1 Vorschule

Lösung 126-11

Es sind 12 Verstecke.

Lösung 126-12

Es sind 24 Blumen.

Lösung 126-13

unter dem Baum 2.

Lösung 126-14

a) Hans kann nur einen einzigen Strauß binden: eine Rose, eine Tulpe, eine Lilie.

b) Hans kann 10 verschiedene Sträuße binden

1. von jeder Sorte 3 Blumen: Rose, Rose Rose oder Tulpe, Tulpe, Tulpe oder Lilie, Lilie, Lilie. Das sind 3 verschiedene Sträüße.

2. von jeder Sorte 2 Blumen und eine dritte von einer anderen Sorte: 2 Rosen, eine Tulpe oder 2 Rosen, eine Lilie oder 2 Tulpen, eine Rose oder 2 Tulpen, eine Lilie oder 2 Lilien, eine Rose oder 2 Lilien, eine Tulpe. Das sind 6 verschiedene Sträüße.

3. von jeder Sorte eine Blume: 1 Rose, 1 Tulpe, 1 Lilie. Das ist ein weiterer Strauß.

2 Klassen 1 und 2

Lösung 126-21

Täglich 1,50 € . Das sind in 24 Tagen

$$1,50 € \cdot 24 = 36 €$$

Sie haben in 24 Tagen 36 € ausgegeben.

Lösung 126-22

$$213 \quad 415 \quad 347 \quad 521 \quad 189$$

Die 521, denn bei allen anderen Zahlen ist die dritte Ziffer gleich der Summe der ersten und zweiten Ziffer.

Lösung 126-23

Hund, Hahn, Esel Katze.

Lösung 126-24

R kann man sofort ausrechnen: $R = 18 : 2 = 9$. Damit kann man O und E bestimmen: $O = 15 - R = 15 - 9 = 6$, $E = 17 - R = 17 - 9 = 8$. Knifflig wird es für S, T und N. S kann gleich 0 oder 2 oder 4 sein. Für $S = 0$ wäre $T = 0$. Das geht nicht, weil jeder Buchstabe für eine andere Ziffer steht. Für $S = 2$ folgt $T = 1$ und $N = 10$, Aber alle Ziffern sind kleiner als 10. Also geht $S = 2$ nicht. Es bliebt nur noch $S = 4$. Dann ist $T = 2$ und $N = 7$. Ergebnis:

$$O + S + T + E + R + N = 6 + 4 + 2 + 8 + 9 + 7 = 36$$

Lösung 126-25

Aus „Das Mädchen, dass 8 Osternester gefunden hat und Anna gehen in die gleiche Klasse“ sowie „Anna hat nicht die wenigsten Osternester gefunden.“ folgt, dass Anna nicht 8 und nicht 5 Osternester gefunden hat. Also hat Anna 7 Osternester gefunden.

Aus „Das Mädchen, das 5 Osternester gefunden hat, und Charlie sind zusammen im Schulchor.“ und der Tatsache, dass Anna 7 Osternester gefunden hat, folgt, dass Charlie 8 Osternester gefunden hat.

Jetzt folgt, dass Kira 5 Osternester gefunden hat.

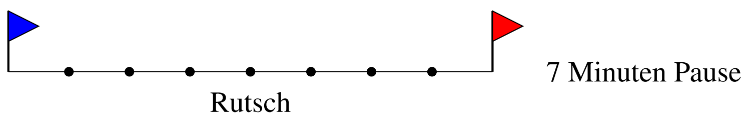
5 Osternester	7 Osternester	8 Osternester
Kira	Anna	Charlie

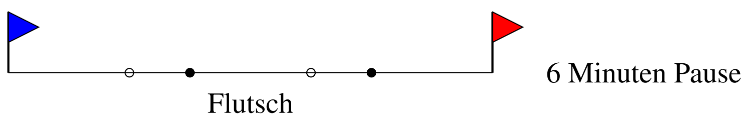
Lösung 126-26

A=35, B=26 und C=29

Lösung 126-27

Flutsch gewinnt und muss 1 Minute warten.





schwarze Kreise = 1 Minute, weiße Kreise = 2 Minuten

Lösung 126-28

Man kann alle möglichen Zahlen durchprobieren. Die erste Ziffer kann eine 0, eine 1, eine 2 und eine 3 sein. Ab 4 geht es nicht mehr, weil die dritte Ziffer höchstens eine 9 sein darf. Es sind also 036, 147, 258 und 369 möglich. Nur bei 258 ist die Summe der Ziffern gleich 15.

