

Alle möglichen Tage liegen im Februar, da das der einzige Monat ist, dessen Nummer nur mit 2 geschrieben wird.

Es sind 02.02.2022, 20.02.2022 und 22.02.2022.

Lösung 125-24

Beide Flächen sind gleich groß. Man kann in der rechten Figur unten ein Dreieck abschneiden, das genau in die Lücke oben in der rechten Figur passt. Dann sieht die rechte Figur genauso aus wie die linke

Lösung 125-25

$$98 - 77 = 21, 10 : 2 = 5, 21 + 5 = 26$$

In Nicks Klasse sind 26 Kinder.

Lösung 125-26

Die Figuren A, C und E kann man zeichnen, ohne den Stift abzusetzen.

Lösung 125-27

Ziwschen die 24 und die 7 das +, zwischen die 7 und die 31 das =

$$24 + 7 = 31$$

Lösung 125-28

RUN**DREI**SE, TANNEN**ZWEI**G, KL**EINS**TADT, KLA**VIER**STUNDE

3 Klassen 3 und 4

Lösung 125-31

Wenn man die 2022 und die 2020 vertauscht, sieht der Term so aus:

$$2022 \cdot 2021 - 2022 \cdot 2020$$

Das erste Produkt kann man aus so schreiben:

$$2022 \cdot 2021 = 2022 \cdot 2020 + 2022$$

Also ist

$$2022 \cdot 2021 - 2022 \cdot 2020 = 2022 \cdot 2020 + 2022 - 2022 \cdot 2020$$

$2022 \cdot 2020$ wird also zuerst zu 2022 addiert und anschließend wieder subtrahiert. Man kann sich diese Aktion daher sparen und erhält 2022.

Das Ergebnis ist 2022.

Lösung 125-32

Für Leon, Natascha und Katja ist heute Mittwoch. Für Hannah ist heute Donnerstag. Für Jonas ist heute Freitag. Damit sagen 3 Kinder, es sei Mittwoch, zwei Kinder sagen es sei nicht Mittwoch. Da drei Kinder Recht haben, ist heute Mittwoch. Hannah und Jonas haben sich geirrt.

Lösung 125-33

13212, denn $12000 + 1200 + 12 = 13212$.

Lösung 125-34

a) $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$, also $1 \cdot 24, 1 \cdot 2 \cdot 12, 1 \cdot 3 \cdot 8, 1 \cdot 4 \cdot 6, 2 \cdot 2 \cdot 6, 2 \cdot 3 \cdot 4$ Das sind 6 verschiedene Quader

b) $9 = 3 \cdot 3$ also $1 \cdot 9, 1 \cdot 3 \cdot 3$. Das sind zwei Möglichkeiten.

c) $1 \cdot 1 \cdot 11$ Das ist nur eine Möglichkeit.

Lösung 125-35

Die Summe ist nach dem Ersetzen gleich 930:

$$\begin{aligned} 459 - 326 &= 133 \\ 797 + 133 &= 930 \end{aligned}$$

Lösung 125-36

Variante 1 von Panos, 9 Jahre, Klasse 3:

$$5 \cdot 3 = 15, 10 \cdot 3 = 30, 25 \cdot 3 = 75$$

und

$$5 + 5 = 10, 10 + 15 = 25, 25 + 25 = 50$$

Damit erhält man die Fortsetzung

$$50, 150 (= 3 \cdot 50), 85 (= 50 + 35)$$

Variante 2:

Die Regel ist $\cdot 3, -5$. Folglich geht es so weiter

5 15 10 30 25 75 **70** **210** **205**

Lösung 125-37

Wir kürzen die Gummibärchen so ab: rot mit R, gelb mit E, grün mit Ü und weiß mit W

a) 6 Möglichkeiten: REÜ, RÜE, ERÜ, EÜR, ÜRE, ÜER

b) 24 Möglichkeiten: W kann an erster, zweiter, dritter oder vierter Stelle stehen, während sich die Reihenfolge der 3 anderen nicht ändert. Daher $4 \cdot 6 = 24$ Möglichkeiten.