Lisas Geheimzahl ist die 258.

3 Klassen 3 und 4

Lösung 126-31

$$2186 \quad 4132 \quad 7462 \quad 5201 \quad 9346$$

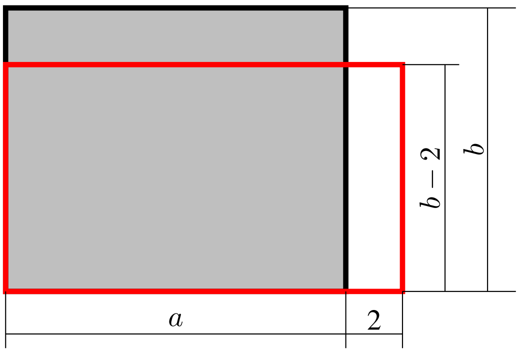
Die 5201, denn bei allen anderen Zahlen ist das Produkt der ersten und dritten Ziffer gleich der zweistelligen Zahl, die aus der 2. und der 4. Ziffer gebildet wird.

Lösung 126-32

a) 1 l sind 1000 ml. Es sind also 180000 Tropfen.

b) $180000 : 3 = 60000$. Es dauert also $31 \cdot 60000$ Sekunden, bis die Wanne voll ist. 60000 Sekunden sind 1000 Minuten. Es dauert also 31000 Minuten. Ein Tag hat 1440 Minuten. 31000 sind also 21 Tage und 760 Minuten. Und das sind 21 Tage, 12 Stunden und 40 Minuten.

Lösung 126-33



Im Bild ist das gegebene Rechteck grau gefüllt und das neue Rechteck rot umrandet.

Um vom grauen zum rot umrandeten Rechteck zu kommen, muss man vom oberen Rand des grauen Rechtecks einen Streifen der Länge a und der Breite 2 abschneiden und an den rechten Rand des grauen Rechtecks einen Streifen der Länge 2 und der Breite $b - 2$ ankleben.

Die Differenz der Flächeninhalte entspricht also der Differenz der Flächeninhalte der 2 Streifen, die beide gleich breit sind. Der abgeschnittene Streifen hat die Länge a, der angeklebte, wenn man ihn dreht, die Länge $b - 2$. Die Differenz beträgt also $2 \cdot (a - b + 2)$.

Dies ist eine Formel, für die man die Änderung des Flächeninhalts für beliebige Seitenlängen a und b ausrechnen kann. Für $a = 10$ und $b = 5$ ergibt sich, dass das neue Rechteck $2 \cdot (10 - 5 + 2) = 2 \cdot 7 = 14$ Quadratzentimeter größer ist, als das gegebene Rechteck.

Lösung 126-34

$$39 + 16 = 55 \quad (1)$$
$$9 \cdot 4 : 6 = 6 \quad (2)$$
$$4 \cdot 15 - 60 = 0 \quad (3)$$
$$(63 + 27) : 9 = 10 \quad (4)$$

Lösung 126-35

$$24 : 3 = 8$$

Von 8 Pinguinen hat Sascha genau ein Foto, von 8 genau zwei Fotos. Das sind insgesamt 24 Fotos. Also sind es 16 Pinguine.

Lösung 126-36

Die Einerziffern 1, 6, 7 und 8 müssen zusammen eine Zahl mit der Einerziffer 0 ergeben. Das geht nur so:

$$8 + 6 + 7 - 1 = 20$$

oder so:

$$8 + 7 - 6 + 1 = 10$$

Eine mögliche Lösung findet man also, indem man man

a) 16, 17 und 28 addiert und 31 subtrahiert.

b) 17, 28 und 31 addiert und 16 subtrahiert.

Im Fall a) haben wir Glück, denn es ist

$$16 + 17 + 28 - 30 - 31 = 0$$

Im Fall b) geht es nicht:

$$17 + 28 + 31 - 16 - 30 = 30$$

Aus der ersten Lösung kann man sofort eine zweite Lösung ableiten, indem man $+$ und $-$ vertauscht:

$$31 + 30 - 16 - 17 - 28 = 0$$

Mehr Lösungen kann es nicht geben, weil es nur 2 Varianten mit Einerziffer 0 sind.

Lösung 126-37

Wir entscheiden für jede der Aussagen (1), (2) und (3), ob sie wahr ist:

(1) ist wahr, denn wenn man beim Addieden die Summanden vertauscht, bleibt die Summe gleich.

(2) ist wahr, denn wenn man bei einer Gleichung die Seiten verauscht, ändert das nichts.

(3) ist falsch, denn zum Beispiel gilt zwar $1 + 7 = 8$, aber nicht $1 + 8 = 7$, $x = 1, y = 7$ ist ein Gegenbeispiel.

Damit sind (1) und (2) wahr und (3) ist falsch. Aussage (A) ist richtig.

Lösung 126-38

B

4 Klassen 5 und 6

Lösung 126-41

Variante 1: (Leo Gitin, 8 Jahre, Klasse 3)

Es müssen (genau, H.W.) 2 Nullen sein, weil 10 eine 0 ergibt und $2 \cdot 5$ eine Null ergibt. Da 62270298 nicht durch 4 teilbar ist, ist auch die dritte Zahl ungleich 13!.

Variante 2:

Die Primfaktorzerlegung von 13! ergibt

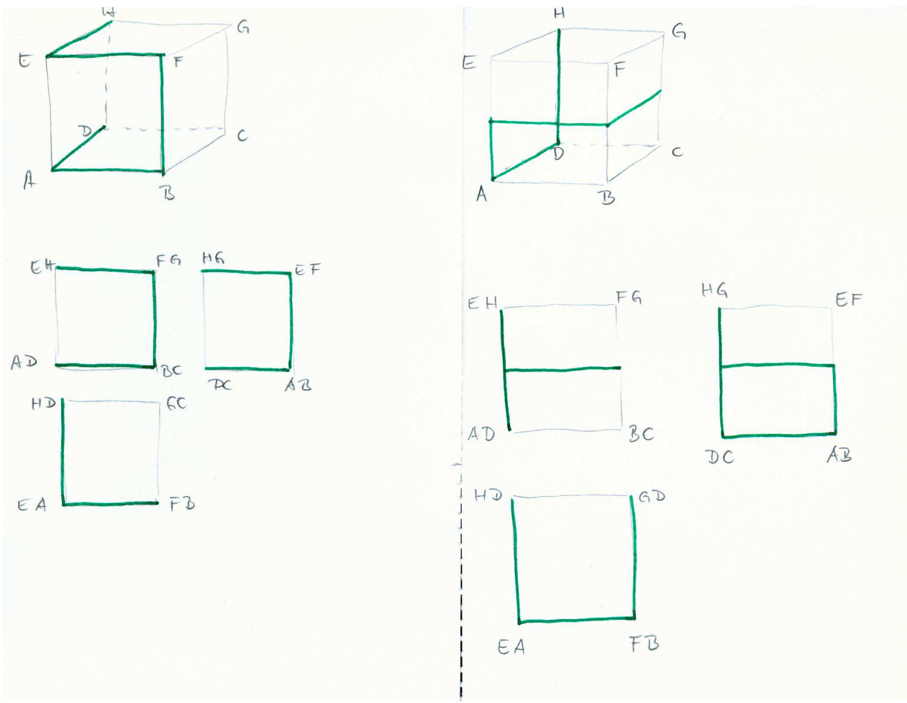
$$13! = 2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$$

Eine Zahl endet genau dann auf 0, wenn sie durch $10 = 2 \cdot 5$ teilbar ist. 13! enthält genau zweimal den Faktor 5 und zehnmal den Faktor 2. Folglich endet sie auf genau zwei Nullen. Ritas und Svens Ergebnis ist daher falsch. Bleibt noch, Tonis Ergebnis zu überprüfen. Da der Faktor 2 zehnmal enthalten ist, muss 13! auf jeden Fall durch 16 teilbar sein. Wegen

$$6227029800 = 10000 \cdot 62270 + 29800$$

und $16 \mid 10000$ genügt es, die Teilbarkeit von 29800 auf 16 zu überprüfen. Es gilt $29800 = 2^3 \cdot 3725$. 29800 ist daher nicht durch 16 teilbar und somit die von Toni berechnete Zahl ebenfalls nicht.