Lösung 125-38

1 =	Kegel	**2 =**	Würfel	**3 =**	Rad aus Holzbaukasten
4 =	Pyramide	**5 =**	Ball	**6 =**	leerer Blumentopf

4 Klassen 5 und 6

Lösung 125-41

Es seien e die Länge des Elefanten, b die Länge der Boa, p die Länge des Papageis, m die Länge der Meerkatze, k die Länge des Kalbs, z die Länge der Katze und l die Länge des Kamels. Dann ergibt sich aus der Aufgabenstellung folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} e &= k + 3p \\ l &= m + 3p \\ k &= 8p \\ l &= z + 6p \\ b &= 38p \\ b &= e + p + m + k + z + l \end{aligned}$$

Dieses hat die (eindeutige) Lösung

$$\begin{aligned} p &= p \\ k &= 8p \\ b &= 38p \\ l &= 9p \\ z &= 3p \\ m &= 6p \\ e &= 11p \end{aligned}$$

Lösung 125-42

Der Dritte antwortet ebenfalls „Genau einer “

Begründung:

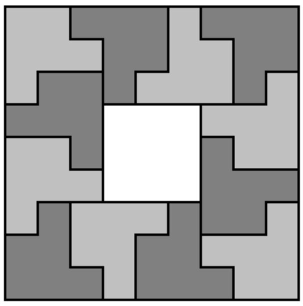
Angenommen, der erste Inselbewohner ist wahrheitsliebend. Dann müssen die beiden Begleiter Lügner sein. Das widerspricht aber der Antwort des zweiten Inselbwohners, der dann ja die Wahrheit gesagt hätte.

Daher muß der erste Inselbewohner ein Lügner sein.

Unter den beiden Begleitern ist somit mindestens ein Wahrheitsliebender.

Angenommen, der zweite Inselbewohner ist ein Lügner. Dann stimmt seine Antwort nicht, d.h. der dritte Inselbewohner muß ebenfalls ein Lügner sein. Das widerspricht aber der Antwort des ersten, der dann ja die Wahrheit gesagt hätte. Folglich kann der zweite Befragte kein Lügner sein. Der zweite Befragte sagt also die Wahrheit. Dann muss der dritte Inselbewohner ebenfalls wahrheitsliebend sein.

Lösung 125-43



Lösung 125-44

Das Anhängen einer Null an eine natürliche Zahl verzehnfacht deren Betrag. Seien $a, b \in \mathbb{N}$ die gesuchten Zahlen, dann gilt folglich

$$\begin{aligned} 10a + b &= 10007 \\ a + b &= 2807 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} 9a + (a + b) &= 10007 \\ 9a + 2807 &= 10007 \end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung folgt $a = 800$, also $b = 2007$.

Lösung 125-45

Es ist $\alpha = \alpha'$ (Scheitelwinkel), $\beta_1 = 180° - \beta$ (Nebenwinkel) $\gamma = \gamma'$ (Scheitelwinkel) und $\epsilon = \epsilon'$ (Scheitelwinkel). Folglich ist (unter Ausnutzung des Innenwinkelsatzes in Dreiecken)

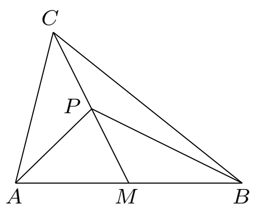
$$\begin{aligned}\delta &= 180° - (180° - \epsilon - \beta_1)\\ &= 180° - (180° - (180° - \alpha' - \gamma') - (180° - \beta))\\ &= 180° - (180° - (180° - \beta) - (180° - \alpha - \gamma)\\ &= 360° - (\alpha + \beta + \gamma)\\ &= 110°\end{aligned}$$

Zur Probe kann man z.B. die Innenwinkelsumme $\delta_1 + \beta_1 + \epsilon$ berechnen, wenn δ_1 den Nebenwinkel von δ bezeichnet.

Lösung 125-46

U.Warnecke:

Sei D der Schnittpunkt der Strecke AB und der Senkrechten zu AB durch P; dann ist $\overline{DP}$ Höhe der Dreiecke AMP und BMP. Da außerdem $\overline{AM} = \overline{BM}$, so sind AMP und BMP flächengleich.



Sei weiter E der Schnittpunkt der Strecke AB und der Senkrechten zu AB durch C; dann ist $\overline{EC}$ Höhe der Dreiecke AMC und BMC. Daher sind auch diese beiden Dreiecke

flächengleich, woraus sofort die Flächengleichheit der Dreiecke APC und BPC folgt.
Bemerkung: Man kann auch von einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ ausgehen und dann mit Scherung argumentieren.

Lösung 125-47

Es sitzt gar kein Lügner im Zimmer.

Begründung: Da es nur 5 Menschen sind, sagt die fünfte Person sicher die Wahrheit, denn es können nicht 6 Lügner sein.

Dann sind aber höchstens 4 der Personen Lügner. D.h. die vierte Person sagt ebenfalls die Wahrheit.

Dann können es aber höchstens 3 Lügner sein. D.h. die dritte Person sagt die Wahrheit.

Dann können es aber höchstens 2 Lügner sein. D.h. die zweite Person sagt die Wahrheit.

Dann kann es aber höchstens 1 Lügner sein. D.h. die erste Person sagt die Wahreit.

Somit sagen alle die Wahrheit.

Lösung 125-48

Angenommen, es haben zu Beginn x Kartoffelpuffer auf dem Teller gelegen. Dann gilt

$$\begin{aligned} 2\,(2(2x-8)-8)-8 &= 0 \mid: 2 \\ 2(2x-8)-8-4 &= 0 \\ 2(2x-8)-12 &= 0 \mid: 2 \\ 2x-8-6 &= 0 \\ 2x &= 14 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Zu Beginn lagen 7 Kartoffelpuffer auf dem Teller.

5 Klassen 7 und 8

Lösung 125-51

U.Warnecke:

Beispielsweise ist

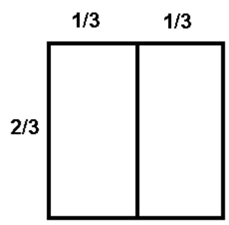
$$(-1)\cdot 2\cdot(-3)\cdot 3\cdot(-8) = (-2)\cdot 1\cdot(-4)\cdot 2\cdot(-9)$$

Lösung 125-52

Da die Summe von Zähler und Nenner konstant ist, ist der Zähler und damit der gesamte Bruch umso größer je kleiner der Nenner ist. $\frac{25}{76}$ ist gerade noch kleiner als $\frac{1}{3}$, aber $\frac{26}{75}$ schon größer als $\frac{1}{3}$. $\frac{25}{76}$ ist damit die Lösung.

Lösung 125-53

Es gilt nicht zwingend, wie ein Gegenbeispiel zeigt:



Lösung 125-54

a) Die vierte Figur besteht aus $4^3 = 64$ Strecken der Länge $\frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$. Ihre Gesamtlänge beträgt also $\left(\frac{4}{3}\right)^3 \approx 2,37$.

b) In jedem Schritt wird jede Teilstrecke in 4 neue Teilstrecken umgewandelt. Die Anzahl der Strecken im Schritt n ist also gleich 4^{n-1}. Die Länge jeder Teilstrecke wird in jedem Schritt gedrittelt. Die Länge einer Teilstrecke im Schritt n ist also gleich 3^{n-1} und damit die Gesamtlänge = $\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$.

c) Die Gesamtlänge der Girlande kann beliebig groß werden. Wenn man mit einem 1 m langen Stück beginnt, ist die Girlande wegen $\left(\frac{4}{3}\right)^{24} \approx 996,62 < 1000$ und $\left(\frac{4}{3}\right)^{25} \approx 1328 > 1000$ nach 26 Schritten länger als 1 km.

Lösung 125-55

Wegen $n^3 + 2n = n(n^2 + 2)$ ist für alle durch 3 teilbaren Zahlen $n \in \mathbb{N}$ die gegebene Zahl ebenfalls durch 3 teilbar. Falls n nicht durch 3 teilbar ist, lässt es entweder den Rest 1 oder den Rest 2 bei Division durch 3. In beiden Fällen lässt n^2 den Rest 1 bei Division durch 3. $n^2 + 2$ ist demnach durch 3 teilbar. q.e.d.