Lösung 126-42



Lösung 126-43

Angenommen, Zahnrad 1 dreht sich im Uhrzeigersinn. Dann dreht sich Zahlnrad 2 entgegen dem Uhrzeigersinn, Zahnrad 3 mit dem Uhrzeigersinn, ..., Zahnrad 10 engegen dem Uhrzeigersinn, Zahnrad

11 mit dem Uhrzeigersinn, was nicht möglich ist, weil Zahnrad 11 sich nicht in der gleichen Richtung drehen kann wie Zahnrad 1.

Es können sich nie alle Zahnräder gleichzeitig drehen.

Lösung 126-44

Da das Wort ROBOT aus genau 5 Buchstaben besteht und der Code für dieses Wort aus genau 10 Buchstaben, muss jeder Buchstabe durch eine zweistellige Zahl codiert sein. Also:

R	O	B	O	T
31	12	13	12	33

Nun kennt man dadurch den Code für den ersten und die beiden letzten Buchstaben des Wortes BEGEMOT (nicht fett gedruckt):

B	E	G	E	M	O	T
13	**11**	**2**	**11**	**22**	12	33

Ebenso kennt man folgende nicht fett gedruckte Buchstaben des Wortes KROKODIL:

K	R	O	K	O	D	I	L
1	31	12	**1**	12	**21**	**23**	**3**

Aus dem Ende des Wortes BEGEMOT und der Tatsache, dass T = 33 ist, leitet man ab, dass L = 3 sein muss, weil 33 bereits vergeben ist. Dies tragen wir in die Tabelle für KROKODIL ein. Folglich muss der Code für I mit 3 enden, muss aber gleichzeitig zweistellig sein, denn 3 codiert bereits das L. Der Code von I kann nicht 33 sein (wegen 33 = T) und nicht 13 (wegen 13 = B). Bleibt also I = 23. Dies tragen wir ein. Außerdem endet der Code für D mit 1, denn OT = 1233 und IL = 233.

D kann nicht 1 sein, denn damit die Codes für beide Worte gleich sind, muss bereits K = 1 sein. Wir tragen 1 für K ein.

Nun schauen wir uns die ersten Ziffern des Code für beide Worte an: E muss mit 1 beginnen, aber gleichzeitig zweistellig sein, da 1 bereits K codiert. Zusammen mit der ersten Ziffer des Codes für O folgt E = 11. Folglich ist G = 2, denn nach der 2 vom O kommen bereits die zwei 1, die E in BEGEMOT codieren durch die 1 von K und O von KROKODIL. Nun folgt, dass der Code für M mit 2 beginnt, aber nicht gleich 2 sein kann, da bereits G = 2 ist. M kann als gleich 21 oder 22 sein (22 codiert bereits I). 21 geht nicht, da dann D = 12 wäre und 12 dann 2 verschiedene Buchstaben codieren würde. Also muss M = 22 sein und folglich D = 21.

Nun kann MATEMATIKA codiert werden. Zunächst werden alle bekannten Codes eingetragen:

M	A	T	E	M	A	T	I	K	A
22	**32**	33	11	22	**32**	33	23	1	**32**

A muss zweistellig codiert sein, denn 1, 2 und 3 sind bereits vergeben. Außerdem sind folgende zweiziffrigen Codes bereits vergeben: 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 33. Einzig 32 bleibt übrig, also A = 32.

Der Code für MATHEMATIKA steht in der Tabelle.

Lösung 126-45

$$6216 \quad 8512 \quad 464 \quad 5125 \quad 327 \quad 7343 \quad 981$$

Die 981 passt nicht, wenn die Regel folgende ist: die erste Stelle jeder Zahl wird von ihrer dritten Potenz gefolgt. Das gilt für 981 nicht.

Lösung 126-46

Es sei x die gesuchte Zahl. Sie muss dann die Gleichung

$$\frac{x}{3} \cdot \frac{x}{11} = x$$

erfüllen, was äquivalent mit

$$x^2 = 33x$$

ist. Die Zahl $x = 0$ erfüllt diese Gleichung, ist aber nicht positiv. Wenn $x \neq 0$ ist, kann man beide Seiten der Gleichung durch x dividieren und erhält

$$x = 33$$

Es gibt also genau eine positive rationale Zahl, die die Bedingung erfüllt: 33.