Lösung 125-56

Als Hilfsaussage zeigen wir zunächst, dass sich außer $(3, 5)$ jedes Primzahlzwillingspaar in der Form $(6n - 1, 6n + 1)$ mit einer natürlichen Zahl n darstellen lässt.

Beweis. Jede natürliche Zahl kann man (nicht notwendig eindeutig) darstellen als $6n-2$, $6n-1$, $6n$, $6n + 1$, $6n + 2$ oder $6n + 3$ mit einer passend gewählten Zahl $n \in \mathbb{N}$. Die Zahlen $6n - 2$, $6n$, $6n + 2$ sind als gerade Zahlen keine Primzahlen. Die Zahl $6n + 3$ ist durch 3 teilbar, also ebenfalls keine Primzahl. Daher können höchstens $6n - 1$ oder $6n + 1$ Primzahlzwillinge sein.

Daraus folgt unmittelbar, dass ab $(5, 7)$ jedes Primzahlzwillingspaar eine durch 6 teilbare Zahl einschließt. Aufeinanderfolgende Primzahlzwillingspaare schließen also höchstens aufeinanderfolgende durch 6 teilbare Zahlen ein. Deren Abstand beträgt mindestens 6, also beträgt der Abstand aufeinanderfolgender Primzahlzwillingspaare mindestens 4, w.z.b.w.

6 Klassen 9 bis 13

Lösung 125-61

U. Willrett:

$$(x - 1)^2 \cdot (x + 2) \leq 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

Die Ungleichung stimmt für $x = 1$ und $x \leq -2$. Der erste Faktor $(x - 1)^2$ ist für $x \in \mathbb{R}$ nichtnegativ. Die Funktion $f(x)$ hat also ihr Maximum für $x = 1$. Für $x \leq -2$ ist $f(x) < f(1) = 2$.

U. Warnecke:

Es ist $(x-1)^2 \geq 0$ und $x+2 \leq 0$ für $x \leq -2$. Daher ist die gegebene Menge gleich der Menge $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq -2 \ \vee \ x = 1\} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq -2\} \cup \{1\}$ (= Definitionsmenge von f).

f ist in $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq -2\}$ streng monoton steigend; daher ist bei Beschränkung auf diese Menge $f(-2) = 1$ das Maximum von f. Da aber $f(1) = 3 - |1| = 2$, so ist $\max(f) = f(1) = 2$.

Lösung 125-62

U. Willrett:

$$3^n + 1 = (1+2)^n + 1 = 1^n + 2^1\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \cdots + 2^n\binom{n}{n} + 1$$

$$= 2 + 2^1\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \cdots + 2^n\binom{n}{n} = 2\left(1 + 2^0\binom{n}{1} + 2^1\binom{n}{2} + \cdots + 2^{n-1}\binom{n}{n}\right)$$

Sei

$$K := 1 + 2^0\binom{n}{1} + 2^1\binom{n}{2} + \cdots + 2^{n-1}\binom{n}{n}$$

K ist ungerade, falls

$$2^0\binom{n}{1} + 2^1\binom{n}{2} + \cdots + 2^{n-1}\binom{n}{n}$$

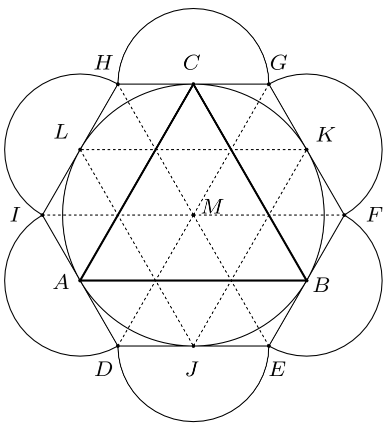
gerade ist. D.h. die einzige Zweierpotenz, durch die $3^n + 1$ teilbar ist, ist 2. K ist nur dann gerade, wenn

$$2^0\binom{n}{1} + 2^1\binom{n}{2} + \cdots + 2^{n-1}\binom{n}{n} = 1$$

ist. Das ist der Fall für $n = 1$. Die größte natürliche Zahl m derart, dass $3^n + 1$ durch 2^m teilbar ist, ist daher $m = 2$.

Lösung 125-63

U. Warnecke:



Aus der Unterteilung des Sechsecks $DEFGHI$ in lauter kongruente Dreiecke ergibt sich sofort, dass $|DE| = \frac{2}{3}|AB| = \frac{2}{3}a = 8$ cm ist. Sei $s = |DE|$.
Die sechs Halbkreise haben zusammen den Flächeninhalt $\mathcal{A}_{\text{3Kreis}} = 3 \cdot \pi \left(\frac{s}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \cdot \pi s^2$.
Die (nicht eingezeichnete) Strecke JM ist Höhe im Dreieck DEM; sie kann nach dem Satz des PYTHAGORAS direkt berechnet werden:

$$h = \sqrt{s^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,s.$$

Damit ist der Flächeninhalt des Dreiecks DEM
$\mathcal{A}_{DEM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}\,s \cdot s = \frac{1}{4}\sqrt{3}\,s^2$.

Das Sechseck $DEFGHI$ hat den Flächeninhalt $\mathcal{A}_{\text{6eck}} = 6 \cdot \mathcal{A}_{DEM} = \frac{3}{2}\sqrt{3}\, s^2$.

Der Flächeninhalt der Rosette ist somit

$$\mathcal{A}_{\text{Rosette}} = \mathcal{A}_{\text{6eck}} + \mathcal{A}_{\text{3Kreis}} = \frac{3}{2}\sqrt{3}\, s^2 + \frac{3}{4} \cdot \pi s^2 = \frac{3}{4}(2\sqrt{3} + \pi) \cdot s^2,$$

mit $s = 8$ cm ergibt das $\mathcal{A}_{\text{Rosette}} \approx 317\text{cm}^2$.

Lösung 125-64

U. Warnecke:

Beginnend bei 1 hat keine unter den ersten 20 aufeinanderfolgenden Zahlen eine durch 11 teilbare Quersumme; erst 29 ist die erste Zahl mit dieser Eigenschaft. Eine zweite solche Zahl ist 38. Also befindet sich unter den Zahlen 1 bis 39 mindestens eine mit einer durch 11 teilbaren Quersumme.

Nun betrachte man für beliebig ausgewähltes n die ersten 20 aufeinanderfolgenden Zahlen n bis $n + 19$. Unter diesen befinden sich jedenfalls zwei mit der Endziffer 0, wobei eine von beiden nicht auf 90 endet; diese Zahl sei jetzt m.

Die Quersummen der Zahlen $m, m + 1, m + 2, \ldots, m + 9$ sind jeweils paarweise verschieden, ebenso die Quersummen der Zahlen $m + 10, m + 11, \ldots, m + 19$, und das heißt, dass eine unter allen diesen Zahlen eine durch 11 teilbare Quersumme besitzt.

Um wie gewünscht an ein Beispiel zu kommen, überlegt man zuerst, welche Endziffern Minuend und Subtrahend haben müssen, damit sich die Differenz 39 ergibt. Außerdem sollte sich bei der Subtraktion eine 1 als Übertrag ergeben (siehe Ausgangsposition links).

$$\begin{array}{lr} & 19 \\ - & 80 \\ & {\scriptstyle 1} \\ \hline & 39 \end{array} \qquad \begin{array}{lr} & 019 \\ - & 980 \\ & {\scriptstyle 1} \\ \hline & 039 \end{array} \qquad \begin{array}{lr} & 0019 \\ - & 9980 \\ & {\scriptstyle 1} \\ \hline & 0039 \end{array} \qquad \text{fortsetzen bis} \qquad \begin{array}{lr} & 1000019 \\ - & 999980 \\ & {\scriptstyle 1} \\ \hline & 0000039 \end{array}$$

Weiter ist dann zu überlegen, aus welchen Ziffern von Minuend und Subtrahend unter Berücksichtigung des Übertrages 1 nach Subtraktion jetzt nur noch Nullen im Ergebnis geliefert werden. Dabei sollten nur solche Ziffern in Betracht kommen, die nach Fortsetzung dieser Überlegungen schließlich Zahlen liefern, deren Quersumme durch 11 teilbar ist (siehe Endposition rechts).
Aus der vorgeführten Beispielrechnung haben sich die Zahlen 1 000 019 und 999 980 ergeben.