Lösung 126-47

a) Eine der beiden Ziffern 6 kann auf den Kopf gestellt werden und wird dann zur Ziffer 9. Dann wird sie mit der Ziffer 2 getauscht. Nun lassen sich die Ziffern der gegebenen falschen Gleichung zu der korrekten Gleichung $13^2 = 169$ (ohne weitere Rechensymbole!) anordnen.

b) $3^4 - 79 = 2$.

Lösung 126-48

Der Vorgänger von 1985 ist 1984. Also lautet das Produkt $1984 : 2 = 992$.

Wenn wir die gesuchte natürliche Zahl mit n bezeichnen, gilt $n \cdot (n + 1) = 992$. Gleichzeitig ist

$$n^2 < n \cdot (n + 1) = 992$$

Wegen $30^2 = 900 < 992$ kommen folgende Produkte in die engere Wahl: $30 \cdot 31$ und $31 \cdot 32$. Von diesen ist nur das zweite gleich 992.

Die gesuchten Zahlen sind folglich 31 und 32.

5 Klassen 7 und 8

Lösung 126-51

a) Eine Teilbarkeitsregel lautet: Wenn die Quersumme einer Zahl durch 3 teilbar ist, dann ist auch die Zahl selbst durch 3 teilbar. Da $33 = 3 \cdot 11$ ist, so kann es keine fünfstellige Primzahl mit der Quersumme 33 geben.

b) Jede Zahl im Dezimalsystem, in der jede Ziffer genau einmal vorkommt, hat die Quersumme

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45.$$

Da $45 = 3 \cdot 15$ ist, kann es nach der in a) genannten Teilbarkeitsregel keine Primzahl der verlangten Art geben.

Lösung 126-52

Die Frage kann man so formulieren: für jede natürliche Zahl n ist

$$T_n := \frac{n(n+1)-2}{n+2}$$

eine natürliche Zahl. Das gilt tatsächlich, denn wir können den Term wie folgt äquivalent umformen:

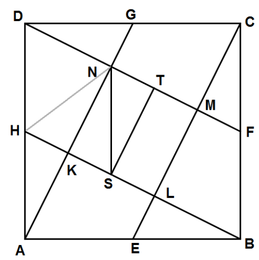
$$\begin{aligned} T_n &= \frac{n^2+n-2}{n+2} \\ &= \frac{n^2+n+3n-3n+4-4-2}{n+2} \\ &= \frac{(n+2)^2-3n-6}{n+2} \\ &= \frac{(n+2)^2-3(n+2)}{n+2} \\ &= n+2-3 \\ &= n-1 \end{aligned}$$

Es gilt also für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$n(n+1) = (n-1)(n+2)+2$$

d.h. $n(n+1)$ lässt bei Division durch $n+2$ den Rest 2.

Lösung 126-53



Mittels Kongruenzsatz sws angewendet auf die Dreiecke $\triangle AGD$ und $\triangle DFC$ und Innenwinkelsatz, angewendet auf $\triangle AGD$ bzw. $\triangle DNG$ zeigt man zunächst, dass $\angle MNK = 90°$ ist und analog, dass auch alle anderen Winkel im Viereck $KLMN$ rechte Winkel sind. (Dies wurde in einer früheren Aufgabe bereits ausführlich bewiesen).

Weiter gilt, dass die kleinen grauen Dreiecke paarweise kongruent sind (Kongruentzsatz wsw z.B.).

Es seien S und T die Mittelpunkte der Seiten KL und MN des Rechtecks $KLMN$. Wir beweisen, dass die Dreiecke $\triangle KSN$ und $\triangle HAK$ kongruent sind. Das folgt aus dem Strahlensatz und der Kongruenz der Dreiecke $\triangle NHK$ und $\triangle HAK$:

nach Voraussetzung sind die Strecken DF und HB parallel. Es gilt also

$$\mid AK \mid : \mid AN \mid = \mid AH \mid : \mid AD \mid$$

und da H der Mittelpunkt der Strecke AD ist, folgt $\mid AK \mid = \mid KN \mid$.

Das Viereck $ASNH$ muss also ein Rhombus (Raute) sein (senkrech aufeinanderstehende Diagonalen, deren eine die andere im Mittelpunkt schneidet.

Das Recheck $KLMN$ lässt sich also in 4 kongruente Dreiecke zerlegen (2 davon sind in der Zeichnung erkennbar), die alle kongruent zu einem kleinen grauen Dreieck sind. Damit sind die Flächeninhalte gleich, q.e.d.

Bemerkung: Es gibt noch einen anderen Beweis, bei dem die Gleichheit der Flächeninhalte rechnerisch gezeigt wird: dieser wird hier aber nur in den Grundideen angedeutet: Man beweist zunächst die Ähnlichkeit der Dreiecke $\triangle FCD$, $\triangle CDM$ und $\triangle FCM$. Der Streckungsfaktor zwischen $\triangle CDM$ und $\triangle FCM$ beträgt dabei nach Konstruktion 2. Der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle CDM$ ist also 4 mal so groß wie der des Dreiecks $\triangle FCM$. Der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle FCD$ ist gleich der Summe der Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle CDM$ und $\triangle FCM$. Seien nun a der Flächeninhalt des Quadrats, f der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle FCM$, g der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle FCD$ und q der Flächeninhalt des grauen Vierecks. Dann gilt

$$\begin{aligned} a &= q + 4 \cdot 4 \cdot f \\ g &= \frac{a}{4} \\ g &= 5f \end{aligned}$$

Also

$$a = 20f = q + 16f$$

D.h. $q = 4f$, q.e.d.

Lösung 126-54

Bernd Dahlen ist Gärtner.
Günter Lohe ist Lehrer.
Dieter Krüger ist Elektriker.

Man sieht das am Einfachsten, indem man sich 3 Tabellen mit der Kombination aus je 2 Merkmalen (Vorname- Nachname, Vorname-Beruf, Nachname- Beruf) zeichnet und mit Hilfe der Aussagen die möglichen und unmöglichen Kombinationen einträgt.

Aussage (1) ist überflüssig, da aus (2), (3) und (4) bereits folgt, dass Bernd nicht Krüger heißt.

Lösung 126-55

Wegen $40^2 = 1600$ ist $A < 4$. Sowohl $A = 3$, als auch $A = 2$ entfallen, da keine Quadratzahl auf die Ziffern 3 bzw. 2 endet. Daher gilt $A = 1$.

Da nur die Quadrate von 1 und 9 auf 1 enden, und $B \neq 1$ sein muss, gilt $B = 9$.

Das Kryptogramm lautet also

$$19^2 = 361$$

d.h. es ist $C = 3$ und $D = 6$.

Lösung 126-56

In einem ebenen 7-Eck gibt es genau 14 Diagonalen. Wir zeichnen einen Punkt P und zu jeder Diagonale eine Parallele durch diesen Punkt. Dann wird der Winkel von 360° in 28 Teilwinkel zerlegt. Nehmen wir an, jeder der 28 Teilwinkel hätte eine Größe von mindestens 13°, dann betrüge die Winkelsumme $28 \cdot 13^\circ = 364^\circ > 360^\circ$. Das ist ein Widerspruch. Es gibt also wenigstens 2 Diagonalen, die einen Winkel kleiner als 13° einschließen.

6 Klassen 9 bis 13

Lösung 126-61

Ursel Willrett:

Eine ungerade Zahl hat bei Teilung durch 8 einen der Reste 1,3,5 oder 7. Die Restklasse der Quadratzahl der ungeraden Zahl modulo 8 ist gleich der Restklasse des Quadrats des Restes modulo 8:

$n \equiv$	$1 \mod 8$	$3 \mod 8$	$5 \mod 8$	$7 \mod 8$
$n^2 \equiv$	$1 \mod 8$	$1 \mod 8$	$1 \mod 8$	$1 \mod 8$

D.h. eine ungerade Quadrtatzahl ist immer um 1 größer als ein Vielfaches von 8.

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$x_{1,2}$ ist nur dann rational, wenn $b^2 - 4ac$ eine Quadratzahl ist.

Es ist aber $b^2 \equiv 1 \mod 8, 4ac \equiv 4 \mod 8$ wegen a, b, c ungerade. D.h. $(b^2 - 4ac) \equiv 5 mod 8$. Da $b^2 - 4ac$ außerdem ungerade ist und bei Teilung durch 8 nicht den Rest 1 hat, ist $b^2 - 4ac$ keine Quadratzahl und $ax^2 + bx + c = 0$ hat keine rationale Lösung.

Ulrich Warnecke:

Angenommen das gegebene Polynom ließe sich in Linearfaktoren mit rationalen Koeffizienten zerlegen; man hätte dann folgende Darstellungen mit x_1 und x_2 als Lösungselementen:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 \underbrace{-a(x_1 + x_2)}_{b} x + \underbrace{ax_1x_2}_{c}.$$

Dann folgte aus $b = -a(x_1 + x_2)$, dass x_1 gerade und x_2 ungerade sein müsste oder x_1 ungerade und x_2 gerade sein müsste, da ja b und a ungerade sein sollen. x_1x_2 wäre also jedenfalls gerade.

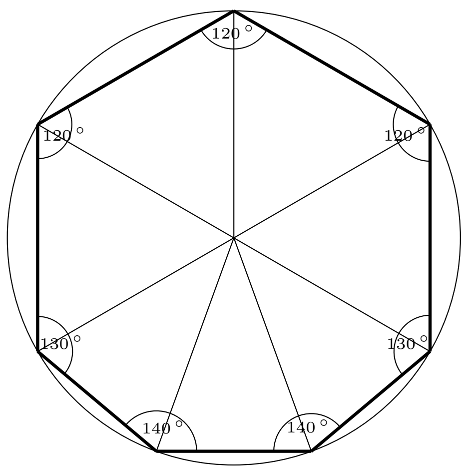
In jedem der beiden Fälle folgte aber weiter aus $c = ax_1x_2$, dass dann c gerade sein müsste im Widerspruch zur Ungeradheit von c.

Damit ist die Annahme widerlegt und der geforderte Beweis erbracht.

Lösung 126-62

Ulrich Warnecke:

Die Summe der Innenwinkelweiten eines regelmäßigen Siebenecks beträgt $(7 - 2) \cdot 180° = 900°$. Alle seine Seiten haben die gleiche Länge. Die Winkelweite an jedem der 7 Eckpunkte beträgt ungefähr $128,58°$.
Bei der Wahl von 3 Innenwinkeln mit der Größe $120°$ und dann noch vier weiteren Winkeln, deren Größen zusammengenommen $540°$ betragen, können nicht mehr alle Seiten gleich lang sein, da das Siebeneck dann nicht mehr regelmäßig ist. Daher sind dann nicht mehr alle Seiten gleichlang. Ein mögliches solches Siebeneck zeigt nebenstehende Figur.



Lösung 126-63

Aus $f(x) = (x+6)^2 - 6$

folgt

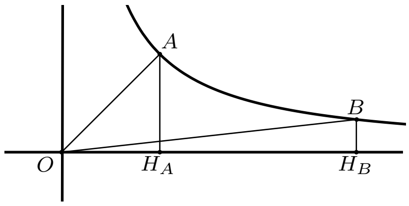
$$f(f(f(f(f(x))))) = (x+6)^{2^5} - 6 = (x+6)^{32} - 6$$

Die Nullstellen sind also $x_{1,2} = -6 \pm \sqrt[32]{6}$

Lösung 126-64

Ulrich Warnecke:

Die Abszissen von H_A und H_B seien x_1 bzw. x_2, und es sei vorausgesetzt, dass $x_1 < x_2$. Dann ist $|AH_A| = \frac{1}{x_1}$ und $|BH_B| = \frac{1}{x_2}$ und damit findet man für die Flächeninhalte der rechtwinkligen Dreiecke OH_AA und OH_BB



$$\mathcal{A}_{OH_AA} = \frac{1}{2} \cdot x_1 \cdot \frac{1}{x_1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot x_2 \cdot \frac{1}{x_2} = \mathcal{A}_{OH_BB}.$$

Nun findet man (in etwas salopper Schreibweise wegen des Bogens $\overset{\frown}{AB}$)

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{OBA} &= \mathcal{A}_{OH_BBA} - \mathcal{A}_{OH_BB} \\ \mathcal{A}_{H_AH_BBA} &= \mathcal{A}_{OH_BBA} - \mathcal{A}_{OH_AA} \end{aligned}$$

woraus nach dem soeben Gezeigten sofort $\mathcal{A}_{OBA} = \mathcal{A}_{H_AH_BBA}$ folgt.